Devoir Surveillé n°8

Sujet donné le samedi 5 avril 2025, 4h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Sous-algèbres irréductibles et applications

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

• On note $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \cdot, \circ)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E ce qui signifie que
— $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
— $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(E)$ qui
  — est associative,
  — est distributive à droite et à gauche sur $+$,
  — a un bon comportement vis-à-vis de la loi de composition externe de $\mathbb{K}$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$:

$$\forall (\lambda, f, g) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)^2 \ , \ \lambda.(f \circ g) = (\lambda.f) \circ g = f \circ (\lambda.g)$$

• On note $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

• En choisissant une base $\mathcal{B}$ de E, l'application $\Psi_{\mathcal{B}} \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \operatorname{mat}(f, \mathcal{B}) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres (c'est-à-dire un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels qui est également un morphisme de $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$).

• Une **sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)** est un **sous-espace vectoriel** de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) qui est **stable pour la loi $\circ$ (resp. loi $\times$)**.

• Un **sous-espace vectoriel V de E est stable par l'endomorphisme** a de E si $a(V) \subset V$. On dit aussi que V est a-stable.

• Un **sous-espace vectoriel V de E est stable par la partie $\mathcal{P}$ de** $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ si elle est a-stable pour tout $a \in \mathcal{P}$. On dit aussi que V est $\mathcal{P}$-stable.

• Une **partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est irréductible** si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{P}$ sont $\{0_E\}$ et E.

L'objectif du problème est d'établir et d'exploiter le théorème suivant dû à Burnside :

> Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.
> Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

I . Travail sur la structure d'algèbre.

Les différentes questions sont indépendantes.

I.1. **Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**
(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, des matrices triangulaires supérieures, est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(b) L'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?
(c) Pour $n \geqslant 3$, en s'inspirant de la réponse apportée à la question précédente, l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.2. **Sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![0, n]\!]$.
(a) Montrer que $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
(b) Soit $\mathcal{B}_f = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.
Montrer que $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right] \;\middle|\; (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$ où $\Psi_{\mathcal{B}}$ est l'isomorphisme défini en introduction.
(c) En déduire la dimension de $\mathcal{A}_F$.

I.3. Considérons l'isomorphisme $\Psi_{\mathcal{B}}$ défini dans l'introduction.
(a) Montrer que, si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, alors $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(b) Montrer que, si $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
En déduire que $\Psi_{\mathcal{B}}$ réalise une bijection entre les sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II . Importance des hypothèses du théorème de Burnside

Les 3 question de cette partie sont indépendantes.

II.1. Dans cette question uniquement, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E et toutes les sous-algèbres de

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$$

. Quelles sont les sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$? quelle est la conséquence de ce résultat sur l'énoncé du théorème de Burnside ?

II.2. Dans cette question uniquement, E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ dont nous notons $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2} = (e_1, e_2)$ la base canonique. L'isomorphisme d'algèbres $\Psi_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}}$ permet d'identifier tout endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ à la matrice qui le représente dans la base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}$. Notons $V = \left\{ U(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ et $\mathcal{V} = \{u_{a,b} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ où, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $U(a,b) = \Psi_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}}(u_{a,b})$.

(a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension.
Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{V}$?

(b) Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$. Soit (e) une base de D. Notons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ les coordonnées de e dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
Montrer que $u_{1,0}(D) \subset \text{Vect}\{e_1\}$. Montrer de même l'inclusion de $u_{0,1}(D)$ dans une droite à préciser.
En déduire que D n'est pas stable par $\mathcal{V}$.

(c) Montrer que $\mathcal{V}$ est une partie irréductible de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$. On recherchera les sous-espaces stables en fonction de leur dimension.

(d) Justifier que la conclusion du théorème de Burnside est fausse concernant $\mathcal{V}$. Identifier (avec justification) l'hypothèse du théorème qui n'est pas satisfaite dans cet exemple.

II.3. Dans cette question, on note u, l'endomorphisme de $E = \mathbb{Q}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{A}$, la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendré par u. On note $T = X^3 + X + 1$

(a) Montrer que $T(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(b) Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $T(r) = 0$. On suppose que la fraction est ainsi irréductible : $p \wedge q = 1$.
Soit δ un facteur premier de q. Montrer que $\delta | q^3 + pq^2$ puis $\delta | p^3$. En déduire une contradiction.

(c) Déduire de la question précédente que $T = X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

(d) Montrer que $\mathcal{A} = \{R(u), R \in \mathbb{Q}_2[X]\}$. Expliciter une base de $\mathcal{A}$.

(e) Soit $R \in \mathbb{Q}_2[X]$, non nul. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $UR + VT = 1$.
En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps.

(f) Montrer que E n'admet aucun sous-espace de dimension 1 u-stable.
De même, on admet qu'aucun sous-espace de E de dimension 2 n'est stable par u.
Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

III . Preuve du théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ **irréductible**.

III.1. **Existence d'une valeur propre pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.**
Soient H un espace vectoriel de dimension finie $m \geqslant 1$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)$.

(a) En considérant la famille $(\text{Id}_E, h, h^2, \ldots, h^{m^2})$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(h) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \deg P \leqslant m^2$$

(b) En notant $d \in \mathbb{N}^*$ le degré de P, $c \in \mathbb{C}^*$ son coefficient dominant et en admettant le théorème de D'Alembert-Gauss qui donne l'existence de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ tels que $P(X) = c \displaystyle\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$, montrer qu'il existe $k_0 \in [\![1, d]\!]$ tel que $\text{Ker}(h - \lambda_{k_0} \text{Id}_H) \neq \{0_H\}$.

III.2. **Existence d'un endomorphisme de rang 1 dans $\mathcal{A}$.**

(a) Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de E.
Posons $A_x = \{a(x) \mid a \in \mathcal{A}\}$.
Montrer que A_x est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$ et en déduire l'existence de $a \in \mathcal{A}$ tel que $a(x) = y$.

(b) Soit $b \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(b) \geqslant 2$.

i. Montrer l'existence de $(x, y) \in E^2$ tels que $(b(x), b(y))$ est une famille libre de E.

ii. Justifier l'existence d'un endomorphisme $a \in \mathcal{A}$ tel que $(a \circ b)(x) = y$.

iii. Vérifier que $b \circ a$ se restreint à $\mathrm{Im} b$ au départ et à l'arrivée en un endomorphisme de $\mathrm{Im} b$ que l'on notera $\widetilde{h}$.

iv. En appliquant à $\widetilde{h}$ le résultat de la question III.1, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{rg}(b \circ a \circ b - \lambda b) < \mathrm{rg}(b)$.

(c) Justifier que $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ puis en déduire soigneusement l'existence d'un endomorphisme de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

III.3. **Construction d'une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes de $\mathcal{A}$.**

On note, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $E^{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient d'indices (i, j) qui vaut 1.
Reprenons le résultat de la question III.2 et notons a_0 un endomorphisme de rang 1 de $\mathcal{A}$.

(a) Établir l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de a_0 relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme $\left[\begin{array}{c|c|c|c} C & 0_{n,1} & \dots & 0_{n,1} \end{array}\right]$
où C est une matrice colonne non nulle.

(b) Justifier l'existence d'un endomorphisme a_1 de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a_1 \circ a_0) = E^{1,1}$
On pourra utiliser le résultat de la question III.2(a).
On montre alors de même l'existence d'endomorphismes a_2, ..., a_n de $\mathcal{A}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{mat}(a_i \circ a_0, \mathcal{B}) = E^{i,1}$.
Notons $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la famille des formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ de sorte que tout vecteur x de E s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x).e_i$$

(c) Posons $F = \{x \in E \mid \forall a \in \mathcal{A} \ , \ e_1^*(a(x)) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$ puis en déduire que $F = \{0_E\}$.

(d) Posons $G = \{(e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)) \dots, e_1^*(a(e_n))) \in \mathbb{K}^n \mid a \in \mathcal{A}\}$.

i. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ dont la dimension notée p est supérieure ou égale à 1.

ii. Supposons que $p = \dim_{\mathbb{C}} G < n$ et extrayons une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G : il existe $(c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{A}^p$:

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \ , \ g_i = (e_1^*(c_i(e_1)), e_1^*(c_i(e_2)), \dots, e_1^*(c_i(e_n)))$$

Posons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $H_i = \mathrm{Ker}(e_1^* \circ c_i)$.
Justifier $\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \geqslant 1$ ce qui permet de choisir $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ tel que $x_0 \neq 0_E$.
Montrer alors que x_0 appartient au sous-espace F étudié dans la question précédente et en déduire la dimension de G.

(e) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Déduire de la question précédente l'existence de $b_j \in \mathcal{A}$ tel que la matrice de b_j relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme $\left[\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline B_j \end{array}\right]$ où le 1 de la première ligne est situé sur la colonne d'indice j et $B_j \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{C})$.

(f) En déduire que l'ensemble des matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices de la famille $(E^{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et conclure.

IV . Application du théorème de Burnside

Dans cette partie, on exploite le théorème de Burnside afin de faire le lien entre l'espace des matrices magiques et le sous-espace engendré par les matrices de permutation.

• Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que M est **magique** si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante. On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{M} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists s \in \mathbb{C} \ : \ \forall \ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \ , \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = s\}$$

Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose $\mathfrak{M}_s = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \forall \ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \ , \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = s\}$.

• Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note f_i (respectivement g_i), la forme linéaire qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe la somme de ses coefficients de la ligne i (respectivement colonne i).

$$\forall \ i \in [\![1, n]\!], \qquad f_i : M = (m_{k,\ell})_{k,\ell} \mapsto \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} \qquad \text{et} \qquad g_i : M = (m_{k,\ell})_{k,\ell} \mapsto \sum_{h=1}^{n} m_{h,i}$$

• Si σ est une permutation de $\{1, \dots n\}$, on note p_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini sur la base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^n} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On note P_σ, la matrice de p_σ dans cette même base.
• On note D la droite dirigée par le vecteur $c := e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^n}$.

IV.1. **Structure de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}_s$.**

(a) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un espace vectoriel.

(b) Est-ce que $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(c) Démontrer que $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n)$ est liée mais que $(f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_{n-1})$ est libre.

(d) En déduire que $\mathfrak{M}_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} g_i \right)$.

(e) Déterminer la dimension du sous-espace $\mathfrak{M}_0$.
Pour $s \in \mathbb{C}^*$, quelle est la structure de $\mathfrak{M}_s$?

(f) Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}$?

(g) Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ est inclus dans $\mathfrak{M}$.

IV.2. **Action du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ sur H et D.**
Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^n}$, alors

$$M \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow H \text{ et } D \text{ sont } m\text{-stables}$$

IV.3. **Application du théorème de Burnside sur $\mathcal{L}(H)$.**

(a) Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$ sont $\{0\}$, la droite D, l'hyperplan H de $\mathbb{C}^n$.
Pour étudier F stable par $\{p_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, on peut raisonner sur la dimension de F.
Dans le cas où $\dim F > 2$, on commence par montrer qu'il existe (i, j) tel que $e_i - e_j \in F$, puis $H \subset F$.

(b) Pour toute permutation σ de $\{1, \dots n\}$, on note $p_\sigma|_H$ la restriction de p_σ à H.
En utilisant le théorème de Burnside admis en début d'énoncé, démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}|_H$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots \lambda_N \in \mathbb{C}$ et $\sigma_1, \dots \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots n\}$.

IV.4. **Conclusion.**

(a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Montrer que $\dfrac{u}{n}$ est un projecteur. Quel est son rang ? Exprimer $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ en fonction de D et H.

(b) Soit $M \in \mathfrak{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui lui est canoniquement associé.
Démontrer l'existence de N dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$, $\sigma_1, \dots \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots n\}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$$

On exploitera les deux questions précédentes, après avoir montré que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $p_\sigma(z) = z$ si $z \in D$.

(c) Etablir un lien de dépendance linéaire entre l'endomorphisme u et g la somme des endomorphismes p_σ quand σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots n\}$ et en déduire que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendrée par les matrices de permutations.
Puisque $g = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma$, montrer que $\forall\ h \in [\![1, n]\!]$, $g(e_h) = (n-1)!(e_1 + \cdots + e_n)$.

Correction du DS 8

Sous-algèbres irréductibles et applications

I . Travail sur la structure d'algèbre.

Les différentes questions sont indépendantes.

I.1. **Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, des matrices triangulaires supérieures, est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La caractérisation formelle et essentielle est donnée par la définition :

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall\, j < i, [M]_{i,j} = 0\}$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $M, N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j < i$:

$$[\lambda M + \mu N]_{i,j} = \lambda [M]_{i,j} + \mu [N]_{i,j} = 0$$

Donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.
$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soient $M, N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j < i$:

$$[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} [M]_{i,k}[N]_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j}$$

Or si $k < i$, $[M]_{i,k} = 0$ car $M \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et pour $k \geqslant i > j$, $[N]_{k,j} = 0$ car $N \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.
Donc $[MN]_{i,j} = 0$ et $MN \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

(b) L'ensemble $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Analyse : Si $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^T A^T = BA$.
Mais il n'y a a priori pas de raison que A et B commutent systématiquement. Donnons un contre-exemple.
Considérons donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } AB = \begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ 4 & \cdot \end{pmatrix}$$

Donc $AB \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

Remarque : le contre-exemple ci-dessus n'en est pas un si $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car, dans ce corps, $0 = 4$. Néanmoins le résultat affirmé reste valide indépendamment du corps comme le montre ce contre-exemple valable pour tout corps $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } AB = \begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{K})$$

(c) Pour $n \geqslant 3$, en s'inspirant de la réponse apportée à la question précédente, l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

L'idée suggérée par l'énoncé est d'exploiter le contre-exemple trouvé pour des matrices de taille 2 (matrices A et B de la question précédente) pour construire un contre-exemple pour des matrices de taille $n \geqslant 3$.

Posons les matrices par blocs $A' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right]$ et $B' = \left[\begin{array}{c|c} B & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right]$.

Alors A' et B' sont des matrices symétriques de taille n et $A'B' = \left[\begin{array}{c|c} AB & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right] \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ car $AB \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

I.2. **Sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in [\![0,n]\!]$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

⋆ Par définition, $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

⋆ $\mathcal{A}_F \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ est un endomorphisme de E qui vérifie $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$ donc $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)} \in \mathcal{A}_F$.

⋆ Soient $(u, v, \lambda) \in \mathcal{A}_F^2 \times \mathbb{K}$ fixés.
Soit $x \in F$ fixé.

$$(\lambda.u + v)(x) = \lambda. \underbrace{u(x)}_{\in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F} + \underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F} \in \mathcal{A}_F \text{ (car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E)$$

donc $(\lambda.u + v)(F) \subset F$ si bien que $\lambda.u + v \in \mathcal{A}_F$.

⋆ Soient $(u, v) \in \mathcal{A}_F^2$ fixés.
Soit $x \in F$.

$$(u \circ v)(x) = u(\underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F}) \in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F$$

donc $(u \circ v)(F) \subset F$ donc $u \circ v \in \mathcal{A}_F$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).}$$

(b) Soit $\mathcal{B}_f = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
Montrer que $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \;\middle|\; (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$ où $\Psi_{\mathcal{B}}$ est l'isomorphisme défini en introduction.

- Soit $u \in \mathcal{A}_F$ fixé. Posons $U = \Psi_{\mathcal{B}}(u)$.
En découpant U par blocs, il existe $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ tels que $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline D & C \end{array}\right]$. Montrons que $D = 0_{n-p,p}$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$.
La colonne d'indice j de U est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$, or $e_j \in F$ (car $j \in [\![1, p]\!]$) donc $u(e_j) \in F$ (car $u \in \mathcal{A}_F$) donc $u(e_j)$ est une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_p$ si bien que ses coordonnées selon $e_{p+1}, \dots, e_n$ sont nulles ce qui correspond à la nullité de la colonne d'indice j de D.
Par conséquent, $D = 0_{n-p,p}$ d'où $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F) \subset \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \;\middle|\; (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}$.
- Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $(A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ vérifiant $U = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$.
Posons $u = \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(U)$ ($\Psi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme).
Montrons que $u \in \mathcal{A}_F$ ce qui, puisque $U = \Psi_{\mathcal{B}}(u)$,
permettra de conclure, que $\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \;\middle|\; (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} \subset \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F)$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$.
La colonne d'indice j de U est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{B}$, or les $n-p$ dernières valeurs de cette colonne sont nulles donc $u(e_j)$ est une combinaison linéaire des p premiers vecteurs de $\mathcal{B}$: $u(e_j) \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_p\} = F$.
Nous venons d'établir que u envoie une base de F sur des vecteurs de F donc, par linéarité de u, tout vecteur de F a pour image une combinaison linéaire de vecteurs de F ce qui signifie $u(F) \subset F$ d'où $u \in \mathcal{A}_F$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \;\middle|\; (A, B, C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}.}$$

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{A}_F$.

L'énoncé rappelle que $\Psi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme donc tout sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ à la même dimension que sont image :

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}_F = \dim_{\mathbb{K}} \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F)$$

Posons $\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) & \to & \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F) \\ (A, B, C) & \mapsto & \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] \end{array} \right.$

— Φ est linéaire.

— Φ est injective car $(A, B, C) \in \mathrm{Ker}\Phi \iff \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] = 0_{n,n} \iff A = 0_{p,p}\ ,\ B = 0_{p,n-p}\ ,\ C = 0_{n-p,n-p}$.

— Φ est sujective car, d'après la question précédente, pour toute matrice U de $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_F)$, il existe $(A_U, B_U, C_U) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ telles que $U = \left[\begin{array}{c|c} A_U & B_U \\ \hline 0 & C_U \end{array}\right]$ donc $U = \Phi(A_U, B_U, C_U)$.

Par conséquent, Φ est un isomorphisme donc

$$\dim_{\mathbb{K}} \Psi(\mathcal{A}_F) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A}_F \text{ est un sous-espace de dimension } n^2 + p^2 - np.}$$

I.3. Considérons l'isomorphisme $\Psi_{\mathcal{B}}$ défini dans l'introduction.

(a) Montrer que, si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, alors $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- ⋆ $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- ⋆ $\Psi_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire donc l'image directe de tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, or $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (car c'est une sous-algèbre) donc $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ⋆ Soient $(U, V) \in \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})^2$.
  Il existe $(u, v) \in \mathcal{A}^2 : U = \Psi_{\mathcal{B}}(u)$ et $V = \Psi_{\mathcal{B}}(v)$.
  Par propriété du morphisme d'algèbres $\Psi_{\mathcal{B}}$,

$$UV = \Psi_{\mathcal{B}}(u) \times \Psi_{\mathcal{B}}(v) = \Psi_{\mathcal{B}}(u \circ v) \in \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \text{ car } u \circ v \in \mathcal{A} \text{ par stabilité de } \mathcal{A} \text{ qui est une sous-algèbre.}$$

Par conséquent, $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), \text{ alors } \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$

(b) Montrer que, si $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
En déduire que $\Psi_{\mathcal{B}}$ réalise une bijection entre les sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et celles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⋆ $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
- ⋆ $\Psi_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire donc l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, or $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car c'est une sous-algèbre) donc $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_K(E)$.
- ⋆ Soient $(u, v) \in \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})^2$.
  Posons $U = \Psi_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{D}$ et $V = \Psi_{\mathcal{B}}(v) \in \mathcal{D}$.
  Par propriété du morphisme d'algèbres $\Psi_{\mathcal{B}}$,

$$\Psi_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \Psi_{\mathcal{B}}(u) \times \Psi_{\mathcal{B}}(v) = UV \in \mathcal{D} \text{ par stabilité de } \mathcal{D} \text{ qui est une sous-algèbre.}$$

Par conséquent, $\Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } \mathcal{D} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \Psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).}$

Notons $\mathcal{SA}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E))$ et $\mathcal{SA}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ les ensembles des sous-algèbres respectives de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Nous avons vu que $\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{SA}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)) & \to & \mathcal{SA}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \\ \mathcal{A} & \mapsto & \psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \end{array} \right.$ et $\beta \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{SA}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) & \to & \mathcal{SA}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)) \\ \mathcal{D} & \mapsto & \psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D}) \end{array} \right.$ sont des applications bien définies et, puisque $\psi_{\mathcal{B}}$ est bijective,

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{SA}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)) \;,\; (\beta \circ \alpha)(\mathcal{A}) = \psi_{\mathcal{B}}^{-1}\big(\psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})\big) = \mathcal{A}$$

et

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{SA}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;,\; (\alpha \circ \beta)(\mathcal{D}) = \psi_{\mathcal{B}}\big(\psi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{D})\big) = \mathcal{D}$$

donc $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{SA}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E))}$ et $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathcal{SA}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))}$ donc α est une bijection de l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ sur l'ensemble des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \Psi_{\mathcal{B}} \text{ réalise une bijection entre les sous-algèbres de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \text{ et celles de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$

II . Importance des hypothèses du théorème de Burnside

Les 3 question de cette partie sont indépendantes.

II.1. Dans cette question uniquement, $\mathbb{K}$ est un corps quelconque et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E et toutes les sous-algèbres de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Quelles sont les sous-algèbres irréductibles de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$? quelle est la conséquence de ce résultat sur l'énoncé du théorème de Burnside ?

- Les sous-espaces vectoriels de E sont uniquement $\{0\}$ et E (on peut raisonner sur les dimensions).
  Ce sont des sous-aglèbres, et comme toute algèbre est nécessairement une espace vectoriel, ce sont les seuls sous-algèbre de E.

  $\boxed{\text{Les sous-algèbres de } E \text{ sont } \{0\} \text{ et } E.}$

- De même, $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est de dimension 1, il n'admet que $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ et $\mathcal{L}(E)$ comme sous-algèbre.
  Elles sont toutes les deux irréductibles.

  $\boxed{\text{Les conclusion du théorème de Burnside ne sont pas vérifiés puisque } \{0\} \text{ est ici irréductible.}}$

  En dimension $n \geqslant 2$, $\{0\}$ n'est pas irréductible, puisque tous les espaces sont stable par $\{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\}$ et il existe d'autres sous-espace vectoriel E, autres que $\{0_E\}$ et E.

II.2. Dans cette question uniquement, E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ dont nous notons $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2} = (e_1, e_2)$ la base canonique. L'isomorphisme d'algèbres $\Psi_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}}$ permet d'identifier tout endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ à la matrice qui le représente dans la base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}$. Notons $V = \left\{ U(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ et $\mathcal{V} = \{u_{a,b} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ où, pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $U(a,b) = \Psi_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^2}}(u_{a,b})$.

(a) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et calculer sa dimension.
Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{V}$?

Clairement :

$$\boxed{V = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \text{ et } \dim V = 2}$$

car cette famille génératrice est libre (on regarde le coefficient en $(1,2)$ et en $(2,1)$, Par isomorphisme (d'espace vectoriel) :

$$\boxed{\mathcal{V} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)\text{, de dimension 2.}}$$

(b) Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$. Soit (e) une base de D. Notons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ les coordonnées de e dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
Montrer que $u_{1,0}(D) \subset \text{Vect}\{e_1\}$. Montrer de même l'inclusion de $u_{0,1}(D)$ dans une droite à préciser.
En déduire que D n'est pas stable par $\mathcal{V}$.

Interprétons le calcul matriciellement :

$$U_{1,0} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } u_{1,0}(D) \subset \text{Vect}\{e_1\}.}$$

De même :

$$U_{0,1} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } u_{0,1}(D) \subset \text{Vect}\{e_2\}.}$$

Si D est stable par $\mathcal{V}$ alors, nécessairement $u_{1,0}(D) \subset D$ et donc $e_1 \in D$. De même $e_2 \in D$.
Ainsi, par linéarité : $\text{vect}(e_1, e_2) \subset D$.
Or le premier espace est ici de dimension 2 ((e_1, e_2) libre) alors que le second est de dimension 1.
On a donc une contradiction

$$\boxed{D \text{ n'est pas stable par } \mathcal{V}.}$$

(c) Montrer que $\mathcal{V}$ est une partie irréductible de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$. On recherchera les sous-espaces stables en fonction de leur dimension.

D'après la question précédente, aucun sous-espace de $\mathbb{C}^2$ de dimension 1 n'est stable par $\mathcal{V}$.
Seul les sous-espaces de dimension 0 ($\{0\}$) et de dimension 2 ($E = \mathbb{C}^2$) sont stables par $\mathcal{V}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{V} \text{ est une partie irréductible de } \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2).}$$

(d) Justifier que la conclusion du théorème de Burnside est fausse concernant $\mathcal{V}$. Identifier (avec justification) l'hypothèse du théorème qui n'est pas satisfaite dans cet exemple.

Il semble que $\mathcal{V}$ soit irréductible et pourtant $\mathcal{V} \neq \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$.
En fait

$$\boxed{\mathcal{V} \text{ est bien un sous-espace vectoriel, mais n'est pas une algèbre}}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & a' \\ b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab' & 0 \\ 0 & a'b \end{pmatrix} \notin \mathcal{V}$$

II.3. Dans cette question, on note u, l'endomorphisme de $E = \mathbb{Q}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{A}$, la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendré par u. On note $T = X^3 + X + 1$

(a) Montrer que $T(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\mathcal{M}(T(u), \mathcal{B}) = T(M) = M^3 + M + I_3 = \begin{pmatrix} -1+0+1 & 0+0+0 & 1-1 \\ -1+1+0 & -1+0+1 & 1-1+0 \\ 0+0+0 & -1+1+0 & -1+0+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{T(u) = u^3 + u + \mathrm{id} = 0}$$

(b) Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $T(r) = 0$. On suppose que la fraction est ainsi irréductible : $p \wedge q = 1$.
Soit δ un facteur premier de q. Montrer que $\delta | q^3 + pq^2$ puis $\delta | p^3$. En déduire une contradiction.

On a $q =\neq 0$. On peut supposer même que $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $p \wedge q = 1$.
En multipliant par q^3, non nul : $0 = q^3 \times T(r) = p^3 + pq^2 + q^3$, donc $p^3 = -q^2(q+p)$.
Si $\delta > 1$ est un facteur premier de q, alors $\delta | q$ et par transitivité : $\delta | p^3$.
Mais δ étant un nombre premier, $\delta | p$. Ainsi $\delta | p \wedge q = 1$. Contradiction !

$$\boxed{T \text{ n'admet aucune racine rationnelle.}}$$

(c) Déduire de la question précédente que $T = X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

Si T n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, alors il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{Q}[X]$, non constants, tels que $T = T_1 \times T_2$.
Concernant les degrés : $3 = \deg T = \deg T_1 + \deg T_2$.
Or T_1 et T_2 sont non constants, donc $\deg T_1 \geqslant 1$ et $\deg T_2 \geqslant 1$.
On a nécessairement : $\deg T_1 = 1$ et $\deg T_2 = 2$ ou bien $\deg T_1 = 2$ et $\deg T_1$.
Sans perte de généralité, on peut supposer $\deg T_1 = 1$ et $\deg T_2 = 2$.
Comme $T_1 \in \mathbb{Q}[X]$, il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $T_1 = aX + b$ et donc $T_1\left(\dfrac{-b}{a}\right) = 0$.
Ainsi $\dfrac{-b}{a} \in \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ est un corps) est une racine de T_1 et donc de T.
C'est impossible d'après la question précédente :

$$\boxed{T \text{ est irréductible sur } \mathbb{Q}[X].}$$

(d) Montrer que $\mathcal{A} = \{R(u), R \in \mathbb{Q}_2[X]\}$. Expliciter une base de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(E)$ engendré par u.
Elle contient nécessairement toutes les puissances de u, puis tous les combinaisons linéaires de celles-ci.
Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P(u) \in \mathcal{A}$.
Par conséquent : $\{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\} \subset \mathcal{A}$.
Réciproquement, si $\{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est une algèbre : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(E)$,
puisque : $\forall\ P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[X]$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, $\lambda_1 P_1(u) + \lambda_2 P_2(u) = \underbrace{(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)}_{\in \mathbb{Q}[X]}(u) \in \mathbb{Q}[u]$;

stable par composition : $\forall\ P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[X]$, $P_1(u) \circ P_2(u) = \underbrace{P_1 \times P_2)}_{\in \mathbb{Q}[X]}(u) \in \mathbb{Q}[u]$.

$\{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est donc une algèbre contenant u.
Pour des raisons de minimalité

$$\boxed{\mathcal{A} = \{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\}.}$$

Puis on va simplifier ce dernier ensemble. Trivialement, puisque $\mathbb{Q}_2[X] \subset \mathbb{Q}[X]$, $\{P(u), P \in \mathbb{Q}_2[X]\} \subset \{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\}$
Réciproquement, si $P \in \mathbb{Q}[X]$, on peut faire la division euclidienne de P par T.
Il existe $(Q, R) \in \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}_2[X]$ tels que $P = QT + R$, puis $P(u) = Q(u) \circ T(u) + R(u)$.
Or $T(u) = 0$, $Q(u)$ est linéaire donc $Q(u) \circ T(u) = 0$ et donc $P(u) = R(u)$ avec $\deg R \leqslant 2$.
Ainsi $\{P(u), P \in \mathbb{Q}[X]\} \subset \{P(u), P \in \mathbb{Q}_2[X]\}$

$$\boxed{\mathcal{A} = \{P(u), P \in \mathbb{Q}_2[X]\}.}$$

Enfin, comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{Q}_2[X]$, la famille (id, u, u^2) est une famille génératrice de $\{P(u), P \in \mathbb{Q}_2[X]\}$.
Montrons que c'est également une famille libre.
Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda \mathrm{id} + \mu u + \nu u^2 = 0$.
Dans sa version matricielle, cela donne :

$$\lambda I_3 + \mu M + \nu M^2 = \begin{pmatrix} \lambda & -\nu & -\mu \\ \mu & \lambda - \nu & -\mu - \nu \\ \nu & \mu & \lambda - \nu \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}$$

Ainsi $\lambda = \mu = \nu = 0$ et donc (id, u, u^2) est libre.

$$\boxed{\text{Une base de } \mathcal{A} \text{ est donc } (\mathrm{id}, u, u^2). \text{ Et donc } \dim \mathcal{A} = 3.}$$

(e) Soit $R \in \mathbb{Q}_2[X]$, non nul. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $UR + VT = 1$.
En déduire que $\mathcal{A}$ est un corps.

T est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, donc $R \wedge T = 1$ (R non nul) et

$$\boxed{\text{Il existe } U, V \in \mathbb{Q}[X] \text{ tel que } UR + VT = 1, \text{ d'après la relation de Bézout.}}$$

On a alors, pour tout $R(u) \in \mathcal{A}$ non nul (donc $R \neq 0$) - avec les mêmes notations :

$$U(u) \times R(u) + V(u) \times T(u) = 1(u) = \mathrm{id}$$

Or $T(u) = 0$, $V(u) \in \mathcal{L}(E)$, donc $V(u) \circ T(u) = 0$ et donc $U(u) \circ R(u) = \mathrm{id}$.
Par commutativité des deux polynômes en u, on a de même $R(u) \circ U(u) = \mathrm{id}$.
Ainsi, touts les éléments, non nuls, de $\mathcal{A}$ sont inversibles donc

$$\boxed{\mathcal{A} \text{ est un corps.}}$$

(f) Montrer que E n'admet aucun sous-espace de dimension 1 u-stable.
De même, <u>on admet</u> qu'aucun sous-espace de E de dimension 2 n'est stable par u.
Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

Soit F un sous-espace de $E = \mathbb{Q}^3$ stable par u. On suppose $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$.
Donc $\dim F = 1$ ou $\dim F = 2$.
• Si $\dim F = 1$.
On note e un vecteur non nul de F, (e) est libre et est donc une base de F.
F est stable par u, donc $u(e) \in F = \mathrm{vect}(e)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ tel que $u(e) = \lambda \cdot e$.
On a alors $u^2(e) = u(\lambda e) = \lambda u(e) = \lambda^2 e$ et de même $u^3(e) = \lambda^3 \cdot e$.

$$0 = T(u)(e) = u^3(e) + u(e) + e = (\lambda^3 + \lambda + 1) \cdot e = T(\lambda) \cdot e$$

Mais e est non nul donc $T(\lambda) = 0$. Or on a vu que T n'admet aucune racine sur $\mathbb{Q}$. Contradiction !

$$\boxed{\text{Ainsi nécessairement } \dim F \neq 1.}$$

• Si $\dim F = 2$. (Nous écrivons ici une démonstration - dans le sujet la réponse est admise)
On note (e_1, e_2) une base de F. Dans la base canonique, ils s'écrivent $E_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $E_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
En prenant $\lambda \in \mathbb{Q}$, bien choisi, puis $E_2' = E_1 - \lambda E_2$, on a $E_2' \times E_1$.
On va donc considérer directement que $E_1^T \times E_2 = 0$.
Considérons $E_3 = \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (idée : produit vectorielle).
Le calcul donne : $E_1^T \times E_3 = 0$ et $E_2^T \times E_3 = 0$. La famille (E_1, E_2, E_3) est donc libre (elle est « orthogonale »).
On a donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Q})$.
Puisque F est stable par u, $ME_1 \in \mathrm{vect}(E_1, E_2)$ et de même $ME_2 \in \mathrm{vect}(E_1, E_2)$.
Il existe α, β, γ tels que $M^T E_3 = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3$. Enfin,

$$E_1^T \times M^T E_3 = \left(E_3^T \times ME_1\right)^T = \left(E_3^T \times (\lambda E_1 + \mu E_2)\right) = \lambda E_1^T \times E_3 + \mu E_2^T \times E_3 = 0$$

Donc

$$0 = E_1^T \times \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 = \alpha E_1^T E_1 + \beta E_1^T E_2 = \alpha(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$

De même

$$0 = E_2^T \times (\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3) = \alpha E_2^T E_1 + \beta E_2^T E_2 = \beta(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)$$

Comme $E_1 \neq 0$, $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$ et donc $\alpha = 0$ et de même $\beta = 0$, donc $M^T E_3 = \gamma E_3$.
Puis, les mêmes calculs montrent que $T(M^T) = T(M)^T = 0^T = 0$, et donc $T(\gamma) = 0$. Même contradiction !

$$\boxed{\text{Ainsi nécessairement } \dim F \neq 2 \text{ - } \textit{Question non posée}}$$

Au final, seul $\{0\}$ et E sont stables par u et donc par $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{A} \text{ est donc une sous-algèbre irréductible de } E = \mathbb{Q}^3 \text{ et } \mathcal{A} \neq \mathcal{L}_{\mathbb{Q}}(E) \text{ (pour des raisons de dimensions : 3 et 6).} \\ \text{Dans l'énoncé du théorème de Burnside, l'hypothèse } \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ est donc importante !}\end{array}}$$

III . Preuve du théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ **irréductible**.

III.1. **Existence d'une valeur propre pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.**
Soient H un espace vectoriel de dimension finie $m \geqslant 1$ et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)$.

(a) En considérant la famille $(\mathrm{Id}_E, h, h^2, \dots, h^{m^2})$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P(h) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \deg P \leqslant m^2$$

La famille $(\mathrm{Id}_E, h, h^2, \dots, h^{m^2})$ compte m^2+1 vecteurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)$ qui est de dimension m^2,
or $m^2+1 > m^2$ donc cette famille est liée
si bien qu'il existe $(\mu_0, \dots, \mu_{m^2}) \in \mathbb{C}^{m^2+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{m^2} \mu_k . h^k = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)} \quad \text{et} \quad (\mu_0, \dots, \mu_{m^2}) \neq 0_{\mathbb{C}^{m^2+1}} \tag{1}$$

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m^2} \mu_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

- ⋆ La relation de liaison (1) s'écrit $P(h) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$.
- ⋆ Par construction $\deg P \leqslant m^2$.

Par l'absurde, supposons que P est constant,
alors $\forall k \in [\![1, m^2]\!]$, $\mu_k = 0$, donc $P = \mu_0$, si bien qu'en reportant cela dans la relation de liaison (1),

$$\mu_0 . \mathrm{Id}_H = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$$

or puisque $(\mu_0, \dots, \mu_{m^2}) \neq 0_{\mathbb{C}^{m^2+1}}$, $\mu_0 \neq 0$ donc $\mathrm{Id}_H = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$,
or H est de dimension $m \geqslant 1$ donc il existe $e \in H$ tel que $e \neq 0_H$
et en évaluant les deux membres de l'égalité $\mathrm{Id}_H = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$ en e, on obtient $e = 0_H$, ce qui est une contradiction.
Par conséquent, P n'est pas constant donc $\deg P \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } P \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P(h) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)} \text{ et } 1 \leqslant \deg P \leqslant m^2.}$

(b) En notant $d \in \mathbb{N}^*$ le degré de P, $c \in \mathbb{C}^*$ son coefficient dominant et en admettant le théorème de D'Alembert-Gauss qui donne l'existence de $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$ tels que $P(X) = c \displaystyle\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$, montrer qu'il existe $k_0 \in [\![1, d]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(h - \lambda_{k_0} \mathrm{Id}_H) \neq \{0_H\}$.

En prenant l'image de la forme factorisée de P par le morphisme d'évaluation en h (morphisme d'anneaux/de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)$), on obtient

$$c.(h - \lambda_1 \mathrm{Id}_H) \circ (h - \lambda_2 \mathrm{Id}_H) \circ \cdots \circ (h - \lambda_n \mathrm{Id}_H) = P(h) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$$

or $c \neq 0$ (par définition d'un coefficient dominant) donc

$$(h - \lambda_1 \mathrm{Id}_H) \circ (h - \lambda_2 \mathrm{Id}_H) \circ \cdots \circ (h - \lambda_n \mathrm{Id}_H) = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$$

Par l'absurde, supposons que $\forall k \in [\![1, d]\!]$, $\mathrm{Ker}(h - \lambda_k \mathrm{Id}_H) = \{0_H\}$.
Alors, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $h - \lambda_k \mathrm{Id}_H$ est un endomorphisme injectif de l'espace vectoriel H.
On en déduit que $(h - \lambda_1 \mathrm{Id}_H) \circ (h - \lambda_2 \mathrm{Id}_H) \circ \cdots \circ (h - \lambda_n \mathrm{Id}_H)$ est aussi un endomorphisme injectif de H
(une composée d'injections est une injection)
donc $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}$ est un endomorphisme injectif de H, donc $\mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}) = \{0_H\}$,
or $\mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(H)}) = H$ donc $H = \{0_H\}$ donc $m = \dim_{\mathbb{C}} H = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $m \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, il existe } k_0 \in [\![1, d]\!] \text{ tel que } \mathrm{Ker}(h - \lambda_{k_0} \mathrm{Id}_H) \neq \{0_H\}.}$

III.2. **Existence d'un endomorphisme de rang 1 dans $\mathcal{A}$.**

(a) Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de E.
Posons $A_x = \{a(x) \mid a \in \mathcal{A}\}$.
Montrer que A_x est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$ et en déduire l'existence de $a \in \mathcal{A}$ tel que $a(x) = y$.

- — $A_x \subset E$ par construction et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  — $A_x \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc elle contient le vecteur nul de cet espace) donc $0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E \in A_x$.

— Soient $(t_1,t_2)\in A_x^2$ et $\lambda\in\mathbb{C}$.
Il existe $(a_1,a_2)\in\mathcal{A}^2$: $t_1=a_1(x)$ et $t_2=a_2(x)$ si bien que

$$\lambda t_1+t_2=\lambda.a_1(x)+a_2(x)=(\lambda.a_1+a_2)(x)$$

or $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc $\lambda.a_1+a_2\in\mathcal{A}$ donc $\lambda t_1+t_2\in A_x$.

Ainsi, A_x est un sous-espace vectoriel de E.

- Soit $b\in\mathcal{A}$ fixé.
Soit $t\in A_x$ fixé. Il existe $a\in\mathcal{A}$: $t=a(x)$ donc $b(t)=b(a(x))=(b\circ a)(x)$, or $\mathcal{A}$ est une algèbre donc $b\circ a\in\mathcal{A}$ si bien que $b(t)\in A_x$.

Ainsi, A_x est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$.

Par hypothèse $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible donc les seuls sous-espaces vectoriels de E qu'elle stabilise sont $\{0_E\}$ et E donc A_x est l'un de ces deux sous-espaces vectoriels de E.
Par l'absurde, supposons que $A_x=\{0_E\}$. Alors x appartient au noyau de tous les endomorphismes de $\mathcal{A}$ donc

$$\forall a\in\mathcal{A}\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}\ ,\ a(\lambda.x)=\lambda.a(x)=\lambda.0_E=0_E\in\mathrm{Vect}\{x\}$$

donc $\mathcal{A}$ stabilise la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\{x\}$, or $\mathrm{Vect}\{x\}\neq\{0_E\}$ (car $x\neq 0_E$) et $\mathrm{Vect}\{x\}\neq E$ (car $\mathrm{Vect}\{x\}$ est de dimension 1 tandis que E est de dimension $n\geqslant 2$) d'où une contradiction avec l'irréductibilité de $\mathcal{A}$.

Par conséquent, $A_x=E$ si bien que $y\in A_x$.

Ainsi, il existe $a\in\mathcal{A}$ tel que $a(x)=y$.

(b) Soit $b\in\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(b)\geqslant 2$.

i. Montrer l'existence de $(x,y)\in E^2$ tels que $(b(x),b(y))$ est une famille libre de E.

$\dim\mathrm{Im}b=\mathrm{rg}(b)\geqslant 2$ or $\mathrm{Im}b$ est un sous-espace vectoriel de E donc sa dimension d appartient à $[\![2,n]\!]$ ($n=\dim E$). Le théorème d'existence de base en dimension finie appliqué au sous-espace $\mathrm{Im}b$ permet de choisir une base $(t_1,\dots,t_d)$ de $\mathrm{Im}b$. Notons $x\in E$ et $y\in E$ des antécédents de t_1 et t_2 respectivement : $b(x)=t_1$ et $b(y)=t_2$.
Alors la famille $(b(x),b(y))=(t_1,t_2)$ est libre car c'est une sous-famille de la famille libre $(t_1,\dots,t_d)$ (qui est une base de $\mathrm{Im}b$).

Ainsi, il existe $(x,y)\in E^2$ tels que $(b(x),b(y))$ est une famille libre de E.

---

ii. Justifier l'existence d'un endomorphisme $a\in\mathcal{A}$ tel que $(a\circ b)(x)=y$.

Si $b(x)=0_E$, alors la famille $(b(x),b(y))=(0_E,b(y))$ est liée (car contient le vecteur nul) ce qui est une contradiction donc $b(x)\neq 0_E$.
Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question III.2(a) pour $(x,y)\leftarrow(b(x),y)$: il existe $a\in\mathcal{A}$: $a(b(x))=y$.

Ainsi, il existe un endomorphisme $a\in\mathcal{A}$ tel que $(a\circ b)(x)=y$.

---

iii. Vérifier que $b\circ a$ se restreint à $\mathrm{Im}b$ au départ et à l'arrivée en un endomorphisme de $\mathrm{Im}b$ que l'on notera $\widetilde{h}$.

Il suffit de rappeler que $b\circ a$ est un endomorphisme de E (en tant que composée de deux endomorphismes de E) et de montrer qu'il stabilise $\mathrm{Im}b$.
Soit $t\in\mathrm{Im}b$ fixé. Il existe $z\in E$: $t=b(z)$.
Observons alors que $(b\circ a)(t)=(b\circ a)(b(z))=b\big((a\circ b)(z)\big)\in\mathrm{Im}b$.
Par conséquent, $(b\circ a)(\mathrm{Im}b)\subset\mathrm{Im}b$.

Ainsi, $b\circ a$ se restreint à $\mathrm{Im}b$ au départ et à l'arrivée en un endomorphisme de $\mathrm{Im}b$.

---

iv. En appliquant à $\widetilde{h}$ le résultat de la question III.1, montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $0<\mathrm{rg}(b\circ a\circ b-\lambda b)<\mathrm{rg}(b)$.

— L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de son espace d'arrivée donc $\mathrm{Im}b$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
— Par hypothèse, $\dim\mathrm{Im}b=\mathrm{rg}b\geqslant 2$ donc $\dim\mathrm{Im}b\geqslant 1$.
— Par construction, $\widetilde{h}$ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}b$.

Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question III.1, pour $(H,h)\leftarrow(\mathrm{Im}b,\widetilde{h})$:

$$\exists\lambda_0\in\mathbb{C}\ :\ \mathrm{Ker}(\widetilde{h}-\lambda_0\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}b})\neq\{0_{\mathrm{Im}b}\}$$

Cela nous permet de choisir $t_0\in\mathrm{Im}b$ tel que $(\widetilde{h}-\lambda_0.\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}b})(t_0)=0_{\mathrm{Im}b}$ donc $(b\circ a)(t_0)-\lambda_0.t_0=\widetilde{h}(t_0)-\lambda_0.t_0=0_E$.
Or $t_0\in\mathrm{Im}b$ donc il existe $x_0\in E$: $t_0=b(x_0)$ si bien que

$$(b\circ a)(b(x_0))-\lambda_0.b(x_0)=0_E\quad\text{donc}\quad(b\circ a\circ b-\lambda_0.b)(x_0)=0_E$$

Considérons l'endomorphisme $b\circ a\circ b-\lambda_0.b$.

$\star$ $b \circ a \circ b - \lambda_0.b = (b \circ a - \lambda_0.\mathrm{Id}_E) \circ b$ donc $\mathrm{Ker} b \subset \mathrm{Ker}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)$.
De plus,
— par construction, $(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)(x_0) = 0_E$ donc $x_0 \in \mathrm{Ker}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)$,
— par construction, $b(x_0) = t_0 \neq 0_E$ donc $x_0 \notin \mathrm{Ker} b$,
donc l'inclusion de $\mathrm{Ker} b$ dans $\mathrm{Ker}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)$ est stricte donc

$$\dim \mathrm{Ker} b < \dim \mathrm{Ker}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b) \quad \text{donc} \quad n - \dim \mathrm{Ker}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b) < n - \dim \mathrm{Ker} b$$

si bien que le théorème du rang appliqué aux endomorphismes $b \circ a \circ b - \lambda_0.b$ et b donne

$$\mathrm{rg}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b) < \mathrm{rg}(b)$$

$\star$ $(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)(x) = \underbrace{b\big((a \circ b)(x)\big)}_{= b(y) \text{ par choix de } a} - \lambda_0.b(x) = b(y) - \lambda_0.b(x)$,
or la famille $(b(x), b(y))$ est libre donc cette combinaison linéaire de coefficients $(1, -\lambda_0) \neq (0,0)$ est différente du vecteur nul de E, donc $(b \circ a \circ b - \lambda_0.b)(x) \neq 0_E$,
donc $\mathrm{Im}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b) \neq \{0_E\}$ donc $\mathrm{rg}(b \circ a \circ b - \lambda_0.b) \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \mathrm{rg}(b \circ a \circ b - \lambda b) < \mathrm{rg}(b).}$$

(c) Justifier que $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ puis en déduire soigneusement l'existence d'un endomorphisme de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

Il est immédiat de vérifier que $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc la question posée « mérite » de l'être.

- Il existe x_0 un vecteur non nul de E car $\dim E = n \geqslant 2$ donc $\dim E \geqslant 1$. Alors $\mathrm{Vect}\{x_0\}$ est
  — $\mathrm{Vect}\{x_0\}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (car (x_0) en est une base) donc $\mathrm{Vect}\{x_0\} \neq \{0_E\}$ et $\mathrm{Vect}\{x_0\} \neq E$ (car $\{0_E\}$ et E sont de dimensions respectives 0 et $n \geqslant 2$ donc différentes de 1).
  — $0_{\mathcal{L}(E)}(\mathrm{Vect}\{x_0\}) = \{0_E\} \subset \mathrm{Vect}\{x_0\}$ donc $\mathrm{Vect}\{x_0\}$ est $\mathcal{A}$-stable.
  Par conséquent, $\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ admet un sous-espace stable différent de $\{0_E\}$ et de E donc ce n'est pas une sous-algèbre irréductible.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}.}$$

- Par l'absurde, supposons que $\mathcal{A}$ ne possède pas d'endomorphisme de rang 1.
  L'ensemble $\{\mathrm{rg}(a) \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\}\}$ est
  — une partie de $\mathbb{N}^*$ car le rang d'un endomorphisme non nul d'un espace de dimension n est un entier naturel non nul,
  — non vide car $\mathcal{A}$ étant un sous-espace vectoriel, il est non vide et puisque, d'après la première partie de la question, $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, il existe $d \in \mathcal{A} : d \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\mathrm{rg}(d)$ appartient à l'ensemble considéré.
  Par conséquent, il admet un plus petit élément $r_0 = \min\{\mathrm{rg}(a) \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\}\}$ et, par définition du plus petit élément d'un ensemble,

  $$\exists d_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\} \ : \ \mathrm{rg}(d_0) = r_0$$

  Puisque $\mathcal{A}$ ne possède pas d'endomorphisme de rang 1, sachant que $\mathrm{rg}(d_0) \geqslant 1$ (car $d_0 \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}$), $\mathrm{rg}(d_0) \geqslant 2$. Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question III.2(b) pour $b \leftarrow d_0$:

  $$\exists (a, \lambda) \in \mathcal{A} \times \mathbb{C} \ : \ 0 < \mathrm{rg}(d_0 \circ a \circ d_0 - \lambda d_0) < \mathrm{rg}(d_0) \quad \text{donc} \quad 0 < \mathrm{rg}(d_0 \circ a \circ d_0 - \lambda d_0) < r_0 \tag{2}$$

  Or, $\mathcal{A}$ étant une sous-algèbre, elle est stable d'une part par composition donc $(d_0 \circ a \circ d_0, d_0) \in \mathcal{A}^2$, et d'autre part par combinaison linéaire donc

  $$d_1 = d_0 \circ a \circ d_0 - \lambda d_0 \in \mathcal{A}$$

  et vérifie $0 < \mathrm{rg}(d_1)$ donc $d_1 \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}$ donc $d_1 \in \{\mathrm{rg}(a) \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\}\}$ si bien que

  $$r_0 = \min\{\mathrm{rg}(a) \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}\}\} \leqslant \mathrm{rg}(d_1) \quad \text{donc} \quad r_0 \leqslant \mathrm{rg}(d_1)$$

  ce qui contredit la relation (2) qui donne $\mathrm{rg}(d_1) < r_0$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A} \text{ contient au moins un endomorphisme de rang 1.}}$$

III.3. **Construction d'une base de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes de $\mathcal{A}$.**
On note, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E^{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient d'indices (i,j) qui vaut 1.
Reprenons le résultat de la question III.2 et notons a_0 un endomorphisme de rang 1 de $\mathcal{A}$.

(a) Établir l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice de a_0 relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme $\left[\begin{array}{c|c|c|c} C & 0_{n,1} & \ldots & 0_{n,1} \end{array}\right]$ où C est une matrice colonne non nulle.

$\mathrm{rg}(a_0) = 1$ donc le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}\, a_0 = \dim E - \mathrm{rg} a_0 = n - 1$.
Le théorème d'existence de base en dimension finie permet de choisir une base $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, a_0$.
Le théorème de la base incomplète permet de compléter la famille libre $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$ constituée de $n-1$ vecteurs en une base de E que l'on note $\mathcal{B}$ par l'adjonction d'un vecteur e_1 (car $\dim_{\mathbb{C}} E = n$).
Considérons la matrice M de a_0 dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

— Le vecteur e_1 n'appartient pas au noyau de a_0
(sinon il serait combinaison linéaire des vecteurs $e_2, e_3, \ldots, e_n$ ce qui contredit la liberté de la famille $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$)
donc $a_0(e_1)$ n'est pas le vecteur nul donc la première colonne C de M, qui est constituée des composantes de $a_0(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$, n'est pas la colonne nulle.
— Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, le vecteur e_j appartient au noyau de a_0, donc la j-ème colonne de M est la colonne nulle.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, il existe une base } \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{mat}(a_0, \mathcal{B}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} C & 0_{n,1} & \ldots & 0_{n,1}\end{array}\right] \\ \text{où } C \text{ est une matrice colonne non nulle.}\end{array}}$$

(b) Justifier l'existence d'un endomorphisme a_1 de $\mathcal{A}$ tel que $\mathrm{mat}(a_1 \circ a_0, \mathcal{B}) = E^{1,1}$. On pourra utiliser le résultat de la question III.2(a).

En reprenant les notations de la question précédente, $a_0(e_1) \neq 0_E$ (car $e_1 \notin \mathrm{Ker}(a_0)$) ce qui permet d'appliquer le résultat de la question III.2(a) pour $(x, y) \leftarrow (a_0(e_1), e_1)$: il existe $a_1 \in \mathcal{A}$ tel que $a_1(a_0(e_1)) = e_1$.
Déterminons la matrice A de $a_1 \circ a_0$ dans la base $\mathcal{B}$.
— $(a_1 \circ a_0)(e_1) = a_1(a_0(e_1)) = e_1$ (par construction de a_1) donc la première colonne de A, constituée des coordonnées de e_1 dans $\mathcal{B}$ est $[1\ 0\ \ldots\ 0]^T$.
— Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, le vecteur e_j appartient au noyau de a_0, donc $(a_1 \circ a_0)(e_j) = a_1(0_E) = 0_E$ si bien que la j-ème colonne de A est la colonne nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe un endomorphisme } a_1 \text{ de } \mathcal{A} \text{ tel que } \mathrm{mat}(a_1 \circ a_0, \mathcal{B}) = E^{1,1}.}$$

On montre alors de même l'existence d'endomorphismes a_2, ..., a_n de $\mathcal{A}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{mat}(a_i \circ a_0, \mathcal{B}) = E^{i,1}$.
Notons $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la famille des formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ de sorte que tout vecteur x de E s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x).e_i$$

(c) Posons $F = \{x \in E \mid \forall a \in \mathcal{A}\ ,\ e_1^*(a(x)) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par $\mathcal{A}$ puis en déduire que $F = \{0_E\}$.

- — $F \subset E$ par construction et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
  — $F \neq \emptyset$ car $\forall a \in \mathcal{A}\ ,\ e_1^*(a(0_E)) = 0$ donc $0_E \in F$.
  — Soient $(x_1, x_2) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\forall a \in \mathcal{A}\ ,\ e_1^*(a(\lambda.x_1 + x_2)) = \lambda.e_1^*(a(x_1)) + e_1^*(a(x_2)) \underbrace{=}_{(x_1, x_2) \in F^2} \lambda. \times 0 + 0 = 0$$

  donc $\lambda.x_1 + x_2 \in F$.
- Soit $b \in \mathcal{A}$ fixé.
  Soit $x \in F$ fixé.

$$\forall a \in \mathcal{A}\ ,\ e_1^*(a(b(x))) = e_1^*\big((a \circ b)(x)\big) \underbrace{=}_{\substack{a \circ b \in \mathcal{A} \text{ car } \mathcal{A} \text{ est une algèbre} \\ x \in F}} 0$$

  donc $b(x) \in F$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ stable par } \mathcal{A}.}$$

Remarque : un autre argument pour justifier que F est un sous-espace vectoriel de E consiste à observer que c'est une intersection de sous-espaces vectoriels de E (qui sont tous des noyaux de formes linéaires) : $F = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} \mathrm{Ker}(e_1^* \circ a)$.

Par hypothèse $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible donc les seuls sous-espaces vectoriels de E qu'elle stabilise sont $\{0_E\}$ et E donc F est l'un de ces deux sous-espaces vectoriels de E.
Par l'absurde, supposons que $F = E$. Alors e_1 appartient à F donc

$$\forall a \in \mathcal{A}\ ,\ e_1^*(a(e_1)) = 0$$

En particulier, puisque $a_1 \circ a_0 \in \mathcal{A}$ (composée de deux endomorphismes de la sous-algèbre $\mathcal{A}$), on obtient pour $a \leftarrow a_1 \circ a_0$

$$e_1^*(\underbrace{(a_1 \circ a_0)(e_1)}_{= e_1}) = 0 \quad \text{donc} \quad 1 = 0 \quad \text{ce qui est une contradiction.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F = \{0_E\}.}$$

(d) Posons $G = \{(e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)) \ldots, e_1^*(a(e_n))) \in \mathbb{K}^n \mid a \in \mathcal{A}\}$.
i. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ dont la dimension notée p est supérieure ou égale à 1.

- — $G \subset \mathbb{C}^n$ par construction et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

— $G \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)} \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$),
donc $(e_1^*(0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}(e_1)), e_1^*(0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}(e_2)), \dots, e_1^*(0_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)}(e_n))) = 0_{\mathbb{C}^n} \in G$.

— Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n), (z_1', z_2', \dots, z_n') \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Il existe $(a, a') \in \mathcal{A}^2$: $\left\{ \begin{array}{l} (z_1, z_2, \dots, z_n) = (e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)), \dots, e_1^*(a(e_n)))\ , \\ (z_1', z_2', \dots, z_n') = (e_1^*(a'(e_1)), e_1^*(a'(e_2)), \dots, e_1^*(a'(e_n)))\ . \end{array} \right.$

$$\begin{array}{rcl} \lambda.(z_1, z_2, \dots, z_n) + (z_1', z_2', \dots, z_n') & = & \lambda.(e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)), \dots, e_1^*(a(e_n))) + (e_1^*(a'(e_1)), e_1^*(a'(e_2)), \dots, e_1^*(a'(e_n))) \\ & = & (\lambda.e_1^*(a(e_1)), \lambda.e_1^*(a(e_2)), \dots, \lambda.e_1^*(a(e_n))) + (e_1^*(a'(e_1)), e_1^*(a'(e_2)), \dots, e_1^*(a'(e_n))) \\ & = & (e_1^*((\lambda.a)(e_1)), e_1^*((\lambda.a)(e_2)), \dots, e_1^*((\lambda.a)(e_n))) + (e_1^*(a'(e_1)), e_1^*(a'(e_2)), \dots, e_1^*(a'(e_n))) \\ & = & (e_1^*((\lambda.a)(e_1)) + e_1^*(a'(e_1)), e_1^*((\lambda.a)(e_2)) + e_1^*(a'(e_2)), \dots, e_1^*((\lambda.a)(e_n)) + e_1^*(a'(e_n))) \\ & = & (e_1^*((\lambda.a + a')(e_1)), e_1^*((\lambda.a + a')(e_2)), \dots, e_1^*((\lambda.a + a')(e_n))) \end{array}$$

or $\mathcal{A}$ est un sous-epace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ donc $\lambda.a + a' \in \mathcal{A}$ donc $\lambda.(z_1, z_2, \dots, z_n) + (z_1', z_2', \dots, z_n') \in G$.

- Nous savons que $a_1 \circ a_0 \in \mathcal{A}$ donc

$$\underbrace{(e_1^*(\underbrace{(a_1 \circ a_0)(e_1)}_{= e_1}), e_1^*(\underbrace{(a_1 \circ a_0)(e_2)}_{= 0_E}), \dots, e_1^*(\underbrace{(a_1 \circ a_0)(e_n)}_{= 0_E}))}_{= (1, 0, \dots, 0)} \in G$$

donc $G \neq \{0_{\mathbb{C}^n}\}$ donc $\dim_{\mathbb{C}} G \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^n \text{ de dimension } p \geqslant 1.}$$

---

ii. Supposons que $p = \dim_{\mathbb{C}} G < n$ et extrayons une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G : il existe $(c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{A}^p$:

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\ ,\ g_i = (e_1^*(c_i(e_1)), e_1^*(c_i(e_2)), \dots, e_1^*(c_i(e_n)))$$

Posons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $H_i = \mathrm{Ker}(e_1^* \circ c_i)$.

Justifier $\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \geqslant 1$ ce qui permet de choisir $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ tel que $x_0 \neq 0_E$.

Montrer alors que x_0 appartient au sous-espace F étudié dans la question précédente et en déduire la dimension de G.

- Soit $i \in [\![1, p]\!]$ fixé.
$e_1^* \circ c_i$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$ (comme composée de deux applications linéaires) donc c'est une forme linéaire sur E.
Par conséquent, $H_i = \left\{ \begin{array}{l} E \text{ si } e_1^* \circ c_i \text{ est la forme linéaire nulle,} \\ \text{un hyperplan de } E \text{ si } e_1^* \circ c_i \text{ n'est pas la forme linéaire nulle.} \end{array} \right.$
- D'après la decription ci-dessus, $\bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est l'intersection d'au plus p hyperplans de E (si certains des H_i sont égaux à E, ils peuvent être retirés de l'intersection sans modification de cette intersection !) donc (résultat du cours)

$$\dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \geqslant \dim E - p = n - p \geqslant 1 \quad \text{car on a supposé } p < n$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \dim \bigcap_{i=1}^{p} H_i \geqslant 1.}$$

Choisissons alors $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ tel que $x_0 \neq 0_E$.

- Soit $a \in \mathcal{A}$ fixé.
Le vecteur $(e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)), \dots, e_1^*(a(e_n)))$ appartient à G, or $(g_1, \dots, g_p)$ est une base de G donc il existe $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{C}^p$ tels que

$$\begin{array}{rcl} (e_1^*(a(e_1)), e_1^*(a(e_2)), \dots, e_1^*(a(e_n))) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i.g_i \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i.(e_1^*(c_i(e_1)), e_1^*(c_i(e_2)), \dots, e_1^*(c_i(e_n))) \\ & = & \left(e_1^* \left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i \right) (e_1) \right), e_1^* \left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i \right) (e_2) \right), \dots, e_1^* \left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i \right) (e_n) \right) \right) \end{array}$$

donc

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ e_1^*(a(e_k)) = e_1^* \left(\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i \right) (e_k) \right) \tag{3}$$

$x_0 \in E$ donc il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n : x_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.e_k$.

$$\begin{aligned}
e_1^*(a(x_0)) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.e_1^*(a(e_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.e_1^*\left(\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i\right)(e_k)\right) \quad \text{en utilisant les égalités (3)} \\
&= e_1^*\left(\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i.c_i\right)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.e_k\right)}_{=x_0}\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i.e_1^*(c_i(x_0)) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i.\underbrace{(e_1^* \circ c_i)(x_0)}_{=0 \text{ car } x_0 \in H_i = \operatorname{Ker}(e_1^* \circ c_i)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, x_0 appartient au sous-espace F.

- Nous avons établi dans la question III.3(c) que $F = \{0_E\}$ donc $x_0 = 0_E$ ce qui contredit le choix de x_0. L'hypothèse $\dim_{\mathbb{C}} G < n$ est donc fausse si bien que $\dim G \geqslant n$, or $G \subset \mathbb{C}^n$ donc $\dim_{\mathbb{C}} G \leqslant n$ d'où
$$\boxed{\dim_{\mathbb{C}} G = n.}$$

(e) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Déduire de la question précédente l'existence de $b_j \in \mathcal{A}$ tel que la matrice de b_j relativement à $\mathcal{B}$ est de la forme $\left[\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline B_j \end{array}\right]$ où le 1 de la première ligne est situé sur la colonne d'indice j et $B_j \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{C})$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$ fixé.

G étant de dimension n dans $\mathbb{C}^n$, $G = \mathbb{C}^n$ donc $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in G$ (avec le 1 en j-ème position) si bien qu'il existe, par définition de G, $b_j \in \mathcal{A}$ tel que

$$(e_1^*(b_j(e_1)), e_1^*(b_j(e_2)), \ldots, e_1^*(b_j(e_n))) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \ , \ e_1^*(b_j(e_k)) = \delta_{k,j}$$

Considérons la matrice de b_j relativement à la base $\mathcal{B}$. La première ligne de cette matrice est constituée par les coordonnées selon e_1 dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $b_j(e_1), \ldots, b_j(e_n)$ donc la première ligne de cette matrice est

$$[e_1^*(b_j(e_1)), \ldots, e_1^*(b_j(e_{j-1})), e_1^*(b_j(e_j)), e_1^*(b_j(e_{j+1})), \ldots, e_1^*(b_j(e_n))] = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \quad \text{où le 1 est sur la colonne d'indice } j$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } j \in [\![1, n]\!], \text{ il existe } b_j \in \mathcal{A} \text{ tel que } \operatorname{mat}(b_j, \mathcal{B}) = \left[\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline B_j \end{array}\right] \\ \text{où le 1 est sur la colonne d'indice } j \text{ et } B_j \in \mathcal{M}_{n-1,n}(\mathbb{C}).\end{array}}$$

(f) En déduire que l'ensemble des matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices de la famille $(E^{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et conclure.

Combinons les endomorphismes de $\mathcal{A}$ $(a_i \circ a_0)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ construits respectivement dans les questions III.3(b) et III.3(e).

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, posons $w_{i,j} = a_i \circ a_0 \circ b_j$.

— La stabilité pour la loi $\circ$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ permet d'affirmer que $(w_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une famille d'endomorphismes de $\mathcal{A}$.

— Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\operatorname{mat}(w_{i,j}, \mathcal{B}) = \operatorname{mat}(a_i \circ a_0, \mathcal{B}) \times \operatorname{mat}(b_j, \mathcal{B}) = E^{i,1} \times \left[\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline B_j \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ & & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0_{n,1} & \cdots & 0_{n,1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline B_j \end{array}\right] = E^{i,j}$$

Cela signifie que $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$, l'image de la sous-agèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ par le morphisme d'algèbres $\Psi_{\mathcal{B}}$ (défini dans l'introduction) est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (d'après la question I.3(a)) qui contient les n^2 matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}\{E^{i,j} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\} \underbrace{\subset}_{\{E^{i,j} \ \mid\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\} \subset \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})} \text{Vect}\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \underbrace{=}_{\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel}} \Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$$

donc $\Psi_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, or $\Psi_{\mathcal{B}}$ est une bijection (un isomorphisme d'algèbres même !) donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{A} = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E).}$$

IV . Application du théorème de Burnside

Dans cette partie, on exploite le théorème de Burnside afin de faire le lien entre l'espace des matrices magiques et le sous-espace engendré par les matrices de permutation.

• Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que M est **magique** si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante. On note $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{M} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists s \in \mathbb{C} \ :\ \forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ , \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = s\}$$

Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on pose $\mathfrak{M}_s = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ , \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,j} = s\}$.

• Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note f_i (respectivement g_i), la forme linéaire qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe la somme de ses coefficients de la ligne i (respectivement colonne i).

$$\forall\ i \in [\![1,n]\!], \qquad f_i : M = (m_{k,\ell})_{k,\ell} \mapsto \sum_{h=1}^{n} m_{i,h} \qquad \text{et} \qquad g_i : M = (m_{k,\ell})_{k,\ell} \mapsto \sum_{h=1}^{n} m_{h,i}$$

• Si σ est une permutation de $\{1, \dots n\}$, on note p_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini sur la base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^n} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

On note P_σ, la matrice de p_σ dans cette même base.

• On note D la droite dirigée par le vecteur $c := e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans $\mathcal{B}_{c,\mathbb{C}^n}$.

IV.1. Structure de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}_s$.

(a) Montrer que $\mathfrak{M}$ est un espace vectoriel.

Notons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i est linéaires :

$$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f_i(\lambda M + \mu N) = \sum_{h=1}^{n} [\lambda M + \mu N]_{i,h} = \sum_{h=1}^{n} \lambda [M]_{i,h} + \mu [N]_{i,h} = \lambda \sum_{h=1}^{n} [M]_{i,h} + \mu \sum_{h=1}^{n} [N]_{i,h} = \lambda f_i(M) + \mu f_i(N)$$

De même, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, g_i est linéaire.

Puis $M \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $\forall\ i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(M) = g_i(M) = f_1(M)$.

$$\boxed{\mathfrak{M} = \bigcap_{i \in [\![2,n]\!]} \text{Ker}(f_i - f_1) \cap \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \text{Ker}(g_i - f_1). \text{ C'est bien un espace vectoriel.}}$$

On peut également raisonner simplement par stabilité par combinaison linéaire.

(b) Est-ce que $\mathfrak{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Soit $M, N \in \mathfrak{M}$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$,

$$f_i(MN) = \sum_{h=1}^{n} [MN]_{i,h} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} [N]_{k,h} = \sum_{k=1}^{n} \left([M]_{i,k} \times \sum_{h=1}^{n} [N]_{k,h} \right) = \sum_{k=1}^{n} ([M]_{i,k} \times f_k(N))$$

Or $N \in \mathfrak{M}$, donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $f_k(N) = f_1(N)$ (constante par rapport à k). Ainsi :

$$f_i(MN) = f_1(N) \times \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} = f_1(N) f_i(M) = f_1(N) f_1(M)$$

Et de même :

$$g_i(MN) = \sum_{h=1}^{n} [MN]_{h,i} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [M]_{h,k} [N]_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \left([N]_{k,i} \times \sum_{h=1}^{n} [M]_{h,k} \right) = \sum_{k=1}^{n} ([N]_{k,i} \times g_k(M))$$

Or $M \in \mathfrak{M}$, donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $g_k(M) = g_1(M)$ (constante par rapport à k). Ainsi :

$$g_i(MN) = g_1(M) \times \sum_{k=1}^{n} [N]_{k,i} = g_1(M)g_i(N) = g_1(M)g_1(N) = f_1(M)f_1(N)$$

car $f_1(M) = g_1(M)$ et $f_1(N) = g_1(N)$ car $M, N \in \mathfrak{M}$.
Ainsi, $MN \in \mathfrak{M}$

$$\boxed{\mathfrak{M} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

(c) Démontrer que $(f_1, \cdots f_n, g_1, \cdots g_n)$ est liée mais que $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \cdots, g_{n-1})$ est libre.
Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on note $\mathfrak{M}_s$, le sous-ensemble de $\mathfrak{M}$ formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et la somme des éléments de chaque colonne vaut s.

Notons, que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(M) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} [M]_{k,h} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} [M]_{k,h} = \sum_{h=1}^{n} g_h(M)$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{h=1}^{n} g_h = 0$.
Nous avons une combinaison linéaire non triviale de $(f_1, \cdots f_n, g_1, \cdots g_n)$ égale à 0, donc

$$\boxed{(f_1, \cdots f_n, g_1, \cdots g_n) \text{ est liée.}}$$

Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \mu, \ldots \mu_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i = 0$.
Soit $E_{h,k}$, la matrice ayant exactement un seul 1 en ligne h et colonne k, les autres coefficients étant nuls.
Alors $f_i(E_{h,k}) = \delta_{i,h}$ et $g_i(E_{h,k}) = \delta_{i,k}$, on a donc (pour $k = n$) :

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i\right)(E_{h,n}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(E_{h,n}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i(E_{h,n}) = \lambda_h + 0$$

Ainsi, pour tout $h \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_h = 0$. Et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i = 0$.
En $E_{1,k}$, pour $k \leqslant n - 1$:

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i\right)(E_{1,k}) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i(E_{1,k}) = \mu_k$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mu_k = 0$.

$$\boxed{(f_1, \cdots f_n, g_1, \cdots g_{n-1}) \text{ est libre.}}$$

(d) En déduire que $\mathfrak{M}_0 = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} g_i\right)$.

Il est clair que $\mathfrak{M}_0 = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} g_i\right)$,

puisque appartenir à $\mathfrak{M}_0$ signifie exactement avoir toutes les sommes nulles.
Mais comme $g_n \in \mathrm{vect}(f_1, \ldots f_n, g_1, \ldots g_{n-1})$,

$$M \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} g_i\right) \Rightarrow g_n(M) = 0 \Rightarrow M \in \mathrm{Ker} g_n$$

Donc $\mathfrak{M}_0 = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} g_i\right) \subset \mathfrak{M}_0 = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} g_i\right)$.
L'inclusion réciproque est évidente.

$$\boxed{\mathfrak{M}_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker} f_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ker} g_i\right)}$$

(e) Déterminer la dimension du sous-espace $\mathfrak{M}_0$.
Pour $s \in \mathbb{C}^*$, quelle est la structure de $\mathfrak{M}_s$?

En reprenant ce que l'on a trouvé on a :

$$\mathfrak{M}_0 = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \mathrm{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \mathrm{Ker}(g_i) = \bigcap_{i\in[\![2,n]\!]} \mathrm{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{i\in[\![1,n-1]\!]} \mathrm{Ker}(g_i)$$

Nous avons vu que pour toute forme linéaire φ définie sur E et F sev de E de dimension p,
- ou bien $\varphi|_F = 0_{\mathcal{L}(F,\mathbb{C})}$ et donc $F \subset \mathrm{Ker}\varphi$ et alors $F \cap \mathrm{Ker}\varphi = F$
- ou bien $\varphi|_F \neq 0_{\mathcal{L}(F,\mathbb{C})}$ (i.e. $\exists\ a \in F$ tel que $\varphi(a) \neq 0$) et alors $\dim(F \cap \mathrm{Ker}\varphi) = p - 1$.

Notons, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $F_k = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i$.

La matrice $E_{k+1,h} \in F_k$, mais $f_{k+1}(E_{k+1,h}) = 1 \neq 0$, donc $\dim(F_{k+1}) = \dim(\mathrm{Ker} f_{k+1} \cap F_k) = \dim F_k - 1$.
Et ainsi, par récurrence immédiate, $\dim F_k = n^2 - k$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Puis, notons pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, $G_k = F_n \cap \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} g_i$.

La matrice $E_{n,k+1} - E_{n,n} \in G_k$ mais $g_{k+1}(E_{n,k+1} - E_{n,n}) \neq 0$ donc $\dim G_{k+1} = \dim G_k - 1$.
Donc (récurrence immédiate) : $\dim G_k = n^2 - n - k$, en particulier

$$\boxed{\mathfrak{M}_0 = G_{n-1} \text{ et } \dim(\mathfrak{M}_0) = n^2 - n - (n-1) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2}$$

La matrice $I_n \in \mathfrak{M}_1$ et la matrice $sI_n \in \mathfrak{M}_s$.
Par linéarité des f_i et g_j : $M \in \mathfrak{M}_s \iff M - sI_n \in \mathfrak{M}_0$.

$$\boxed{\mathfrak{M}_s \text{ est l'espace affine : } sI_n + \mathfrak{M}_0.}$$

(f) Quelle est la dimension de $\mathfrak{M}$?

On a l'équivalence : $M \in \mathfrak{M}$ si et seulement si $\exists\ s \in \mathbb{C}$ tel que $M \in \mathfrak{M}_s$.
Ainsi, si $(M_k)_{k\in[\![1,(n-1)^2]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_0$,

$$M \in \mathfrak{M} \iff \exists\,!(s, (a_k)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{(n-1)^2} \text{ tels que } M = sI_n + \sum_{k=1}^{(n-1)^2} a_k M_k$$

Et donc $(I_n, M_1, \dots M_{(n-1)^2})$ est une base de $\mathfrak{M}$.

$$\boxed{\dim \mathfrak{M} = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2}$$

(g) Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ est inclus dans $\mathfrak{M}$.

Pour tout $\sigma \in S_n$, $ME_i = E_{\sigma(i)}$, et donc il n'y a qu'un unique 1 en colonne i, celui se trouve en ligne $\sigma(i)$.
De même comme σ est bijective, il n'y a qu'un unique 1 en ligne j, celui qui se trouve en colonne $\sigma^{-1}(j)$.
Ainsi, pour tout P_σ, la somme des coefficients sur ses lignes ou ses colonnes vaut 1.

$$\boxed{P_\sigma \in \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}.}$$

IV.2. Action sur H et D.
Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base $\mathcal{C}$, alors

$$M \in \mathfrak{M} \iff H \text{ et } D \text{ sont } m\text{-stables}$$

Commençons par réinterpréter par le calcul les deux faits : D est m-stable et Hest m-stables.
D est la droite dirigée par $c = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, ie. $D = \mathrm{vect}(c)$.
Dans la base canonique la matrice de c est C, matrice colonne constitueé que de 1.
D est m-stable est équivalent à : $m(c) \in D$, puisque tout élément de D est colinéaire à c.

Cela correspond à la relation matricielle : $\exists\ s \in \mathbb{C}$ tel que $M \times C = sC$ ie en ligne i : $\sum_{h=1}^{n} [M]_{i,h} = s$.

Bilan : D est stable par m si et seulement si $\exists\ s \in \mathbb{C}$ tel que $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(M) = s$.
H est l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \dots x_n = 0$, dans la base canonique.

H est m-stable est équivalent à $\forall\ x = (x_1, \dots x_n)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ et $y = m(x)$, alors $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$.

Or, matriciellement, le calcul $y = m(x)$ correspond au calcul $Y = M \times X$
où X est la matrice colonne avec en ligne i, le nombre x_i.

Donc $m(x)$ a pour matrice dans la base canonique Y, avec en ligne i : $y_i = [Y]_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} x_k$.

Dans ce cas $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} [M]_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} g_k(M) x_k$.

Ainsi (avec les mêmes notations) :

- Si $M \in \mathfrak{M}$.

  Alors en notant $s = f_1(M)$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(M) = s$, donc D est m-stable.

  Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $g_k(m)$ est constante (égale à s) donc $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{k=1}^{n} s x_k = s \sum_{k=1}^{n} x_k = s \times 0 = 0$.

  Et donc H est également stable par m.
- Réciproquement, si D et H sont m-stables.

  Alors $\exists\, s \in \mathbb{C}$ tel que $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(M) = S$ (d'après l'analyse).

  Mais aussi, pour tout (x_i) tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} g_k(M) x_k = 0$.

  En particulier en considérant x, tel que $x_i = 1$, $x_n = -1$, on a bien $x \in H$ et $\sum_{k=1}^{n} g_k(M) x_k = g_i(M) - g_n(M) = 0$.

  Et donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $g_i(M)$ est constant, notons $t = g_n(M)$.

  Alors en sommant tous les termes de la matrice, on trouve $\sum_{i,j} [M]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} f_i(M) = ns = \sum_{j=1}^{n} g_j(M) = nt$.

  Ainsi nécessairement $s = t$ et donc $M \in \mathfrak{M}$

$$\boxed{M \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow H \text{ et } D \text{ sont } m\text{-stables.}}$$

IV.3. Application du théorème de Burnside sur $\mathcal{L}(H)$.

(a) Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ parcourt toutes les permutations de $\{1,\dots,n\}$ sont $\{0\}$, la droite D, l'hyperplan H de $\mathbb{C}^n$.
Pour étudier F stable par $\{p_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, on peut raisonner sur la dimension de F.
Dans le cas où $\dim F > 2$, on commence par montrer qu'il existe (i,j) tel que $e_i - e_j \in F$, puis $H \subset F$.

Notons déjà que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$P_\sigma \in \mathfrak{M}$, donc $\{0\}$, D, H et $E = \mathbb{C}^n$ sont stables par p_σ, d'après la question précédente.
Supposons que F soit stable par p_σ.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (dans la base canonique), alors $p(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(e_i) = \sum_{i=1} n x_i e_{\sigma(i)}$.

- Si $\dim F = 1$, alors notons x un vecteur directeur de la droite F.

  Comme F est p_σ-stable, alors il existe $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i e_{\sigma(i)} = \lambda_\sigma \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \lambda_\sigma \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)}$.

  Par unicité d'écriture dans la base $(e_1, \dots e_n)$, $x_i = \lambda_\sigma x_{\sigma(i)}$.
  Mais cette relation est vraie pour tout σ, donc avec $\sigma = (i\ j)$, on $\lambda_\sigma = 1$ (en $k \notin \{i,j\}$) puis $x_i = x_j$.
  Cette dernière relation $x_i = x_j$ est indépendante de σ, elle est vraie pour $x \in F$. Et donc $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$.

Notons que cela nécessite que $n \geqslant 3$, sinon on pourrait avoir $\lambda = -1$ et $F = vect(e_1 - e_2)\dots$

- Si $\dim F > 1$.

  Soit $x \in F$ tel que $\exists\, i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $x_i \neq x_j$, sinon $F = D$ et donc $\dim F = 1$.

  En prenant de nouveau $\sigma = (i\ j)$, on a $\sum_{k=1}^{n} x_k e_\sigma(k) \in F$, donc $\sum_{k=1}^{n} x_k e_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)} \in F$.

  Et donc $x_i e_j + x_j e_i - x_j e_j - x_i e_i \in F$ i.e. $(x_i - x_j)(e_j - e_i) \in F$ ainsi $e_j - e_i \in F$ car $x_i - x_j \neq 0$.
  Puis avec $\sigma = (k\ j)$ et $x = e_j - e_i$, on a $p_\sigma(x) = e_k - e_i \in F$, donc pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $\overline{e_k} = e_k - e_i \in F$.
  Ainsi $\mathrm{vect}(\overline{e_k})_{k \neq i} \subset F$. Or $H = \mathrm{vect}(\overline{e_k})$, donc $H \subset F$
  Pour des raisons de dimension, les seuls sous-espaces de E qui contiennent H sont H et E.

$$\boxed{\text{Les seuls sous-espaces de } \mathbb{C}^n \text{ stables par } \{p_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \text{ sont : } \{0\},\ D,\ H \text{ et } E = \mathbb{C}^n.}$$

(b) Pour toute permutation σ de $\{1, \dots n\}$, on note $p_\sigma|_H$ la restriction de p_σ à H.
En utilisant le théorème de Burnside admis en début d'énoncé, démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}|_H$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots \lambda_N \in \mathbb{C}$ et $\sigma_1, \dots \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots n\}$.

Considérons $L = \text{vect}\{p_\sigma|_H, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, le sous-espace vectoriel engendré par les $p_\sigma||_H$.

Considérons $s \in L$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$, $\sigma_1, \dots \sigma_N \in \mathfrak{S}_n$, $\lambda_1 \dots \lambda_N \in \mathbb{C}$ tel que $s = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}|_H$.

Soit $p_\tau|_H$, on a par linéarité :

$$p_\tau|_H \circ s = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_\tau|_H \circ p_{\sigma_i}|_H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\tau\circ\sigma_i}|_H \in L$$

Puis, par combinaison linéaire, pour tout s_1, $s_2 \in L$, $s_1 \circ s_2$ est également un élément de L.
Finalement L est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.
Elle est irréductible, car si F est L-stable, elle est nécessairement stable par les éléments p_σ,
donc $F \in \{\{0\}, D, H, E\}$, mais $F \subset H$ nécessairement, donc $F = \{0\}$ ou $F = H$ $(D \cap H = \{0\})$.

$$\boxed{\text{On peut donc appliquer le théorème de Burnside : } L = \text{vect}\{p_\sigma|_H, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \mathcal{L}(\mathbb{C})}$$

La famille $(p_\sigma|_H)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ est une famille génératrice de L, par construction.
(Notons, que c'est une famille finie de $n!$ éléments, mais cela ne change rien. . .)
On peut donc en extraire une famille génératrice minimale donc une base de L et donc de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$.
Si cette famille de N éléments se nomme $(p_{\sigma_i}|_H)_{1\leqslant i\leqslant N}$, $\sigma_1, \dots \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots n\}$, on peut écrire

$$\boxed{\forall\ f \in \mathcal{L}(H), \exists\ (\lambda_1, \dots \lambda_N) \in \mathbb{C}^N\ :\ f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}|_H}$$

IV.4. Conclusion

(a) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Montrer que $\dfrac{u}{n}$ est un projecteur. Quel est son rang ? Exprimer Im u et Ker u en fonction de D et H.

Si U est la matrice carrée associée à u, un calcul direct donne $U^2 = nU$.
Donc $\left(\dfrac{1}{n}U\right)^2 = \dfrac{1}{n^2}U^2 = \dfrac{1}{n^2}(nU) = \dfrac{1}{n}U$.
Donc $\dfrac{1}{n}U$ est la matrice d'une projection,

$$\boxed{\text{donc } \frac{1}{n}u \text{ est un projecteur.}}$$

Le rang de U, qui ne possède que des colonnes identiques (égale à C de 2.(b)) est inférieure ou égale à 1.
Comme cette colonne est non nulle, son rang est supérieur à 1, donc le rang de U est 1.

$$\boxed{\text{Le rang de } u, \text{ de } \frac{1}{p}u \text{ est donc 1.}}$$

Autre méthode : $p = \dfrac{1}{n}u$ est un projecteur donc son rang est égal à sa trace :

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(p) = \text{tr}(p) = \frac{1}{n}\text{tr}(u) = \frac{1}{n}n = 1$$

ImU = vect$C$ où C est la matrice colonne avec que des 1, c'est la matrice de c, donc

$$\boxed{\text{Im}u = \text{vect}(c) = D, \text{ la droite dirigée par } e_1 + e_2 + \dots + e_n.}$$

Enfin (le calcul est écrit dans la base canonique) :

$$x \in \text{Ker } u \iff U \times X = 0 \iff \forall\ i \in [\![1, n]\!], \sum_{k=1}^{n} [U]_{i,k} x_k = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff x \in H$$

$$\boxed{\text{Ker } u = H}$$

(b) Soit $M \in \mathfrak{M}$ et m, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé.
Démontrer l'existence de N dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$, $\sigma_1, \dots \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots n\}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$$

On exploitera les deux questions précédentes, après avoir montré que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $p_\sigma(z) = z$ si $z \in D$.

Puisque $M \in \mathfrak{M}$, d'après 2, H et D sont m stable.
D'après la question précédente, avec $p = \dfrac{u}{n}$, p est un projecteur sur $D = \mathrm{Im}p = \mathrm{Im}u$ de direction $H = \mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}u$.
Donc pour tout $x \in E = D \oplus H$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in D} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in H}$ et donc par m-stabilité :

$$m(x) = m(p(x)) + m(x - p(x)) = m|_D(p(x)) + m|_H(x - p(x))$$

Or $p(x) = \dfrac{1}{n}u(x)$ et $m|_H \in \mathcal{L}(H)$, donc d'après 3.(b) : $\exists\ (\lambda_1^m, \dots \lambda_N^m) \in \mathbb{C}^N$ tel que $m|_H = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}|_H$.

(On a noté un m en puissance, pour signifier la dépendance à m).
Avant de faire le calcul qui s'impose $m(x)$, notons selon l'indication que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
alors $p_\sigma(c) = p_\sigma(e_1 + \dots + e_n) = e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(n)} = c$;
donc si $z \in D$, $\exists\ \mu \in \mathbb{C}$ tel que $z = \mu c$, donc (par linéarité) $p_\sigma(z) = \mu p_\sigma(c) = \mu c = z$.
Et par ailleurs, $p(x) \in D$, donc il existe $\nu_x \in \mathbb{C}$ tel que $p(x) = \nu_x c$, donc $m(p(x)) = \nu_x m(p(c)) = \nu_x m(c)$
Or $m(c) \in D$, donc il existe $\alpha^m \in \mathbb{C}$ tel que $m(c) = \alpha^m c$ et donc $m(p(x)) = \nu_x \alpha^m c = \alpha^m \nu_x c = \alpha^m p(x)$.
On notera que α^m ne dépend pas de x...
Ainsi, en passant enfin au calcul attendu (il n'est pas nécessaire de signifier que l'on restreint à H) :

$$\begin{aligned}
m(x) = &\quad m(p(x)) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}|_H(x - p(x)) = \frac{1}{n}m(u(x)) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}(x - p(x)) \\
= &\quad \alpha^m p(x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}(x) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}(\underbrace{p(x)}_{\in D}) \\
= &\quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}(x) + \underbrace{\left[\alpha^m - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m\right]}_{:=n\alpha} p(x) \\
= &\quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m p_{\sigma_i}(x) + \alpha u(x)
\end{aligned}$$

puisque $np = u$ d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi } \exists\ N \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_1, \dots \lambda_N \in \mathbb{C},\ \sigma_1, \dots \sigma_N \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tels que } m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u}$$

(c) Etablir un lien de dépendance linéaire entre l'endomorphisme u et g la somme des endomorphismes p_σ quand σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots n\}$ et en déduire que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendrée par les matrices de permutations ?
Puisque $g = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma$, *montrer que* $\forall\ h \in [\![1, n]\!]$, $g(e_h) = (n-1)!(e_1 + \dots + e_n)$.

Ce qui caractérise u, c'est qu'il est presque la projection sur D de direction H.
Considérons $g = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma$, alors pour $h \in [\![1, n]\!]$,

$$g(e_h) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma(e_h) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n\ \mid\ \sigma(h)=k} e_{\sigma(i)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n\ \mid\ \sigma(h)=k} e_k \right)$$

où l'on a exploité la décomposition de $\mathfrak{S}_n$ en ensembles disjoints selon la valeur de k de $\sigma(h)$.
Or chacun de ces n sous-ensemble à le même nombre d'éléments : $\dfrac{\mathrm{card}(\mathfrak{S}_n)}{n} = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

$$g(e_h) = \sum_{k=1}^{n} e_k \mathrm{card}\left(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = h\}\right) = \sum_{k=1}^{n} (n-1)! e_k = (n-1)! c$$

Si on note G, la matrice de g dans la base canonique, on a donc la colonne h de G qui est une succession de $(n-1)!$.
Ceci étant vrai pour toutes les colonnes : $G = (n-1)! \times U$ et donc

$$\boxed{u = \frac{1}{(n-1)!} g}$$

En reprenant la question précédente, et en remplaçant u par $\dfrac{1}{(n-1)!}g$, on trouve que

$$\boxed{\text{tout } m \in \mathcal{L}(E), \text{ canoniquement associé à une matrice magique, s'écrit comme combinaison linéaire d'endomorphisme } p_\sigma.}$$

Puisque l'inclusion réciproque est vraie :

$$\boxed{\mathfrak{M} = \mathrm{vect}\,(P_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}}$$
