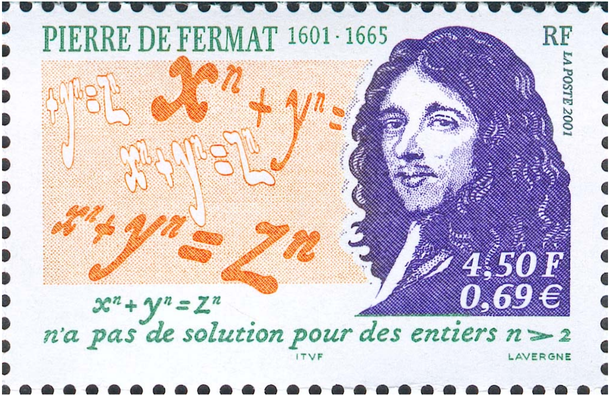

Leçon 104 - Espaces euclidiens

6 juin 2025

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Caractérisation des formes linéaires

Proposition - Caractérisation des formes linéaires

Soient E un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \mid x \rangle$.

Caractérisation des formes linéaires

Proposition - Caractérisation des formes linéaires

Soient E un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \mid x \rangle$.

Démonstration

Caractérisation des formes linéaires

Proposition - Caractérisation des formes linéaires

Soient E un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \,|\, x\rangle$.

Démonstration

Heuristique - Principe de construction

Ici, on a :

0. Un espace ambiant, euclidien
1. une forme linéaire $f \in E^*$
2. Alors il existe $a \in E$ tel que $f : x \mapsto \langle a|x\rangle$

Application

Corollaire - Equation de H et vecteur normal

Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n de E euclidien et H un hyperplan de E.

Alors il existe $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ soit l'équation de H dans $\mathscr{B}$ et dans ce cas $a\in E$ de coordonnées $(a_1,\ldots,a_n)$ dans $\mathscr{B}$ est un vecteur normal à H, $H=\mathrm{vect}(a)^{\perp}$.

Application

Corollaire - Equation de H et vecteur normal

Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n de E euclidien et H un hyperplan de E.

Alors il existe $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ soit l'équation de H dans $\mathscr{B}$ et dans ce cas $a \in E$ de coordonnées $(a_1,\dots,a_n)$ dans $\mathscr{B}$ est un vecteur normal à H, $H = \mathrm{vect}(a)^{\perp}$.

Exemple - Gradient

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Vecteur normal

Proposition - Vecteur normal à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine orthonormal de l'espace E de dimension n (i.e. que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E).
Soit $\mathscr{H}$ un hyperlpan affine de E.
On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$, tout vecteur normal à la direction H de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire $a \in E$ tel que $H = \mathrm{vect}(a)^\perp$.
Si a a pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{H}$ possède une équation dans $\mathscr{R}$ du type $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
Réciproquement : $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, est l'équation d'un hyperlpan affine de vecteur normal a de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

Vecteur normal

Proposition - Vecteur normal à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine orthonormal de l'espace E de dimension n (i.e. que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E).
Soit $\mathscr{H}$ un hyperlpan affine de E.
On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$, tout vecteur normal à la direction H de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire $a \in E$ tel que $H = \text{vect}(a)^{\perp}$.
Si a a pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{H}$ possède une équation dans $\mathscr{R}$ du type $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
Réciproquement : $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, est l'équation d'un hyperlpan affine de vecteur normal a de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

Démonstration

Lignes de niveaux

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Lignes de niveaux

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Corollaire - Ligne de niveau : hyperplan

Dans E euclidien, les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire les ensembles $E_k = \{M \in E \,|\, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$) sont des hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Lignes de niveaux

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Corollaire - Ligne de niveau : hyperplan

Dans E euclidien, les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire les ensembles $E_k = \{M \in E \,|\, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$) sont des hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Démonstration

Distance

Proposition - Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien, défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$. Alors, pour M point de E, on a

$$d(M,\mathscr{H}) = |\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|.$$

Distance

Proposition - Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien, défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$. Alors, pour M point de E, on a

$$d(M, \mathscr{H}) = |\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|.$$

Démonstration

Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration

Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors
$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors
$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Démonstration

Exercice Reprendre le calcul de la distance de $a = (2, 2, 0)$ à $F = \mathrm{vect}((1, 1, 2), (1, -1, 1))$.

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow^{?} & & \downarrow^{T} \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow ? & & \downarrow T \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

Définition - Adjoint de $u \in \mathscr{L}(E,F)$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ Il existe une unique application, notée ${}^t u$ ou $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\ x,y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$$

Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow^{?} & & \downarrow^{T} \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

Définition - Adjoint de $u \in \mathscr{L}(E,F)$

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ Il existe une unique application, notée ${}^t u$ ou $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\ x,y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$$

Démonstration

Interprétation matricielle

Analyse - Interprétation matricielle.

Interprétation matricielle

Analyse - Interprétation matricielle.

Remarque S'il n'y a pas de base orthonormée

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

Définition - Forme bilinéaire non dégénérée

Soient E, F deux espaces vectoriels.
On dit que la forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si

$$(\forall\ x \in E, B(x,y) = 0) \Rightarrow y = 0$$
$$(\forall\ y \in F, B(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0$$

Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

Définition - Forme bilinéaire non dégénérée

Soient E, F deux espaces vectoriels.
On dit que la forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si

$$(\forall\ x \in E, B(x,y) = 0) \Rightarrow y = 0$$
$$(\forall\ y \in F, B(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0$$

Exercice
Montrer que tout produit scalaire définie sur E st une forme bilinéaire non dégénérée.

Crochet de dualité

Définition - Crochet de dualité

Soit E un $\mathbb{R}$ev. de dimension finie.
On appelle crochet de dualité de E la forme bilinéaire non dégénérée :

$$B : E^* \times E \to \mathbb{R}, (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

Crochet de dualité

Définition - Crochet de dualité

Soit E un $\mathbb{R}$ev. de dimension finie.
On appelle crochet de dualité de E la forme bilinéaire non dégénérée :

$$B : E^* \times E \to \mathbb{R}, (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire non dégénérée.

Caractérisation des formes linéaires

Heuristique - Principe de construction/d'application

Ici, on a :

0. Un espace ambiant, de dimension finie (a priori non euclidien)
1. une isomorphisme (canonique) Φ de E^* sur E.
2. On définit alors B, crochet de dualité : $B(f,x) = f(x)$.

En fait $B(f,x) = \langle \Phi(f), x \rangle$.

Orthogonal dual

Comme précédemment

Définition - Orthogonal dual

Soit E un espace vectoriel et A un sous-espace de E.

On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.

Soit C un sous-espace de E^*.

On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

Orthogonal dual

Comme précédemment

Définition - Orthogonal dual

Soit E un espace vectoriel et A un sous-espace de E.

On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.

Soit C un sous-espace de E^*.

On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

Application. Mécanique quantique

Orthogonal dual

Comme précédemment

Définition - Orthogonal dual

Soit E un espace vectoriel et A un sous-espace de E.
On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.
Soit C un sous-espace de E^*.
On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

Application. Mécanique quantique

Exercice On suppose que E est de dimension n. Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de A complétée en $(e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ une base de E.
Donner une caractéristique de A^0 avec les applications e_i^*.
En déduire $\dim A^0$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de H.

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de H.
- Application aux hyperplans affines.

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de H.
- Application aux hyperplans affines.
- Ligne de niveau...

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de H.
- Application aux hyperplans affines.
- Ligne de niveau...
- Distance à hyperplan...

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.
- Alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^T$

Conclusion

Objectifs

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.
- Alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^T$
- Si E non euclidien, on agit sur les forme linéaire $(\ldots)$!

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

$\Rightarrow$ Adjoint d'un endomorphisme

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 40 : Fonctions de plusieurs variables
- Exercice n° 566