Devoir Surveillé n°9

Sujet donné le vendredi 9 mai 2025, 4h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Polynôme générateur associée à une variable aléatoire

Le but de ce devoir est d'exploiter les polynômes générateurs associéss aux variables aléatoires finies afin de faciliter les calculs et donc d'étendre les résultats connus en probabilité.
En seconde année, la méthode est étendus en prenant des polynômes de degré infini, c'est-à-dire des séries (formelles) génératrices ou des séries entières.
Le sujet est composé de quatre parties.
Dans la première, on démontre les résultats essentiels pour les polynômes générateurs.
En deuxième partie, on exploite ces résultats pour étudier une situation aléatoire particulière.
En troisième partie, on étudie une famille particulière de polynômes. Elle sera reprise associée à la nouvelle situation aléatoire étudiée en partie IV.

I . Préliminaires : Polynôme générateur

On fixe $n \in \mathbb{N}$.
On considère un espace de probabilité (fini) $(\Omega, \mathbf{P})$, fixé pour toute cette partie.
A toute variable aléatoire finie U à valeur dans $U(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, on associe le polynôme :

$$S_U = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U = k) X^k$$

I.1. Série de résultat pour une variable aléatoire U.

(a) Que vaut $S_U(1)$, $S'_U(1)$? Justifier votre réponse.

(b) Montrer que l'on a
$$\mathbf{V}(U) = S''_U(1) + S'_U(1)\big(1 - S'_U(1)\big)$$

I.2. Application.

(a) On suppose que U suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec $p \in [0, 1]$.
Que vaut S_U ? Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question 1.

(b) On suppose que U suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (avec $n \geqslant 3$).
Montrer que l'on peut écrire S_U sous la forme d'une (fausse) fraction rationnelle : $S_U = \dfrac{X - X^{n+1}}{n(1 - X)}$.
En exploitant la règle de LHosptial, évaluer $\lim\limits_{t \to 1} S'_U(t)$ et $\lim\limits_{t \to 1} S''_U(t)$.
Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question 1.

I.3. Formule de transfert.

(a) Exprimer, grâce à la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(t^U)$ en fonction de $S_U(t)$.

(b) Que pensez-vous de $t \mapsto \mathbf{E}(Ut^{U-1})$ en fonction de $t \mapsto \mathbf{E}(t^U)$?
Retrouver les formules de la question 1. qui lient $\mathbf{E}(U)$ à S'_U et $\mathbf{V}(U)$ aux dérivées de S_U.

I.4. Suite de variables aléatoires.

On considère une suite de variables aléatoires $U_1, U_2, \dots U_k \dots$ indépendantes. Soit $K \in \mathbb{N}^*$, On note $V_K = \displaystyle\sum_{i=1}^{K} U_i$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $S_{V_K} = \displaystyle\prod_{i=1}^{K} S_{U_i}$
Que se passe-t-il si toutes les variables $U_1, \dots U_K$ suivent une même loi, celle de U ?

(b) Soit N une variable aléatoire fini à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On note $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} U_i$, variable aléatoire dont le nombre de termes additionnés dépend de la variable aléatoire N.
On suppose que toutes les variables $U_1, \dots U_k$ suivent une même loi, celle de U
On dit que $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une suite de variables i.i.d - indépendantes et identiquement distribuées.
Exprimer S_W comme la composition de deux polynômes.

II Application au calcul des valeurs prises par une somme de v.a.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, un entier fixé.

On considère une probabilité μ définie sur $\{1, \dots N\}$ (i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\mu(k) \geqslant 0$) telle que $\mu(1) \in]0, 1[$.

On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ indépendantes et identiquement distribué de loi μ, i.e

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in [\![1, N]\!], \qquad \mathbf{P}(X_n = k) = \mu(k)$$

On définit $M_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$M_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

On note $E = \{M_0, M_1, \dots\} = \{M_k, k \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble aléatoire des valeurs visités par M_n.

II.1. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n, l'évènement « $n \in E$ ».

(a) Que valent $\mathbf{P}(A_0)$ et $\mathbf{P}(A_1)$?

(b) Montrer, très précisément, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k) \mathbf{P}(A_{n-k})$$

(c) En déduire une expression de $\mathbf{P}(A_2)$, en fonction de $\mu(1)$ et de $\mu(2)$

Pour les prochaines questions, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$. On considère la variable aléatoire U à valeurs dans $[\![0, m+N+1]\!]$ tel que :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $k \leqslant m+N$, $\qquad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(A_k)$.

— pour $k = m+N+1$, $\qquad \mathbf{P}(U = m+N+1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{m+N} \mathbf{P}(A_k)$

On dit que U est une variable aléatoire tronquée.

Comme en première partie, on définit $S_U = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+N+1} \mathbf{P}(U = k) X^k$, le polynôme générateur associé U.

On note également $S_\mu = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k) X^k$, le polynôme générateur (identique) de chacune des variables aléatoires X_i

II.2. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S_\mu \times S_U = S_U + X^{m+N} Q - 1$

II.3. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 - S_\mu}$ admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles éventuels sont de module strictement supérieur à 1.

II.4. (**)En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1 - S_\mu}$ établir que $\mathbf{P}(A_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.

On pourra démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\exists\, Q_z \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\dfrac{1}{\left(1 - \frac{X}{z}\right)^k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m+N} \binom{k+i-1}{i} \frac{1}{z^i} X^i + \frac{X^{m+N}}{\left(1 - \frac{X}{z}\right)^k} Q_z$

III . Famille de polynômes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, XX^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n} X(1-X)P' + XP$$

III.1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.2. Exprimer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de φ.

III.3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.

III.4. Donner une base de $\mathrm{Ker}\varphi$.

On pourra chercher, pour $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, $\mathcal{Z}_P$ l'ensemble des racines de P, puis $\deg P$.

III.5. On cherche à résoudre l'équation propre associé à φ, elle est paramétrée par λ et elle est d'inconnue $P \in E$:

$$\varphi(P) = \lambda P \qquad\qquad (E_\lambda)$$

(a) Donner, sans calcul supplémentaire, les solutions de (E_0).

(b) Résoudre (E_1)

(c) Résoudre l'équation (E_λ), pour $\lambda \notin \{0, 1\}$.

III.6. On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T_k = X^k (1-X)^{n-k}$

(a) Evaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$

(b) Montrer, de même que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, X^ℓ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, (combinaison linéaire que l'on explicitera).

(c) En déduire que $\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots T_n)$ est une base de E.

(d) Ecrire la matrice B de φ dans la base $\mathcal{T}$

(e) Expliciter des matrices P et Q telles que $A = P \times B \times Q$. Quelle relation simple existe-t-il entre P et Q ?

III.7. On chercher à décomposer $\dfrac{1}{T_k}$ en éléments simples. Pour cela nous allons procéder d'une façon un peu originale.

(a) Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$

(b) Donner l'expression (en fonction de U) d'un polynôme W tel que $\dfrac{1}{T_k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{[V]_{k-j}}{X^j} + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{[W]_{n-k-j}}{(1-X)^j}$..

(c) Application : donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^4(1-X)^3}$.

IV . Application 2 : Tirage de boules colorées

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules de n couleurs différentes, indiscernable au toucher.
On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega; \mathbf{P})$.
On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules distinctes qui ont été tirées lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose $Y_0 = 0$.

IV.1. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k, la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène une nouvelle couleur i.e. une boule qui n'a pas été tirée lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarque en particulier que $Z_1 = 1$.

(a) Déterminer la loi de Z_2

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbf{P}_{[Y_k = j]}([Z_{k+1} = 1])$.
En déduire $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)$ puis $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}([Z_j = 1])$

(c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

(d) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

IV.2. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k (plutôt que S_{Y_k}) le polynôme générateur associé à Y_k :

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_n = i) X^i = \mathbf{E}(X^{Y_n})$$

(a) Déterminer les polynômes S_0, S_1 et S_2.

(b) Montrer, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}([Y_k = i-1])$$

(c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)S_k' + XS_k$$

(d) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \varphi^k(S_0)$, où φ a été définie en partie III

IV.3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $S_k(1)$ et $S_k'(1)$.

(b) Retrouver alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ obtenue en question 1.(e)

(c) Calculer et interpréter $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}(Y_k)$ et $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \mathbf{E}(Y_k)$.

IV.4. (a) En exploitant les résultats obtenus en partie III, ou bien en faisant directement le calcul, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi^k(T_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k T_j$$

(b) En déduire, à l'aide de la formule trouvée en III.6.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

(c) Montrer, finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

Correction du DS 9

I . Préliminaires : Polynôme générateur

On fixe $n \in \mathbb{N}$.
On considère un espace de probabilité (fini) $(\Omega, \mathbf{P})$, fixé pour toute cette partie.
A toute variable aléatoire finie U à valeur dans $U(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, on associe le polynôme :

$$S_U = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U = k) X^k$$

I.1. Série de résultat pour une variable aléatoire U.

(a) Que vaut $S_U(1)$, $S_U'(1)$? Justifier votre réponse.

Comme U_k est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$,

$$\boxed{S_U(1) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U = k) = 1}$$

Puis $S_U'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(U = k) X^{k-1}$ et donc

$$\boxed{S_U'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(U)}$$

(b) Montrer que l'on a

$$\mathbf{V}(U) = S_U''(1) + S_U'(1)\big(1 - S_U'(1)\big)$$

S_U est un polynôme, donc bien évidemment dérivable : $S_U'' = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U = k) X^{k-2}$.

Et donc

$$S_U''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U = k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(U_k) = \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbf{P}(U = k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(U = k) = \mathbf{E}(U^2) - \mathbf{E}(U)$$

On a donc (tenant compte du résultat de la question précédente) :

$$\boxed{S_U''(1) + S_U'(1)\big(1 - S_U'(1)\big) = \mathbf{E}(U^2) - \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(U)(1 - \mathbf{E}(U)) = \mathbf{E}(U^2) - [\mathbf{E}(U)]^2 = \mathbf{V}(U)}$$

I.2. Application.

(a) On suppose que U suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec $p \in [0, 1]$.
Que vaut S_U ? Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question 1.

On a donc $U(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in U(\Omega)$, $\mathbf{P}(U = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,

donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{S_U = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} X^k = (pX + (1-p))^n}$$

Et en particulier $S_U' = np(pX + (1-p))^{n-1}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = S_U'(1) = np(p + (1-p))^{n-1} = np}$$

Puis, $S_U'' = n(n-1)p^2(pX + (1-p))^{n-2}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{V}(U) = S_U''(1) + S_U'(1)\big(1 - S_U'(1)\big) = n(n-1)p^2 + np(1 - np) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)}$$

(b) On suppose que U suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (avec $n \geqslant 3$).
Montrer que l'on peut écrire S_U sous la forme d'une (fausse) fraction rationnelle : $S_U = \dfrac{X - X^{n+1}}{n(1-X)}$.
En exploitant la formule de LHosptial, évaluer $\lim\limits_{t\to 1} S'_U(t)$ et $\lim\limits_{t\to 1} S''_U(t)$.
Retrouver les valeurs de $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{V}(U)$ en exploitant les calculs de la question 1.

On a donc $U(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in U(\Omega)$, $\mathbf{P}(U=k) = \dfrac{1}{n}$, donc

$$\boxed{S_U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} X^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X^k = \frac{1}{n}\frac{X - X^{n+1}}{1-X}}$$

Et en particulier $S'_U = \dfrac{1}{n}\dfrac{(1-(n+1)X^n)(1-X) + (X - X^{n+1})}{(1-X)^2} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1-(n+1)X^n + nX^{n+1}}{(1-X)^2}$.
Le numérateur $n_1 : t \mapsto 1 - (n+1)t^n + nt^{n+1}$ admet pour dérivées

- $n'_1 : t \mapsto -n(n+1)t^{n-1} + n(n+1)t^n$ donc $n'_1(1) = 0$,
- $n''_1 : t \mapsto -(n-1)n(n+1)t^{n-2} + n^2(n+1)t^{n-1}$, donc $n''_1(1) = n(n+1)[n-(n-1)] = n(n+1)$

Le dénominateur $d_1 : t \mapsto (1-t)^2$ admet pour dérivées

- $d'_1 : t \mapsto -2(1-t)$ donc $d'_1(1) = 0$,
- $d''_1 : t \mapsto 2$, donc $d''_1(1) = 2$ Ainsi, comme S'_U est en réalité un polynôme S'_U est continue et avec la règle de Lhospital :

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = S'_U(1) = \frac{1}{n}\lim_{t\to 1}\frac{n_1(t)}{d_1(t)} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}}$$

Puis

$$\begin{aligned} S''_U &= \frac{1}{n}\frac{(-(n+1)nX^{n-1} + n(n+1)X^n)(1-X) + 2(1-(n+1)X^n + nX^{n+1})}{(1-X)^3} \\ &= \frac{1}{n}\frac{2 - n(n+1)X^{n-1} + 2(n-1)(n+1)X^n - n(n-1)X^{n+1}}{(1-X)^3} \end{aligned}$$

Le numérateur $n_2 : t \mapsto 2 - n(n+1)t^{n-1} + 2(n-1)(n+1)t^n - n(n-1)t^{n+1}$ admet pour dérivées

- $n'_2 : t \mapsto -(n-1)n(n+1)t^{n-2} + 2(n-1)n(n+1)t^{n-1} - (n-1)n(n+1)t^n$ donc $n'_2(1) = 0$,
- $n''_2 : t \mapsto -(n-2)(n-1)n(n+1)t^{n-3} + 2(n-1)^2 n(n+1)t^{n-2} - (n-1)n^2(n+1)t^{n-1}$,
  donc $n''_2(1) = (n-1)n(n+1)[-(n-2) + 2(n-1) - n] = 0$
- $n'''_2 : t \mapsto -(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)t^{n-4} + 2(n-2)(n-1)^2 n(n+1)t^{n-3} - (n-1)^2 n^2(n+1)t^{n-2}$,
  donc $n'''_2(1) = (n-1)n(n+1)[-(n-3)(n-2) + 2(n-2)(n-1) - (n-1)n] = (n-1)n(n+1)[-2]$

Le dénominateur $d_2 : t \mapsto (1-t)^3$ admet pour dérivées

- $d'_2 : t \mapsto -3(1-t)^2$ donc $d'_2(1) = 0$,
- $d''_2 : t \mapsto 6(1-t)$, donc $d''_2(1) = 0$,
- $d'''_2 : t \mapsto -6$, donc $d'''_2(1) = -6$.

Ainsi, comme S''_U est en réalité un polynôme S''_U est continue et avec la règle de Lhospital :

$$S''_U(1) = \frac{1}{n}\lim_{t\to 1}\frac{n_2(t)}{d_2(t)} = \frac{-2(n-1)n(n+1))}{6n} = \frac{n^2-1}{3}$$

$$\boxed{\mathbf{V}(U) = S''_U(1) + S'_U(1)\big(1 - S'_U(1)\big) = \frac{(n-1)(n+1)}{3} + \frac{n+1}{2}\frac{1-n}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{12}}$$

I.3. Formule de transfert.

(a) Exprimer, grâce à la formule de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(t^U)$ en fonction de $S_U(t)$.

La formule de transfert donne

$$\boxed{\mathbf{E}(t^U) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U=k)t^k = S_U(t)}$$

(b) Que pensez-vous de $t \mapsto \mathbf{E}(Ut^{U-1})$ en fonction de $t \mapsto \mathbf{E}(t^U)$?
Retrouver les formules de la question 1. qui lient $\mathbf{E}(U)$ à S'_U et $\mathbf{V}(U)$ aux dérivées de S_U.

Si on note, $g : t \mapsto \mathbf{E}(t^U) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(U=k)t^k$, g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynome)

et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(U=k)t^{k-1} = \mathbf{E}(Ut^{U-1})$. On retrouve la dérivée $g'(t) = \mathbf{E}\left(\dfrac{\partial t^U}{\partial t}\right)$, car $\mathbf{E}$ est linéaire.
Et donc de même $g''(t) = \mathbf{E}(U(U-1)t^{U-2})$.
Ainsi en $t = 1$, on trouve :

$$\boxed{\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(U \times 1^{U-1}) = g'(1) = S'_U(1) \qquad \mathbf{E}(U(U-1)) = \mathbf{E}(U(U-1)\times 1^{U-2}) = g''(1) = S''_U(1)}$$

I.4. Suite de variables aléatoires.

On considère une suite de variables aléatoires $U_1, U_2, \dots U_k \dots$ indépendantes. Soit $K \in \mathbb{N}^*$, On note $V_K = \sum_{i=1}^{K} U_i$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $S_{V_K} = \prod_{i=1}^{K} S_{U_i}$

Que se passe-t-il si toutes les variables $U_1, \dots U_K$ suivent une même loi, celle de U ?

Montrons le résultat par récurrence.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$: « $S_{V_k} = S_{U_1} \times S_{U_2} \times \cdots \times S_{U_k}$ ».
— Si $k = 1$, alors $V_1 = U_1$ et le résultat est immédiat.
— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
Considérons $V_{k+1} = U_1 + U_2 + \cdots + U_k + U_{k+1} = V_k + U_{k+1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $\mathbb{N}$ est stable par addition).
Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$[V_{k+1} = j] = [V_k + U_{k+1} = j]$$

On a donc, en exploitant le système complet d'événement $([U_{k+1} = i])_{i \in \mathbb{N}_n}$ (car U_{k+1} est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}_n$) et la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(V_{k+1} = j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(U_{k+1} = i) \times \mathbf{P}_{U_{k+1}=i}(V_{k+1} = j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(U_{k+1} = i) \times \mathbf{P}_{U_{k+1}=i}(V_k = j - i)$$

Or les variables aléatoires $(U_1, \dots U_k, U_{k+1})$ sont indépendantes,

donc d'après le lemme des coalitions $V_k = \sum_{i=1}^{k} U_i$ et U_{k+1} sont indépendants.

Ainsi :

$$\mathbf{P}(V_{k+1} = j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(U_{k+1} = i) \times \mathbf{P}(V_k = j - i) = \sum_{i=0}^{j} \mathbf{P}(U_{k+1} = i) \times \mathbf{P}(V_k = j - i)$$

La somme s'arrête pour $i = j$, car $V_k \geqslant 0$, donc si $j - i < 0$, alors $\mathbf{P}(V_k = j - i) = 0$.
On reconnait le produit de Cauchy :

$$S_{U_{k+1}} \times S_{V_k} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \mathbf{P}(U_{k+1} = i)\mathbf{P}(V_k = j - i) \right) X^j = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(V_{k+1} = j) X^j = S_{V_{k+1}}$$

Puis, comme $\mathcal{P}_k$ est vraie : $S_{V_k} = \prod_{i=1}^{k} S_{U_i}$; et donc $S_{V_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k+1} S_{U_i}$ et ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée :

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{V_k} = \prod_{i=1}^{k} S_{U_i}}$$

Si pour tout i U_i suit la même loi que U, alors $S_{U_i} = S_U$ et donc

$$\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{V_k} = (S_U)^k}$$

(b) Soit N une variable aléatoire fini à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On note $W = \sum_{i=1}^{N} U_i$, variable aléatoire dont le nombre de termes additionnés dépend de la variable aléatoire N.
On suppose que toutes les variables $U_1, \dots U_k$ suivent une même loi, celle de U
On dit que $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est une suite de variables i.i.d - indépendantes et identiquement distribuées.
Exprimer S_W comme la composition de deux polynômes.

W est toujours à valeurs dans $\mathbb{N}$ (et fini), donc S_W est bien définie comme polynôme (la somme est en réalité fini) : $S_W = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W = k) X^k$.
N est une variable aléatoire fini, avec $N(\Omega) = [\![0, M]\!]$. On applique la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(W = k) = \sum_{m=0}^{M} \mathbf{P}(N = m) \mathbf{P}_{N=m}(W = k)$$

Or on a déjà calculé à la question précédente : $\mathbf{P}_{N=m}(W=k)=\mathbf{P}(U_1+\cdots+U_m=k)=\mathbf{P}(V_m=k)$

$$\begin{aligned} S_W = & \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(W=k)X^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{M}\mathbf{P}(N=m)\mathbf{P}(V_m=k)\right)X^k \\ = & \sum_{m=0}^{M}\left(\mathbf{P}(N=m)\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(V_m=k)X^k\right)=\sum_{m=0}^{M}\left(\mathbf{P}(N=m)S_{V_m}(X)\right) \\ = & \sum_{m=0}^{M}\mathbf{P}(N=m)[S_U(X)]^m=S_N(S_U(X)) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_W=S_N\circ S_U}$$

II Application au calcul des valeurs prises par une somme de v.a.

Soit $N\in\mathbb{N}^*$, un entier fixé.

On considère une probabilité μ définie sur $\{1,\dots N\}$ (i.e. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mu(k)=1$ et pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $\mu(k)\geqslant 0$) telle que $\mu(1)\in]0,1[$.

On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et identiquement distribué de loi μ, i.e

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\forall\, k\in[\![1,N]\!],\qquad \mathbf{P}(X_n=k)=\mu(k)$$

On définit $M_0=0$ et pour $n\geqslant 1$,

$$M_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

On note $E=\{M_0,M_1,\dots\}=\{M_k,k\in\mathbb{N}\}$, l'ensemble aléatoire des valeurs visités par M_n.

II.1. On note pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, A_n, l'évènement « $n\in E$ ».

(a) Que valent $\mathbf{P}(A_0)$ et $\mathbf{P}(A_1)$?

Par définition de E, $M_0\in E$ mais $\mathbf{P}(M_0=0)=1$, donc assurément $0\in E$ et donc

$$\boxed{\mathbf{P}(A_0)=1}$$

Comme X_k est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors $M_{k+1}=M_k+X_k>M_k$.

La suite (aléatoire) (M_k) est donc strictement croissante et donc $M_1>M_0=0$, donc $M_1\geqslant 1$.

Et finalement on a les équivalences : $1\in E\iff M_1=1\iff X_1=1$.

Or par hypothèse $\mathbf{P}(X_1=1)=\mu(1)$.

$$\boxed{\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(X_1=1)=\mu(1)}$$

(b) Montrer, très précisément, que pour tout $n\geqslant 1$,

$$\mathbf{P}(A_n)=\sum_{k=1}^{N}\mu(k)\mathbf{P}(A_{n-k})$$

Soit $n\geqslant 1$. On a l'égalité ou l'équivalence des événements suivants :

$$\begin{aligned} A_n \iff & \ \exists\, k\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } M_k=\sum_{i=1}^{k}X_i=n \\ \iff & \ X_1=n \text{ ou } \exists\, k\in\mathbb{N}^*,\exists\, t\in[\![1,N]\!] \text{ tels que } M_{k-1}=n-t \text{ et } X_k=t \\ \iff & \ \exists\, t\in[\![1,N]\!],\exists\, k\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } M_{k-1}=n-t \text{ et } X_k=t \qquad \text{la somme vide vaut } 0 \\ \iff & \ \biguplus_{t=1}^{N}\left[\exists\, k\in\mathbb{N}^*\mid M_{k-1}=n-t\cap X_k=t\right]\iff\biguplus_{t=1}^{N}\Big(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}[M_{k-1}=n-t\cap X_k=t]\Big) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) = & \ \mathbf{P}\left(\biguplus_{t=1}^{N}\Big(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}[M_{k-1}=n-t\cap X_k=t]\Big)\right) \\ = & \sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}[M_{k-1}=n-t\cap X_k=t]\right)=\sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}[M_{k-1}=n-t\right)\mathbf{P}(X_k=t) \end{aligned}$$

car $M_{k-1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}X_i$ et X_k sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) = & \sum_{t=1}^{N}\mathbf{P}\left(\biguplus_{k\in\mathbb{N}^*}[M_{k-1}=n-t\right)\mu(t) \\ & =\sum_{t=1}^{n}\mu(t)\mathbf{P}\left(\left[\exists\, k\in\mathbb{N}^*\mid M_{k-1}=n-t\right]\right)=\sum_{t=1}^{n}\mu(t)\mathbf{P}(A_{n-t}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbf{P}(A_{n-k})}$$

(c) En déduire une expression de $\mathbf{P}(A_2)$, en fonction de $\mu(1)$ et de $\mu(2)$.

D'après la formule précédente,

$$\boxed{\mathbf{P}(A_2) = \sum_{k=1}^{N} \mu(k)\mathbf{P}(A_{2-k}) = \mu(1)\mathbf{P}(A_1) + \mu(2)\mathbf{P}(A_0) = \mu(1)^2 + \mu(2)}$$

(Pour aller en 2, il faut faire deux bons de 1 ou un bond de 2...).

Pour les prochaines questions, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$. On considère la variable aléatoire U à valeurs dans $[\![0, m+N+1]\!]$ tel que :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $k \leqslant m+N$, $\qquad \mathbf{P}(U = k) = \mathbf{P}(A_k)$.

— pour $k = m+N+1$, $\qquad \mathbf{P}(U = m+N+1) = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{m+N} \mathbf{P}(A_k)$

On dit que U est une variable aléatoire tronquée.

Comme en première partie, on définit $S_U = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+N+1} \mathbf{P}(U = k)X^k$, le polynôme générateur associé U.

On note également $S_\mu = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k)X^k$, le polynôme générateur (identique) de chacune des variables aléatoires X_i

II.2. Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S_\mu \times S_U = S_U + X^{m+N}Q - 1$

On multiplie deux polynômes, on exploite la formule du produit de Cauchy.
Pour faciliter la formalisation de la formule, on ajoutera les termes $\mu(0) = 0$ et $\mathbf{P}(U = h) = 0$ si $h > m+N+2$:

$$S_\mu \times S_U = \left(\sum_{k=0}^{N} \mu(k)X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{m+N+1} \mathbf{P}(U = k)X^k\right) = \sum_{k=0}^{m+2N+1} \left(\sum_{i=0}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(U = k-i)\right) X^k$$

Or, si $k \leqslant m+N$, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $k - i \leqslant m$ et donc $\mathbf{P}(U = k-i) = \mathbf{P}(A_{k-i})$.
Donc il existe un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$S_\mu \times S_U = \sum_{k=0}^{m+N} \left(\sum_{i=0}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(A_{k-i})\right) X^k + X^{m+N}Q_1$$

Or comme $\mu(0) = 0$, $[S_\mu \times S_U]_0 = 0$ et donc on trouve :

$$S_\mu \times S_U = \sum_{k=1}^{m+N} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu(i)\mathbf{P}(A_{k-i})\right) X^k + X^{m+N}Q_1 = \sum_{k=1}^{m+N} \mathbf{P}(A_k)X^k + X^{m+N}Q_1$$

d'après la formule trouvée II.1.(b). Comme $\mathbf{P}(A_0) = 1$, $S_U = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{m+N} \mathbf{P}(A_k)X^k + \mathbf{P}(U = n+M+1)X^{n+M+1}$, on a :

$$S_\mu \times S_U = S_U - 1 + X^{m+N}(Q_1 - X\mathbf{P}(U = n+M+1)$$

Bilan

$$\boxed{\exists\ Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } S_\mu \times S_U = -1 + S_U + X^{m+N}Q}$$

II.3. Montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1 - S_\mu}$ admet un pôle simple en 1 et que les autres pôles éventuels sont de module strictement supérieur à 1.

On note $F = \dfrac{1}{1 - S_\mu}$.

$S_\mu(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k) = 1$, donc 1 est bien un pôle de la fraction F.

$S'_\mu(1) = \mathbf{E}(\mu) = \mu(1) + 2\mu(2) + \ldots N\mu(N) \geqslant \mu(1) + 2\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \mu(k)\right) = \mu(1) + 2(1 - \mu(1)) = 2 - \mu(1) > 1$ car $\mu(1) < 1$.

Donc 1 n'est pas un pôle double de F.
Si z est un autre pôle de F, alors $S_\mu(z) = 1$,

pour montrer que $|z|>1$, on va montrer par contraposée que pour tout z tel que $|z|<1$, alors $|S_\mu(z)|<1$.
Soit $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$ (on rappelle que $\mu(k)\geqslant 0$).

$$|S_\mu(z)|=\left|\sum_{k=1}^{N}\mu(k)z^k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{N}\mu(k)|z|^k\leqslant|z|\left(\sum_{k=1}^{N}\mu(k)\right)\leqslant|z|<1$$

II.4. (**)En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-S_\mu}$ établir que $\mathbf{P}(A_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.
On pourra démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\exists\, Q_z\in\mathbb{C}[X]$ tel que $\dfrac{1}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k}=\displaystyle\sum_{i=0}^{m+N}\binom{k+i-1}{i}\frac{1}{z^i}X^i+\frac{X^{m+N}}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k}Q_z$

D'après la question 2, $1-X^{n+M}Q=S_U(1-S_\mu)$, donc dans $\mathbb{K}(X)$:

$$S_U=\frac{1}{1-S_\mu}-\frac{X^{n+M}Q}{1-S_\mu}$$

La fraction $F=\dfrac{1}{1-S_\mu}$ admet 1 pour pôle simple et $z_1,\dots z_r$ pour pôle d'ordre $k_1\dots k_r$ respectivement (r nous est inconnu, ainsi que les nombres z_i et les ordres k_i).
Nous savons une seule chose : pour tout $i\in\mathbb{N}_r$, $|z_i|>1$.
La décomposition en éléments simples de F donne :

$$F=\frac{a}{X-1}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{b_{i,j}}{(X-z_i)^j}=\frac{a}{X-1}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}\frac{b_{i,j}}{(\frac{X}{z_i}-1)^j}$$

On sait, d'après une formule du cours que $a=\dfrac{1}{(1-S_\mu)'(1)}=\dfrac{1}{-S_\mu'(1)}=\dfrac{-1}{\mathbf{E}(X_1)}$ d'après la partie précédente.

On se souvient également (par téléscopage) que $(1-X)\displaystyle\sum_{i=0}^{m+N}X^i=1-X^{n+M+1}$, donc dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X-1}=\frac{-1}{1-X}=-\sum_{i=0}^{m+N}X^i+\frac{X^{n+M+1}}{1-X}$$

Puis, la formule du binôme négative donne de la même manière pour tout z_i, $\exists\, Q_i\in\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\frac{1}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k}=\sum_{i=0}^{m+N}\binom{k+i-1}{i}\frac{1}{z^i}X^i+\frac{X^{m+N}}{\left(1-\frac{X}{z}\right)^k}Q_z$$

(On pourrait la démontrer formellement, par récurrence) On trouve donc :

$$S_U=\frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}\sum_{i=0}^{n+M}X^i+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}(-1)^jb_{i,j}\sum_{k=0}^{m+N}\binom{j+k-1}{k}\frac{1}{z^k}X^k+X^{m+N}\overline{F}$$

où $\overline{F}$ est une fraction rationnelle, on peut alors identifier !!

$$[S_U]_n=\mathbf{P}([U=n])=\mathbf{P}(A_n)=\frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1}{z_i^j}(-1)^jb_{i,j}\binom{j+n-1}{n}\frac{1}{z^n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

car pour tout i, $|z_i|>1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, }\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n)=\frac{1}{\mathbf{E}(X_1)}}$$

III . Famille de polynômes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B}=(1,XX^2,\dots,X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P)=\frac{1}{n}X(1-X)P'+XP$$

III.1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.

φ est linéaire.

En effet, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in E$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \frac{1}{n}X(1-X)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' + X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\
&= \frac{1}{n}X(1-X)(\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') + X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\
&= \lambda_1 \left[\frac{1}{n}X(1-X)P_1' + XP_1\right] + \lambda_2 \left[\frac{1}{n}X(1-X)P_2' + XP_2\right] = \lambda_1\varphi(P_1) + \lambda_2\varphi(P_2)
\end{aligned}$$

Plus compliqué : Φ est une application de E **dans** E.

Supposons que $\deg P = k \leqslant n$ et que le terme dominant de P est $a_k X^k$,

Le terme de P' est $ka_k X^{k-1}$, puis celui de $\frac{1}{n}X(1-X)P'$ est $\frac{-ka_k}{n}X^{k+1}$.

Le terme dominant de XP est $a_k X^{k+1}$.

Si, il ne s'annule pas, le terme dominant de $\varphi(P)$ est alors $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k X^{k+1}$

De deux choses, l'une :

Ou bien $k < n$ et donc le terme dominant de $\varphi(P)$ est $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k X^{k+1}$, donc $\deg P = k+1 \leqslant n$

Ou bien $k = n$ et donc le coefficient $\left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k = 0$ et $\deg P \leqslant k = n$.

Donc $\deg P \leqslant n$ et $P \in E$

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

III.2. Exprimer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de φ.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(X^k) = \dfrac{k}{n}\left(X^k - X^{k+1}\right) + X^{k+1} = \dfrac{n-k}{n}X^{k+1} + \dfrac{k}{n}X^k$,

on vérifier que $\varphi(X^n) = X^n$, Ce qui conduit à la matrice suivante (en mettant $\frac{1}{n}$ en facteur) :

$$\boxed{A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}}$$

La première ligne de A (<u>de taille $n+1$</u>) est nulle, donc son rang est inférieur à $(n+1) - 1 = n$.

Par ailleurs, la matrice extraite en enlevant la première ligne et la première est triangulaire inférieure,

il s'agit de $\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n-1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, elle n'a aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible.

Par ailleurs, elle est de taille n, donc elle est de rang n.

Comme il existe, une matrice extraite de A de rang n, on a $\mathrm{rg}(A) \geqslant n$.

$$\boxed{\text{Par double inégalité } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi) = n.}$$

III.3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.

Puisque $\mathrm{rg}(\varphi) = n$, alors que φ est un endomorphisme de E, de dimension $n+1$,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injectif.}}$$

III.4. Donner une base de $\mathrm{Ker}\varphi$.

On pourra chercher, pour $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, $\mathcal{Z}_P$ l'ensemble des racines de P, puis $\deg P$.

Le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Ker}\varphi) = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi) = n + 1 - n = 1$.

On a les équivalences :

$$P \in \mathrm{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP = 0 \Longleftrightarrow (X-1)P' = nP$$

On en déduire (condition nécessaire) que si $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, alors $X - 1$ divise P et donc 1 est une racine de P.

Notons alors a l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de P : $\exists\, Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)^a Q$ avec $Q(1) \neq 0$.

On a alors $P' = a(X-1)^{a-1}Q + (X-1)^a Q'$ et donc

$$(X-1)P' - nP = a(X-1)^a Q + (X-1)^{a+1}Q' - n(X-1)^a Q = (X-1)^a[(a-n)Q + (X-1)Q']$$

Ce polynôme étant nul, nécessairement, $(a-n)Q+(X-1)Q'$ est le polynôme nul,
et en particulier en substituant 1 à X : $(a-n)Q(1)+0=0$.
Or $Q(1)\neq 0$, donc $a=n$. Et, nécessairement, $P=\lambda(X-1)^n$ ($\lambda\in\mathbb{R}$).
Réciproquement, si $P=\lambda(X-1)^n$ alors : $\varphi(P)=\dfrac{1}{n}\lambda nX(1-X)(X-1)^{n-1}+\lambda X(X-1)^n=0$.

$$\boxed{\text{Ker}\varphi=\text{vect}\big((X-1)^n\big)}$$

III.5. On cherche à résoudre l'équation propre associé à φ, elle est paramétrée par λ et elle est d'inconnue $P\in E$:

$$\varphi(P)=\lambda P \qquad\qquad (E_\lambda)$$

(a) Donner, sans calcul supplémentaire, les solutions de (E_0).

Les solutions de $(E_0$ sont les solutions de $\varphi(P)=0$, donc exactement les éléments de Kerφ.

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_0}=\text{Ker}\varphi=\text{vect}\big((X-1)^n\big)}$$

(b) Résoudre (E_1)

On cherche P tel que $\varphi(P)=\dfrac{1}{n}X(1-X)P'+XP=P$, donc $n(X-1)P=X(X-1)P'$.
Comme, précédemment, on a donc $nP=XP'$ et donc $X|P$.
Notons alors a l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P : $\exists\ Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=X^aQ$ avec $Q(0)\neq 0$.
On a alors $P'=aX^{a-1}Q+X^aQ'$ et donc

$$XP'-nP=aX^aQ+X^{a+1}Q'-nX^aQ=X^a[(a-n)Q+XQ']$$

Ce polynôme étant nul, nécessairement, $(a-n)Q+XQ'$ est le polynôme nul,
et en particulier en substituant 0 à X : $(a-n)Q(0)+0=0$.
Or $Q(0)\neq 0$, donc $a=n$. Et, nécessairement, $P=\lambda X^n$ ($\lambda\in\mathbb{R}$).
Réciproquement, si $P=\lambda X^n$ alors : $\varphi(P)=\dfrac{1}{n}\lambda nX(1-X)X^{n-1}+\lambda X^{n+1}=\lambda X^n-\lambda X^{n+1}+\lambda X^{n+1}=P$.

$$\boxed{\mathcal{S}_{E_1}=\text{vect}\big(X^n\big)}$$

(c) Résoudre l'équation (E_λ), pour $\lambda\notin\{0,1\}$.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et P solution de $\varphi(P)=\lambda P$, on a donc $\varphi(P)=\dfrac{1}{n}X(1-X)P'+XP=\lambda P$.
Ainsi, $n(X-\lambda)P=X(X-1)P'$, donc $X\big|(X-\lambda)P$ et $(X-1)\big|(X-\lambda)P$.
Puis comme $\lambda\notin\{0,1\}$, $(X-\lambda)\wedge X=1$ et $(X-\lambda)\wedge(X-1)=1$.
Ainsi, d'après le lemme de Gauss : $X|P$ et $(X-1)|P$.
On note a et $b\geqslant 1$ les multiplicités de 0 et 1 respectivement comme racine de P.
Il existe donc $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0)\neq 0$ et $Q(1)\neq 0$ tel que $P=X^a(X-1)^bQ$, avec $a+b\leqslant n$.
On a alors $P'=aX^{a-1}(X-1)^bQ+bX^a(X-1)^{b-1}Q+X^a(X-1)^bQ'$.
En réi-njectant cette relation dans (E_λ) :

$$n(X-\lambda)X^a(X-1)^bQ=aX^a(X-1)^{b+1}Q+bX^{a+1}(X-1)^bQ+X^{a+1}(X-1)^{b+1}Q'=X^a(X-1)^b\big(a(X-1)Q+bXQ+X(X-1)Q'\big)$$

Par régularité de $\mathbb{R}[X]$:

$$n(X-\lambda)Q=Q(a(X-1)+bX)+X(X-1)Q'$$

En substituant 0 (respectivement) à la place de X, on a les deux équations :

$$-n\lambda Q(0)=-aQ(0) \qquad \text{et} \qquad n(1-\lambda)Q(1)=bQ(1)$$

Or $Q(0)\neq 0$ et $Q(1)\neq 0$, donc $a=n\lambda$ et $b=n(1-\lambda)$ donc $a+b=n$.
Par ailleurs, on a vu que $a,b\in\mathbb{N}^*$, donc $a,b[\![1,n-1]\!]$ et $\lambda=\frac{a}{n}$ ($b=n-a$).
On a ainsi trouvé une condition sur λ pour que (E_λ) admette des solutions non nuilles.
Faisons le calcul réciproque, en prenant $a\in[\![1,n-1]\!]$ puis $P_a=X^a(X-1)^{n-a}$
donc $P_a'=aX^{a-1}(X-1)^{n-a}+(n-a)X^a(X-1)^{n-a-1}$, on trouve

$$\Phi(P_a)=\frac{1}{n}[-aX^a(X-1)^{n-a+1}+(a-n)X^{a+1}(X-1)^{n-a}]+X^{a+1}(X-1)^{n-a}=\frac{1}{n}X^a(X-1)^{n-a}[-a(X-1)+(a-n)X+nX]=\frac{a}{n}P_a$$

Ainsi, en reprenant les deux questions précédentes,

$$\boxed{\text{l'équation } (E_\lambda) \text{ n'admet de solutions non nulles que pour } \lambda\in\{\tfrac{k}{n},k\in[\![0,n]\!]\} \text{ et } \mathcal{S}_\lambda=\text{vect}(X^k(X-1)^{n-k}).}$$

III.6. On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T_k = X^k(1-X)^{n-k}$

(a) Evaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$

En appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = \big(X + (1-X)\big)^n = 1^n = 1}$$

(b) Montrer, de même que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, X^ℓ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, (combinaison linéaire que l'on explicitera).

Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$, en appliquant *astucieusement* le binôme de Newton :

$$X^\ell = X^\ell \times 1^{n-\ell} = X^\ell \big(X + (1-X)\big)^{n-\ell} = X^\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} X^{n-\ell-k}(1-X)^k = \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} X^{n-k}(1-X)^k$$

$$\boxed{X^\ell = \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} T_{n-k} = \sum_{h=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{n-h} T_h = \sum_{h=\ell}^{n} \binom{n-\ell}{h-\ell} T_h}$$

où l'on a fait le changement de variable $h = n - k$

(c) En déduire que $\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots T_n)$ est une base de E.

Ainsi, tout vecteur $X^i \in \operatorname{vect}\mathcal{T}$, donc $E = \operatorname{vect}(\mathcal{B}) \subset \operatorname{vect}\mathcal{T}$.
L'inclusion réciproque est évidente, puisque E est un espace vectoriel contenant tous les T_k.
Ainsi $E = \operatorname{vect}\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est une famille génératrice de E.
Cette famille est composée de $n+1 = \dim E$ vecteurs. C'est donc une famille génératrice minimale de E

$$\boxed{\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots T_n) \text{ est une base de } E.}$$

(d) Ecrire la matrice B de φ dans la base $\mathcal{T}$.

D'après les questions 5, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(T_k) = \dfrac{k}{n} T_k$, et donc

$$\boxed{B = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\varphi) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}}.$$

(e) Expliciter des matrices P et Q telles que $A = P \times B \times Q$. Quelle relation simple existe-t-il entre P et Q ?

Merci Antoine, d'avoir inspiré cette question !

Comme A et B sont semblables, puisque toutes les deux sont des matrices du même endomorphisme φ, on attend ici la formule du changement de bases.
Si on note alors $P = \mathcal{M}_{\mathcal{T},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, matrice des composantes de $\mathcal{T}$, dans la base $\mathcal{B}$,
et $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(\mathrm{id})$, matrice des composantes de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{T}$, on a :

- $P \times Q = Q \times P = I_{n+1}$, ce sont les matrices inverses l'une de l'autre.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathcal{M}_{\mathcal{T},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \times \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(\varphi) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{T}}(\mathrm{id})$ et donc $A = P \times B \times Q$
- $P = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ -\binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ (-1)^n \binom{n}{n} & \cdots & \cdots & \binom{0}{0} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \binom{n}{n} & \cdots & \cdots & \binom{0}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ n & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 & 0 \\ n & & 2 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(On retrouve le triangle de à partir de la pointe du bas à droite)

Puisque $T_k = X^k(1-X)^{n-k} = X^k \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i}(-1)^i X^i (1)^{n-k-i} = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i X^{i+k} = \sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\binom{n-k}{j-k}X^j$

Ainsi $T_0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} X^j$, $T_1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n-1}{j-1}X^j \ldots$et $T_n = X^n$.

On aura remarqué que ce n'est pas sans lien avec la formule d'inversion de Pascal…

III.7. On chercher à décomposer $\dfrac{1}{T_k}$ en éléments simples. Pour cela nous allons procéder d'une façon un peu originale.

(a) Montrer qu'il existe un unique couple $(U,V) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$

$X + (1-X) = 1$, donc d'après la réciproque de Bézout : $X \wedge (1-X) = 1$.

Puis d'après un corollaire du lemme de Gauss, $X \wedge (1-X)^{n-k} = 1$ et de nouveau : $X^k \wedge (1-X)^{n-k} = 1$.

On peut alors appliquer le théorème de Bézout : $\exists\ (U_1, V_1) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $U_1X^k + V_1(1-X)^{n-k} = 1$.

Faisons la division euclidienne de V_1 par X, il existe $Q, V_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V_1 = QX^k + V_2$ avec $\deg V_2 < \deg X^k = k$.

Puis notons $U_2 = U_1 + Q(1-X)^{n-k}$, alors

$$U_2X^k + V_2(1-X)^{n-k} = (U_1 + Q(1-X)^{n-k}X^k + (V_1 - QX^k)(1-X)^{n-k} = U_1X^k + V_1(1-X)^{n-k} = 1$$

Enfin, $\deg(U_2X^k) = \deg U_2 + \deg X^k = k + \deg U_2$,

mais comme $U_2X^k = 1 - V_2(1-X)^{n-k}$, $\deg U_2 + k \leqslant \deg V_2(1-X)^{n-k} = \deg V_2 + n - k < k + n - k = n$,

Et donc $\deg U_2 < n-k$.

Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité.

Supposons que $UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1 = U_2X^k + V_2(1-X)^{n-k} = 1$ avec $\deg U < n-k$ et $\deg V < k$,

Alors $(U - U_2)X^k = (V_2 - V)(1-X)^{n-k}$, et donc $X^k \big| (V_2 - V)(1-X)^{n-k}$,

or $X^k \wedge (1-X)^{n-k} = 1$, donc d'après le lemme de Gauss : $X^k | V_2 - V$, mais $\deg V_2 - v < k$,

donc nécessairement $V_2 - V = 0$ et ainsi $V_2 = V$, puis $U - U_2 = 0$ et donc $U = U_2$.

$$\boxed{\text{il existe un unique couple } (U,V) \in (\mathbb{R}[X])^2 \text{ tel que } UX^k + V(1-X)^{n-k} = 1 \text{ avec } \deg U < n-k \text{ et } \deg V < k}$$

(b) Donner l'expression (en fonction de U) d'un polynôme W tel que $\dfrac{1}{T_k} = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{[V]_{k-j}}{X^j} + \sum_{j=1}^{n-k} \dfrac{[W]_{n-k-j}}{(1-X)^j}$.

Divisons la relation précédente par T_k :

$$\frac{1}{T_k} = \frac{UX^k}{X^k(1-X)^{n-k}} + \frac{V(1-X)^{n-k}}{X^k(1-X)^{n-k}} = \frac{U}{(1-X)^{n-k}} + \frac{V}{X^k}$$

Ainsi comme $\deg V < k$, on peut noter $V = \sum_{j=0}^{k-1}[V]_j X^j$ et donc $\dfrac{V}{X^k} = \sum_{j=0}^{k-1}\dfrac{[V]_j}{X^{k-j}} = \sum_{i=1}^{k}\dfrac{[V]_{k-i}}{X^i}$.

Il faudrait faire la même chose pour U, mais en le développant en somme de puissance de $(1-X)$ à la place de X.

Notons $W = U \circ (1-X)$ (composition), puis notons que $\deg W < n-k$ et donc $W = \sum_{j=0}^{n-k}[W]_j X^j$.

On a alors en composant de nouveau par $(1-X)$ (puisque $(1-X)\circ(1-X) = 1 - (1-X) = X$) :

$$\frac{U}{(1-X)^{n-k}} = \frac{W \circ (1-X)}{(1-X)^{n-k}} = \sum_{j=0}^{n-k}\frac{[W]_j(1-X)^j}{(1-X)^{n-k}} = \sum_{i=1}^{n-k}\frac{[W]_{n-k-i}}{(1-X)^i}$$

$$\boxed{\text{Avec } W = U\circ(1-X), \text{ on a } \frac{1}{T_k} = \sum_{j=1}^{k}\frac{[V]_{k-j}}{X^j} + \sum_{j=1}^{n-k}\frac{[W]_{n-k-j}}{(1-X)^j}.}$$

(c) Application : donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^4(1-X)^3}$.

On pourra commencer par développer par le binôme de Newton $\big(X + (1-X)\big)^6$.

Suivant l'indication, et en exploitant la 7eme ligne du triangle de Pascal : $1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$:

$$\begin{aligned} 1 = &\ \big(X+(1-X)\big)^6 = X^6 + 6X^5(1-X) + 15X^4(1-X)^2 + 20X^3(1-X)^3 + 15X^2(1-X)^4 + 6X(1-X)^5 + (1-X)^6 \\ = &\ X^4\underbrace{\left[X^2 + 6X(1-X) + 15(1-X)^2\right]}_{U} + (1-X)^3\underbrace{\left[20X^3 + 15X^2(1-X) + 6X(1-X)^2 + (1-X)^3\right]}_{V} \end{aligned}$$

On trouve donc $W = U\circ(1-X) = (1-X)^2 + 6(1-X)X + 15X^2 = 1 - 2X + X^2 + 6X - 6X^2 + 15X^2 = 1 + 4X + 10X^2$

et $V = 20X^3 + 15X^2 - 15X^3 + 6X - 12X^2 + 6X^3 + 1 - 3X + 3X^2 - X^3 = 1 + 3X + 6X^2 + 10X^3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{1}{X^4(1-X)^3} = \frac{1}{X^4} + \frac{3}{X^3} + \frac{6}{X^2} + \frac{10}{X} + \frac{1}{(1-X)^3} + \frac{4}{(1-X)^2} + \frac{10}{(1-X)}}$$

IV . Application 2 : Tirage de boules colorées

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules de n couleurs différentes, indiscernable au toucher.
On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega; \mathbf{P})$.
On note alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules distinctes qui ont été tirées lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose $Y_0 = 0$.

IV.1. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k, la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène une nouvelle couleur i.e. une boule qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
On pourra remarque en particulier que $Z_1 = 1$.

(a) Déterminer la loi de Z_2

Z_2 est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli.
$Z_2 = 0$ ssi les deux tirages ont donné la même boule ssi le second tirage donne la même boule que le premier.
Donc $\mathbf{P}(Z_2 = 0) = \dfrac{1}{n}$.
Une autre façon de voir est de paramétré les tirages en fonction du résultat du premier tirage. Il y a n^2 tirages possibles de 2 boules, parmi ceux n correspondent à un double tirage d'une même couleur.

$$\boxed{Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbf{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
En déduire $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)$ puis $\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}([Z_j = 1])$

Sachant que les k premiers tirages on conduit à obtenir j couleurs différentes,
on peut modéliser que les tirages de la boule suivante sont équiprobables et raisonner par dénombrement.
Il y a j possibilités pour obtenir une couleur déjà rencontrée et $n - j$ pour une couleur différente.

$$\boxed{\mathbf{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1)\frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}}$$

Y_k est une variable aléatoire à valeurs dans $Y_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on peut appliquer la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(Y_k = j) \times \mathbf{P}_{Y_k=j}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(Y_k = j) \times \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathbf{P}(Y_k = j)$$

On reconnait des résultats bien connus :

$$\boxed{\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\mathbf{E}(Y_k)}$$

La variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$ indique la nombre de fois où l'on obtenu une nouvelle couleur des tirages 1 à k.

Autrement écrit, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_k$ est le nombre de couleurs différentes rencontrées, jusqu'au k-ième tirage. C'est exactement Y_k.

Donc $Y_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$ On a donc, par linéarité, $\mathbf{E}(Y_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}(Z_i)$.
Mais Z_i suit une loi de Bernoulli donc $\mathbf{E}(Z_i) = \mathbf{P}(Z_i = 1)$. On trouve donc

$$\boxed{\mathbf{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}([Z_j = 1])}$$

(c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

On va démontrer le résultat annoncé par récurrence forte.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$: « $\mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ ».

— On sait que $\mathbf{P}(Z_1 = 1) = 1$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{1-1} = 1$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_k$ sont vraies.

$$\mathbf{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}([Z_j = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$$

On a reconnu la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $r = 1 - \frac{1}{n}$, donc comme $1 - r = \frac{1}{n}$

$$\mathbf{P}(Z_{k+1} = 1)1 - \frac{1}{n} \times \frac{1 - r^k}{1 - r} = 1 - (1 - r^k) = r^k$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}.}$$

(d) Déterminer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

On a donc (avec la question (b)) :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_k) = n\big(1 - \mathbf{P}(Z_{k+1} = 1)\big) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)}$$

IV.2. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k (plutôt que S_{Y_k}) le polynôme générateur associé à Y_k :

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_n = i)X^i = \mathbf{E}(X^{Y_n})$$

(a) Déterminer les polynômes S_0, S_1 et S_2.

On applique les formules

$$\boxed{S_0 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_0 = i)X^i = 1X^0 + 0 = 1 \qquad \text{et} \qquad S_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_1 = i)X^i = 0 + 1X + 0 = X}$$

Enfin, comme $Y_2 = Z_1 + Z_2$, $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$

et $\mathbf{P}(Y_2 = 2) = \mathbf{P}(Z_1 = 1 \cap Z_2 = 1) = \mathbf{P}(Z_1 = 1) \times \mathbf{P}_{Z_1=1}(Z_2 = 1) = 1 \times \mathbf{P}(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{n}$ car $Z_1 = 1$ est certain.

ainsi $\mathbf{P}(Y_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_2 = 2) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$

$$\boxed{S_2 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_2 = i)X^i = \frac{n-1}{n}X + \frac{1}{n}X^2}$$

(b) Montrer, que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}([Y_k = i - 1])$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, n]\!]$ (La suite est vraie, même pour $k = 0$ ou $i = 0$, dans ce cas $\mathbf{P}(Y_k = -1) = 0$).
On exploite la variable aléatoire Y_k : $([Y_k = j])_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(Y_k = j)\mathbf{P}_{Y_k=j}(Y_{k+1} = i)$$

Or :

— si $j \notin \{i - 1, i\}$, $\mathbf{P}_{Y_k=j}(Y_{k+1} = i) = 0$;

— si $j = i$,

$$\mathbf{P}_{Y_k=i}(Y_{k+1} = i) = \frac{\mathbf{P}(Y_k = i \cap Y_{k+1} = i)}{\mathbf{P}(Y_k = i)} = \frac{\mathbf{P}(Y_k = i \cap Z_{k+1} = 0)}{\mathbf{P}(Y_k = i)} = \mathbf{P}_{Y_k=i}(Z_k = i) = \frac{i}{n}$$

d'après 1.(b)

— si $j = i - 1$,

$$\mathbf{P}_{Y_k=i-1}(Y_{k+1} = i) = \frac{\mathbf{P}(Y_k = i - 1 \cap Y_{k+1} = i)}{\mathbf{P}(Y_k = i - 1)} = \frac{\mathbf{P}(Y_k = i - 1 \cap Z_{k+1} = 1)}{\mathbf{P}(Y_k = i - 1)} = \mathbf{P}_{Y_k=i-1}(Z_k = i) = \frac{n - (i-1)}{n}$$

d'après 1.(b)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } i \in [\![0, n]\!] : \mathbf{P}([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}([Y_k = i - 1])}$$

(c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$S_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k$$

Soit $k \in \mathbb{N}$,
commençons par noter que si $i = n+1$, $1 - \dfrac{i-1}{n} = 1 - 1 = 0$, donc on peut ajouter un terme à la dernière somme :

$$\begin{aligned}
S_{k+1} = & \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_{k+1} = i) X^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\mathbf{P}([Y_k = i])\right) X^i + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbf{P}([Y_k = i-1]) \right) X^i \\
= & \frac{1}{n} X \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i\mathbf{P}(Y_k = i) X^{i-1}}_{\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = i) X^i\right)'} + X \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(Y_k = i-1) X^{i-1}}_{\sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = h) X^h} - \frac{1}{n} X^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} (i-1) \mathbf{P}(Y_k = i-1) X^{i-2}}_{\left(\sum_{h=0}^{n} \mathbf{P}(Y_k = h) X^h\right)'} \\
= & \frac{1}{n} X S_k' + X S_k - \frac{1}{n} X^2 S_k' = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ S_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k}$$

(d) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \varphi^k(S_0)$, où φ a été définie en partie III

La relation précédente indique directement, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_{k+1} = \varphi(S_k)$.
Ainsi, par récurrence immédiate :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ S_k = \varphi^k(S_0)}$$

IV.3. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $S_k(1)$ et $S_k'(1)$.

Avec les calculs trouvés en 2.(a), on a directement : $S_0(1) = 1$, $S_1(1) = 1$, $S_2(1) = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n} = 1$.
La relation de récurrence qui lie S_{k+1} à S_k est : $S_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X) S_k' + X S_k$.
Donc en substituant 1 à X, on trouve : $S_{k+1}(1) = 0 \times S_k'(1) + S_k(1) = S_k(1)$.
Donc la suite $(S_k(1))$ est constante. Elle est égale à 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (normal !!).
Puis en dérivant cette relation, on trouve

$$S_{k+1}' = \frac{1}{n}(1-X) S_k' - \frac{1}{n} X S_k' + \frac{1}{n} X(1-X) S_k'' + S_k + X S_k'$$

Donc en substituant 1 à X, on trouve : $S_{k+1}(1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) S_k'(1) + S_k(1) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) S_k'(1)$
Ainsi, en notant $u_k = S_k'(1)$, (u_k) est une suite arithmético-géométrique,
son point fixe est ℓ tel que $\ell = 1 + (1 - \frac{1}{n})\ell$, donc $\ell = 1 + \ell - \dfrac{1}{n}\ell$, donc $\ell = n$.
on a alors $u_{k+1} - \ell = (1 - \frac{1}{n})^k (u_0 - \ell)$ avec $u_0 = 0$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N},\ S_k(1) = 1 \qquad S_k'(1) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \mathbf{E}(Y_k)}$$

(b) Retrouver alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}(Y_k)$ obtenue en question 1.(e)

Puis $S_k'(1) = \mathbf{E}(Y_k)$, on a donc retrouvé

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{E}(Y_k) = n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)}$$

(c) Calculer et interpréter $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(Y_k)$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbf{E}(Y_k)$.

Fixons k (nombre de tirages) et faisons tendre n vers l'infini (une infinité de couleur).
Alors $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \to 1$, il faut être plus précis : $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = 1 - \frac{k}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{nk}{n} = k \text{ - Tout les } k \text{ tirages conduisent à des couleurs différentes}}$$

Fixons n (nombre de couleurs) et faisons tendre k vers l'infini (infinité de tirage).
Alors $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \exp\left(k \ln(1 - \frac{1}{n})\right) \to 0$ par composition car $\ln(1 - \frac{1}{n}) < 0$ et donc $k \ln(1 - \frac{1}{n} \to -\infty$, et donc

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} n \text{ - Toutes les } n \text{ couleurs ont été obtenues.}}$$

IV.4. (a) En exploitant les résultats obtenus en partie III, ou bien en faisant directement le calcul, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi^k(T_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k T_j$$

En partie III.5., on a démontré que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(T_j) = \dfrac{j}{n} T_j$,

et par récurrence très immédiate :

$$\boxed{\varphi^k(T_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k T_j}$$

(b) En déduire, à l'aide de la formule trouvée en III.6.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i$$

$S_k = \varphi^k(S_0) = \varphi^k(1)$. Or $1 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T_j$, donc par linéarité de φ donc de φ^k :

$$S_k = \varphi^k \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T_j \right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(T_j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k T_j$$

Il reste à écrire T_j sur la base canonique (cf. III.6.(e)) : $T_j = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i$, donc

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^{n} (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \binom{n-j}{n-i} X^i$$

$$\boxed{S_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i}$$

(c) Montrer, finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbf{P}([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k$$

L'écriture polynomiale est unique, on peut donc identifier, en exploitant également le fait que

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \frac{n!(n-j)!}{j!(n-j)!(i-j)!((n-j)-(i-j))!} = \frac{n!}{j!(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \forall\, i \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbf{P}([Y_k = i]) = \left[S_k\right]_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k}$$
