Devoir Surveillé n°7

Sujet donné le mercredi 19 mars 2025, 3h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

Considérons la famille d'équations différentielles linéaires homogènes

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ t\ln(\cos t)y' - (t\tan t + \alpha\ln(\cos t))y = 0 \qquad (E_\alpha)$$

où α est un paramètre réel.

Notons $\mathcal{S}_\alpha$ l'ensemble des fonctions dérivables définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et solutions de l'équation (E_α) :

$$\mathcal{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \mid f \text{ est solution de } (E_\alpha) \right\}$$

On admettra que $\mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On notera $\widetilde{0}$ la fonction nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

I . Prolongements continus et dérivables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons les fonctions $f_- \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{|t|^\alpha}{\ln(\cos t)} \end{array} \right.$ et $f_+ \left| \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^\alpha}{\ln(\cos t)} \end{array} \right.$.

I.1. Calculer un équivalent de $f_+(t)$ en 0^+ et en déduire la limite de f_+ en 0^+ en fonction de α.
En déduire une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour pouvoir prolonger f_+ en une fonction $\widetilde{f_+}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, dans ce cas, préciser $\widetilde{f_+}(0)$.

I.2. (a) Dans cette sous-question uniquement, $\alpha = 2$. Calculer le $DL_2(0)$ de $\widetilde{f_+}$. $\widetilde{f_+}$ est-elle dérivable en 0 ?

Désormais, α est à nouveau un réel quelconque.

(b) Calculer un équivalent de $\dfrac{f_+(t)}{t}$ en 0^+ et en déduire la limite de $\dfrac{f_+(t)}{t}$ en 0^+ en fonction de α.

(c) Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\widetilde{f_+}$ existe et soit dérivable sur son domaine de définition et, dans ce cas, préciser $\widetilde{f_+}'(0)$.

I.3. Établir de même une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f_- se prolonge en une fonction $\widetilde{f_-}$ dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et, dans cas, préciser $\widetilde{f_-}(0)$ et $\widetilde{f_-}'(0)$.

II . Résolution de l'équation (E_α)

II.1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

II.2. Calculer la dérivée de $g : t \mapsto \ln(\cos t)$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
En déduire, en fonction de f_+ l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha^+$ des solutions définies sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation (E_α).
Expliciter en fonction de f_- (sans détailler le calcul) l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha^-$ des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ de l'équation (E_α).

II.3. Déterminer $\mathcal{S}_2$ et donner sa dimension.

II.4. Montrer que, pour tout $\alpha < 3$ et $\alpha \neq 2$, $\mathcal{S}_\alpha = \{\widetilde{0}\}$ (où $\widetilde{0}$ désigne la fonction nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).

II.5. Déterminer $\mathcal{S}_3$ et donner sa dimension.

II.6. Déterminer, pour $\alpha > 3$, $\mathcal{S}_\alpha$, en donner une base et calculer sa dimension.

ENDOMORPHISMES PROPORTIONNELS À LEUR CARRÉ

I . Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1) = 2.e_1 + e_2 + e_3\ ,\ f(e_2) = e_1 + 2.e_2 - e_3\ ,\ f(e_3) = e_1 - e_2 + 2.e_3$$

I.1. Soit $t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $f(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

I.2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} : f^2 = \lambda.f$.

I.3. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

I.4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$ et expliciter le projecteur sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}f$ en calculant les coordonnées de $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Y a-t-il un lien entre f et p ?

II . Structure des endomorphismes proportionnels à leur carré

Dans cette partie, nous considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit au vecteur nul ($\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on note $A_k = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid u^2 = k.u\ \}$.
L'objet de cette partie est l'étude de ces ensembles A_k.

II.1. Nous allons étudier A_0.

(a) Soit $u \in A_0$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.u \in A_0$.

(b) Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer que $u \in A_0 \iff \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

(c) Déterminer A_0 lorsque E est de dimension finie égale à 1. Lorsque $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$, A_0 est-il un sous-espace vectoriel ?

(d) On suppose dans cette question que E est de dimension 2. Montrer que A_0 contient au moins un élément différent de l'endomorphisme nul. On pourra définir un élément de A_0 dans une base (e_1, e_2) de E. Construire un autre élément de A_0 tel que que leur somme n'appartienne pas à A_0. Que peut-on en déduire ?

II.2. Soit $k \in \mathbb{K}^*$.

(a) Déterminer $A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E)$.

(b) A_k est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$?

II.3. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soit $u \in A_k$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont supplémentaires.

(b) Pour $x \in \mathrm{Im}u$, calculer $u(x)$ et en déduire une expression de u en fonction du projecteur p_u sur $\mathrm{Im}u$ parallèlement au noyau de u. Cette relation correspond-elle à une propriété de l'application linéaire f de la partie I ?

II.4. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soient $(u, v) \in A_k^2$.
Montrer que, si $u \circ v = v \circ u$, alors il existe $k' \in \mathbb{K}$ tel que $u \circ v \in A_{k'}$ et, dans ce cas,

$$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v$$

II.5. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soient $(u, v) \in A_k^2$.

(a) Montrer que si $u \circ v + v \circ u = 0$, alors $u \circ v = v \circ u = 0$.

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u + v$ appartienne à A_k. Montrer que, dans ce cas

$$\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u + v) = \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Ker}v$$

III . Projections sur les intersections avec les images et les noyaux de u et v

Dans cette partie, on considère $k \in \mathbb{K}^*$ et $(u, v) \in A_k^2$ ($\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

III.1. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

(a) Montrer que f et u commutent si et seulement si $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont stables par f ce qui signifie $f(\mathrm{Im}u) \subset \mathrm{Im}u$ et $f(\mathrm{Ker}u) \subset \mathrm{Ker}u$.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par v si et seulement si $F = (F \cap \mathrm{Im}v) \oplus (F \cap \mathrm{Ker}v)$.

(c) Montrer que u et v commutent si et seulement si

$$E = (\mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Ker}v) \oplus (\mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}v) \oplus (\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v) \oplus (\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v)$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que $u \circ v = v \circ u$.

Notons $E_1 = \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Ker}v$, $E_2 = \mathrm{Ker}u \cap \mathrm{Im}v$, $E_3 = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Ker}v$ et $E_4 = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v$. Notons π_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à $E_2 \oplus E_3 \oplus E_3$, π_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à $E_1 \oplus E_3 \oplus E_3$, π_3 et π_4 de la même manière.

III.2. (a) Pour tout $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$, exprimer $\pi_i \circ \pi_j$.

(b) En déduire que, pour tout $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{K}^4$, $(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^2 = a_1^2\pi_1 + a_2^2\pi_2 + a_3^2\pi_3 + a_4^2\pi_4$.

(c) Prouvez une simplification générale de l'expression $(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{K}^4$, de $k \in \mathbb{N}$ et des $(\pi_i)_{i \in [\![1,4]\!]}$.

III.3. (a) Exprimer u, v, $u \circ v$ et Id_E en fonction de π_1, π_2, π_3 et π_4.

(b) Montrer que, si E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces de E non réduits au vecteur nul de E, alors $\mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}_E, u, v, u \circ v\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ de dimension 4.

Correction du DS 7

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène

Considérons la famille d'équations différentielles linéaires homogènes

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ , \ t\ln(\cos t)y' - (t\tan t + \alpha\ln(\cos t))y = 0 \qquad (E_\alpha)$$

où α est un paramètre réel.

Notons $\mathcal{S}_\alpha$ l'ensemble des fonctions dérivables définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et solutions de l'équation (E_α) :

$$\mathcal{S}_\alpha = \{f \in \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right) \mid f \text{ est solution de } (E_\alpha)\ \}$$

On admettra que $\mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On notera $\widetilde{0}$ la fonction nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

I . Prolongements continus et dérivables

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons les fonctions $f_- \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{|t|^\alpha}{\ln(\cos t)} \end{array}\right.$ et $f_+ \left| \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^\alpha}{\ln(\cos t)} \end{array}\right.$.

I.1. Calculer un équivalent de $f_+(t)$ en 0^+ et en déduire la limite de f_+ en 0^+ en fonction de α.
En déduire une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour pouvoir prolonger f_+ en une fonction $\widetilde{f_+}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, dans ce cas, préciser $\widetilde{f_+}(0)$.

Au voisinage de 0 :

$$\ln(\cos t) = \ln(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^2}{2}$$

Par produit d'équivalents

$$\boxed{f_+(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} -2t^{\alpha-2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 2\ , \\ -2 & \text{si } \alpha = 2\ , \\ 0 & \text{si } \alpha > 2\ . \end{cases}}$$

Comme f_+ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il faut et suffit que f admette une **limite finie** en 0^+ pour être prolongeable en une fonction continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Or, } f_+ \text{ admet une limite finie en } 0^+ \text{ (et est donc prolongeable par continuité en } 0^+\text{) si et seulement si } \alpha \geqslant 2, \\ \text{précisément } \widetilde{f_+}(0) = \begin{cases} -2 & \text{si } \alpha = 2\ , \\ 0 & \text{si } \alpha > 2\ . \end{cases}\end{array}}$$

I.2. (a) Dans cette sous-question uniquement, $\alpha = 2$. Calculer le $DL_2(0)$ de $\widetilde{f_+}$. $\widetilde{f_+}$ est-elle dérivable en 0 ?

Puisque $\alpha = 2$, $\widetilde{f_+}$ existe bien et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f_+}(t) = \frac{t^2}{\ln(1+\cos t)} &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{t^2}{\ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right)} \underset{t\to 0^+}{=} \frac{t^2}{\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o(t^4)} \\ &\underset{t\to 0^+}{=} \frac{t^2}{-\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)} \underset{t\to 0^+}{=} -2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \underset{t\to 0^+}{=} -2 + \frac{t^2}{3} + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } \widetilde{f_+} \text{ admet un } DL_2(0) : \widetilde{f_+}(t) \underset{t\to 0^+}{=} -2 + \dfrac{t^2}{3} + o(t^2), \\ \text{elle admet donc en particulier un } DL_1(0), \text{ et donc } \widetilde{f_+} \text{ est dérivable (à droite) en 0 et } \widetilde{f_+}'(0) = 0 \text{ (coefficient de } t\text{).}\end{array}}$$

Désormais, α est à nouveau un réel quelconque.

(b) Calculer un équivalent de $\dfrac{f_+(t)}{t}$ en 0^+ et en déduire la limite de $\dfrac{f_+(t)}{t}$ en 0^+ en fonction de α.

D'après le calcul de l'équivalent de la question 1 : $\dfrac{f_+(t)}{t} \sim -2t^{\alpha-3}$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{Au voisinage de } t = 0^+, \ \frac{f_+(t)}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} -2t^{\alpha-3} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 3 \\ -2 & \text{si } \alpha = 3 \\ 0 & \text{si } \alpha > 3 \end{cases}.}$$

(c) Donner une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\widetilde{f_+}$ existe et soit dérivable sur son domaine de définition et, dans ce cas, préciser $\widetilde{f_+}'(0)$.

On commencera par noter que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables ($\cos(t) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).
On a vu (I.1.) que pour que $\widetilde{f_+}$ existe, il faut et il suffit que $\alpha \geqslant 2$.

Pour la dérivabilité,
- $\star$ pour $\alpha = 2$, on a vu en I.2.(a) que $\widetilde{f_+}$ existe et est dérivable avec $\widetilde{f_+}'(0) = 0$,
- $\star$ pour $\alpha > 2$, comme $\widetilde{f_+}(0) = 0$, $\widetilde{f_+}$ est dérivable en 0 si et seulement si $\dfrac{\widetilde{f_+}(t) - \widetilde{f_+}(0)}{t - 0} = \dfrac{\widetilde{f_+}(t)}{t}$ admet une limite finie en $0+$.
  Or d'après la question précédente, cela se produit si et seulement si $\alpha \geqslant 3$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Bilan : } \widetilde{f_+} \text{ est définie et dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ si et seulement si } \alpha = 2 \text{ ou } \alpha \geqslant 3, \\ \text{Dans ces cas : } \widetilde{f_+}'(0) = 0 \text{ si } \alpha \in \{2\} \cup]3, +\infty[\text{ et } \widetilde{f_+}'(0) = -2 \text{ si } \alpha = 3.\end{array}}$$

I.3. Établir de même une CNS sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f_- se prolonge en une fonction $\widetilde{f_-}$ dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ et, dans cas, préciser $\widetilde{f_-}(0)$ et $\widetilde{f_-}'(0)$.

Première option.
On mène le même genre de calculs (mais il faut bien les faire), on trouve : $f_-(t) \underset{t \to 0^-}{=} -2|t|^{\alpha-2} + \frac{1}{3}|t|^{\alpha-4} + o(|t|^{\alpha-4})$.
- Si $\alpha < 2$, alors $f_-(t) \underset{t \to 0^-}{\to} -\infty$, donc f_- ne se prolonge pas par continuité en 0^-.
- Si $\alpha = 2$, alors $f_-(t) \underset{t \to 0^-}{\to} -2$, donc f_- se prolonge par continuité en 0^- et $\widetilde{f_-}(0) = -2$.
  Puis $f_-(t)$ admet un $DL_1(0)$: $f_-(t) = -2 + 0t + o(t)$, donc $\widetilde{f_-}$ est dérivable (à gauche) en 0 et $\widetilde{f_-}'(0) = 0$.
- Si $\alpha > 2$,alors $f_-(t) \underset{t \to 0^-}{\to} 0$, donc f_- se prolonge par continuité en 0^- et $\widetilde{f_-}(0) = 0$.

$$\text{Puis } \frac{\widetilde{f_-}(t) - \widetilde{f_-}(0)}{t - 0} = \frac{\widetilde{f_-}(t)}{t} \underbrace{\underset{t \to 0^-}{\sim}}_{t = -|t| \text{ car } t < 0} 2|t|^{\alpha-3} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 3, \\ 2 & \text{si } \alpha = 3, \\ 0 & \text{si } \alpha > 3. \end{cases}$$

  - $\star$ Si $\alpha < 3$, $\widetilde{f_-}$ n'est pas dérivable en 0.
  - $\star$ Si $\alpha \geqslant 3$, $\widetilde{f_-}$ est dérivable en 0.

Seconde option.
On considère $s = -t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et alors $f_-(t) = f_+(s)$, car $|t|^\alpha = |-t|^\alpha = s^\alpha$ car $s > 0$ et $\cos t = \cos(-t) = \cos s$.
On a donc des résultats anaogues pour $\widetilde{f_+}$ et $\widetilde{f_-}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Bilan : } f_- \text{ se prolonge en une fonction } \widetilde{f_-} \text{ dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ si et seulement si } \alpha = 2 \text{ ou } \alpha \geqslant 3. \\ \text{Précisément : si } \alpha = 2,\ \widetilde{f_-}(0) = -2 \text{ et } \widetilde{f_-}'(0) = 0\,;\ \text{si } \alpha = 3,\ \widetilde{f_-}(0) = 0 \text{ et } \widetilde{f_-}'(0) = 2\,;\ \text{et si } \alpha > 3,\ \widetilde{f_-}(0) = 0 \text{ et } \widetilde{f_-}'(0) = 0.\end{array}}$$

II . Résolution de l'équation (E_α)

II.1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel des fonctions réelles dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\star$ Par définition, $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence.
- $\star$ L'application $t \mapsto 0$ est une solution dérivable de (E_α). Donc $\mathcal{S}_\alpha \neq \emptyset$.
- $\star$ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{S}_\alpha$.
  Alors f et g sont réelles dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
  Et pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} t\ln(\cos t)(\lambda f + \mu g)'(t) & -(t\tan t + \alpha\ln(\cos t))(\lambda f + \mu g)(t) \\ &= \lambda\underbrace{[t\ln(\cos t)f'(t) - (t\tan t + \alpha\ln(\cos t))f(t)]}_{=0 \text{ car } f \in \mathcal{S}_\alpha} + \mu\underbrace{[t\ln(\cos t)g'(t) - (t\tan t + \alpha\ln(\cos t))g(t)]}_{=0 \text{ car } g \in \mathcal{S}_\alpha} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_\alpha$.

$$\boxed{\mathcal{S}_\alpha \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathcal{D}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right).}$$

II.2. Calculer la dérivée de $g : t \mapsto \ln(\cos t)$ pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

En déduire, en fonction de f_+ l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha^+$ des solutions définies sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation (E_α).

Expliciter en fonction de f_- (sans détailler le calcul) l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha^-$ des solutions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ de l'équation (E_α).

Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(t) = \frac{-\sin t}{\cos} = -\tan t$.

L'équation (E_α) est normalisée (sous forme résolue) uniquement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

C'est pourquoi nous devons faire l'étude en deux temps.

On peut alors donner la solution générale sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\mathcal{S}_\alpha^+ = \{t \mapsto A\exp\left(-F(t)\right), A \in \mathbb{R}\}$$

où F est une primitive de $t \mapsto \frac{-\left(t\tan t + \alpha\ln(\cos t)\right)}{t\ln(\cos t)} = \frac{-\tan t}{\ln(\cos t)} - \frac{\alpha}{t}$.

Or d'après le calcul précédent, comme $t \mapsto -\tan t$ est la dérivée de $t \mapsto \ln(\cos t)$, on peut prendre $F : t \mapsto \ln(|\ln(\cos t)|) - \alpha\ln(|t|)$.

Ainsi puisque $t > 0$ et $\ln(\cos t) < 0$:

$$\boxed{\mathcal{S}_\alpha^+ = \{t \mapsto A\exp\left(-\ln(-\ln(\cos t) + \alpha\ln(t)\right) = A\frac{t^\alpha}{-\ln(\cos t)}, A \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(f_+)}$$

Pour des raisons semblables, sauf que la primitive de $t \mapsto \frac{\alpha}{t}$ est $t \mapsto \alpha\ln|t|$, on trouve

$$\boxed{\mathcal{S}_\alpha^- = \{t \mapsto B\exp\left(-\ln(-\ln(\cos t) + \alpha\ln(|t|)\right) = B\frac{|t|^\alpha}{-\ln(\cos t)}, B \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(f_-)}$$

L'enjeu maintenant est de voir si l'on peut recoller les fonctions de $\mathcal{S}_\alpha^-$ et $\mathcal{S}_\alpha^+$ en 0 en des fonctions de $\mathcal{S}_\alpha$.

II.3. Déterminer $\mathcal{S}_2$ et donner sa dimension.

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{S}_2$, alors

- $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[}$ est solution de $\mathcal{S}_2^+$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[} = Af_+$.
- $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[}$ est solution de $\mathcal{S}_2^-$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[} = Bf_-$.

Or f est continue (et dérivable mais on ne l'exploitera pas ici) en 0, donc par continuité : $f(0) = A\widetilde{f_+}(0) = -2A$, mais aussi $f(0) = B\widetilde{f_-}(0) = -2B$.

$$\text{Donc } A = B \text{ donc } f = A\widehat{f} \text{ où } \widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} f_-(t) = \dfrac{t^2}{\ln(\cos t)} & \text{si } t \in]-\frac{\pi}{2}, 0[, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ f_+(t) = \dfrac{t^2}{\ln(\cos t)} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{cases} \end{array} \right. .$$

Nous venons d'établir que $\mathcal{S}_2 \subset \mathrm{vect}(\widehat{f})$.

Synthèse.

La fonction $\widehat{f}$ définie ci-dessus

⋆ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car

— sur l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, elle coïncide avec f_- qui est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$,

— sur l'ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle coïncide avec f_+ qui est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

— en 0, nous avons établi dans la question I.2.(a) que $\widetilde{f_+}$ est dérivable à droite en 0 de dérivée nulle et (question I.3) que $\widetilde{f_-}$ est dérivable à gauche en 0 de dérivée nulle si bien que $\widehat{f}$ est dérivable en 0 et $\widehat{f}'(0) = 0$,

⋆ vérifie l'équation (E_2)

— sur l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ car elle y coïncide avec f_- qui appartient à $\mathcal{S}_2^-$ (et d'ailleurs, l'engendre !),

— sur l'ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car elle y coïncide avec f_+ qui appartient à $\mathcal{S}_2^+$ (et d'ailleurs, l'engendre !),

— en 0 car

$$\underbrace{0 \times \ln(\cos(0))}_{=0}\widehat{f}'(0) - \underbrace{(0 \times \tan 0 + 2\ln(\cos(0)))}_{=0}\widehat{f}(0) = 0$$

Par conséquent, $\widehat{f} \in \mathcal{S}_2$, or $\mathcal{S}_2$ est un espace vectoriel (question II.1) donc $\mathrm{Vect}(\widehat{f}) \subset \mathcal{S}_2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{S}_2 = \mathrm{Vect}(\widehat{f}), \text{ or } \widehat{f} \neq \widetilde{0} \text{ donc } \mathcal{S}_2 \text{ est un espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle).}}$$

II.4. Montrer que, pour tout $\alpha < 3$ et $\alpha \neq 2$, $\mathcal{S}_\alpha = \{\widetilde{0}\}$ (où $\widetilde{0}$ désigne la fonction nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$).

Soit $\alpha] - \infty, 3[\setminus\{2\}$.

Analyse. Soit $f \in \mathcal{S}_2$, alors

- $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[}$ est solution de $\mathcal{S}_\alpha^+$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[} = Af_+$.
- $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[}$ est solution de $\mathcal{S}_\alpha^-$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[} = Bf_-$.

De plus, f est continue en 0 donc f coïncide avec $A\widetilde{f_+}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et avec $B\widetilde{f_-}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.
Enfin, f est dérivable en 0 donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, donc $A\widetilde{f_+}$ et $B\widetilde{f_-}$ sont dérivables en 0^+ et 0^- respectivement.
Supposons que $A \neq 0$, nous avons établi dans la question I.3.(c) que $\widetilde{f_+}$ n'est pas dérivable en 0^+ (car $\alpha \in]-\infty, 3[\setminus\{2\}$) donc $A\widetilde{f_+}$ n'est pas dérivable en 0^+ ce qui contredit le résultat établi dans le paragraphe précédent. Par conséquent, $A = 0$.
Un raisonnement analogue montre que $B = 0$.
Ainsi $f = \widetilde{0}$ si bien que $\mathcal{S}_\alpha \subset \{\widetilde{0}\}$.
Synthèse.
La fonction identiquement nulle $\widetilde{0}$ est bien une solution de $\mathcal{S}_\alpha$ puisque cette équation différentielle est linéaire et homogène donc $\{\widetilde{0}\} \subset \mathcal{S}_\alpha$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha < 3 \text{ et } \alpha \neq 2,\ \mathcal{S}_\alpha = \{\widetilde{0}\}.}$$

II.5. Déterminer $\mathcal{S}_3$ et donner sa dimension.

Toujours, la même stratégie.
Analyse. Soit $f \in \mathcal{S}_3$, alors
- $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[}$ est solution de $\mathcal{S}_3^+$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[} = Af_+$.
- $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[}$ est solution de $\mathcal{S}_3^-$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[} = Bf_-$.

Or f est continue en 0, donc par continuité : $f(0) = A\widetilde{f_+}(0) = 0$, mais aussi $f(0) = B\widetilde{f_-}(0) = 0$.
et f est dérivable en 0, donc : $f'(0) = A\widetilde{f_+}'(0) = -2A$, mais aussi $f'(0) = B\widetilde{f_-}'(0) = 2B$.

$$\text{Donc } -A = B \text{ donc } f = A\widehat{f} \text{ où } \widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} -f_-(t) = \dfrac{t^3}{\ln(\cos t)} & \text{si } t \in]-\dfrac{\pi}{2}, 0[, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ f_+(t) = \dfrac{t^3}{\ln(\cos t)} & \text{si } t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[. \end{cases} \end{array} \right. .$$

Nous venons d'établir que $\mathcal{S}_3 \subset \mathrm{vect}(\widehat{f})$.
Synthèse.
La fonction $\widehat{f}$ définie ci-dessus
- ⋆ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car
  - — sur l'ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, elle coïncide avec $-f_-$ qui est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$,
  - — sur l'ouvert $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, elle coïncide avec f_+ qui est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
  - — en 0, nous avons établi dans la question I.2.(c) que $\widetilde{f_+}$ est dérivable à droite en 0 de dérivée -2 et (question I.3) que $\widetilde{f_-}$ est dérivable à gauche en 0 de dérivée 2 donc $-\widetilde{f_-}$ est dérivable à gauche en 0 de dérivée -2 si bien que $\widehat{f}$ est dérivable en 0 et $\widehat{f}'(0) = -2$,
- ⋆ vérifie l'équation (E_3)
  - — sur l'ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ car elle y coïncide avec f_- qui appartient à $\mathcal{S}_3^-$ (et d'ailleurs, l'engendre !),
  - — sur l'ouvert $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car elle y coïncide avec f_+ qui appartient à $\mathcal{S}_3^+$ (et d'ailleurs, l'engendre !),
  - — en 0 car

$$\underbrace{0 \times \ln(\cos(0))}_{=0}\widehat{f}'(0) - \underbrace{(0 \times \tan 0 + 3\ln(\cos(0)))}_{=0}\widehat{f}(0) = 0$$

Par conséquent, $\widehat{f} \in \mathcal{S}_3$, or $\mathcal{S}_3$ est un espace vectoriel (question II.1) donc $\mathrm{Vect}(\widehat{f}) \subset \mathcal{S}_3$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{S}_3 = \mathrm{Vect}(\widehat{f}), \text{ or } \widehat{f} \neq \widetilde{0} \text{ donc } \mathcal{S}_3 \text{ est un espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle).}}$$

II.6. Déterminer, pour $\alpha > 3$, $\mathcal{S}_\alpha$, en donner une base et calculer sa dimension.

Encore la même stratégie, avec $\alpha > 3$.
Mais cette fois-ci, f_+ et f_- se prolongent par continuité en 0 en des fonctions dérivables de même valeur et de même dérivée nulle.
Cela n'impose donc aucune condition sur A et B.

Précisons le raisonnement.
Analyse. Soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$, alors
- $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[}$ est solution de $\mathcal{S}_\alpha^+$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]0,\frac{\pi}{2}[} = Af_+$.
- $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[}$ est solution de $\mathcal{S}_\alpha^-$, donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $f_{|]-\frac{\pi}{2},0[} = Bf_-$.

Or f est continue en 0, donc par continuité : $f(0) = A\widetilde{f_+}(0) = B\widetilde{f_-}(0) = 0$.

Notons :

$$\overline{f_-}\left|\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} f_-(t)=\dfrac{|t|^\alpha}{\ln(\cos t)} & \text{si } t<0 \\ 0 & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \overline{f_+}\left|\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant 0 \\ f_+(t)=\dfrac{t^\alpha}{\ln(\cos t)} & \text{si } t> 0\end{cases}\end{array}\right.$$

On vient de prouver que $f=A\overline{f_+}+B\overline{f_-}$ donc $\mathcal{S}_\alpha=\mathrm{vect}(\overline{f_-},\overline{f_+})$.

Synthèse.

La fonction $\overline{f_+}$ définie ci-dessus

- ⋆ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car
  - — sur l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, elle coïncide avec $\widetilde{0}$ qui est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$,
  - — sur l'ouvert $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, elle coïncide avec f_+ qui est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,
  - — en 0, nous avons établi dans la question I.2.(c) que $\widetilde{f_+}$ est dérivable à droite en 0 de dérivée 0 et par ailleurs $\widetilde{0}$ est dérivable à gauche en 0 de dérivée 0 si bien que $\overline{f_+}$ est dérivable en 0 et $\overline{f_+}'(0)=0$,
- ⋆ vérifie l'équation (E_α)
  - — sur l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ car elle y coïncide avec $\widetilde{0}$ qui appartient à $\mathcal{S}_\alpha^-$,
  - — sur l'ouvert $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ car elle y coïncide avec f_+ qui appartient à $\mathcal{S}_\alpha^+$ (et d'ailleurs, l'engendre !),
  - — en 0 car

$$\underbrace{0\times\ln(\cos(0))}_{=0}\overline{f_+}'(0)-\underbrace{(0\times\tan 0+\alpha\ln(\cos(0)))}_{=0}\overline{f_+}(0)=0$$

Par conséquent, $\overline{f_+}\in\mathcal{S}_\alpha$.

On montre de même que $\overline{f_-}\in\mathcal{S}_\alpha$, or $\mathcal{S}_\alpha$ est un espace vectoriel (question II.1) donc $\mathrm{Vect}(\overline{f_-},\overline{f_+})\subset\mathcal{S}_\alpha$.

Enfin, observons que la famille $(\overline{f_-},\overline{f_+})$ est libre : soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda\overline{f_-}+\mu\overline{f_+}=\widetilde{0}$$

En évaluant l'égalité ci-dessus pour $t=1$ et -1, on obtient :

$$\frac{\lambda}{\ln(\cos(-1))}+\mu\times 0=0 \quad \text{et} \quad \lambda\times 0+\frac{\mu}{\ln(\cos 1)}=0$$

donc $\lambda=\mu=0$.

Par conséquent, $(\overline{f_-},\overline{f_+})$ est une famille libre qui engendre $\mathcal{S}_\alpha$ donc c'est une base de $\mathcal{S}_\alpha$.

$$\boxed{\mathcal{S}_\alpha=\mathrm{vect}(\overline{f_-},\overline{f_+}),\text{ espace vectoriel de dimension 2 (plan vectoriel).}}$$

Problème 2

I Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_1)=2.e_1+e_2+e_3\ ,\ f(e_2)=e_1+2.e_2-e_3\ ,\ f(e_3)=e_1-e_2+2.e_3$$

I.1. Soit $t=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $f(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$t=x.e_1+y.e_2+z.e_3$ donc, par linéarité de f,

$$f(t)=x.f(e_1)+y.f(e_2)+z.f(e_3)=x.\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+z.\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{donc } \boxed{f(t)=\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y-z\\x-y+2z\end{pmatrix}}.$$

I.2. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$: $f^2=\lambda.f$.

Compte tenu de l'expression ci-dessus, pour tout $t=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f^2(t)=f(f(t))=f\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y-z\\x-y+2z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2(2x+y+z)+(x+2y-z)+(x-y+2z)\\(2x+y+z)+2(x+2y-z)-(x-y+2z)\\(2x+y+z)-(x+2y-z)+2(x-y+2z)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6x+3y+3z\\3x+6y-3z\\3x-3y+6z\end{pmatrix}\\ &= 3.\begin{pmatrix}2x+y+z\\x+2y-z\\x-y+2z\end{pmatrix}\\ &= 3.f(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f^2 = 3.f.}$$

I.3. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

-

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f &\iff f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ s \\ s \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de cette droite vectorielle.}}$$

- Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f &\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & - & z & = & b \\ x & - & y & + & 2z & = & c \end{array}\right. \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & b \\ & - & 3y & + & 3z & = & a-2b \\ & - & 3y & + & 3z & = & c-b \end{array}\right. \\
&\iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & c-b-(a-2b) \end{array}\right. \\
&\iff c+b-a = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} s & & \\ & & t \\ s & - & t \end{pmatrix} \middle| \, (s,t) \in \mathbb{R}^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathrm{Im} f$ et est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\mathrm{Im} f$.

I.4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$ et expliciter le projecteur sur $\mathrm{Im} f$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f$ en calculant les coordonnées de $p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Y a-t-il un lien entre f et p ?

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ fixé quelconque.

  Cherchons $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$(*) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & \mu & & & = & x \\ \lambda & & & + & \nu & = & y \\ \lambda & + & \mu & - & \nu & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & \mu & & & = & x \\ & & \mu & + & \nu & = & y+x \\ & & 2\mu & - & \nu & = & z+x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda & + & \mu & & & = & x \\ & & \mu & + & \nu & = & y+x \\ & & & - & 3\nu & = & z+x-2(y+x) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{-x+y+z}{3} \\ \mu = \dfrac{2x+y+z}{3} \\ \nu = \dfrac{x+2y-z}{3} \end{array}\right.$$

L'existence d'au moins une solution prouve que

$$\mathbb{R}^3 \subset \underbrace{\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}_{=\operatorname{Ker} f} + \underbrace{\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}_{=\operatorname{Im} f} \underbrace{\subset \mathbb{R}^3}_{\text{triviale}}$$

donc $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
Par ailleurs, l'unicité de la solution prouve que l'écriture d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$ est unique ce qui établit que les deux espaces sont en somme directe.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

Autre méthode.

Nous disposons, d'après les questions précédentes, de la base $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\operatorname{Ker} f$ et de la base $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ de $\operatorname{Im} f$.

Considérons la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ obtenue par concaténation de ces deux bases. On prouve, par un calcul analogue à celui effectué ci-dessus en prenant le second membre nul ($x = y = z = 0$) qu'elle forme une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Vect}\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} \underbrace{=}_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \text{ base de } \mathbb{R}^3} \operatorname{Vect}\{\mathcal{B}_1\} \oplus \operatorname{Vect}\{\mathcal{B}_2\} = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$$

- De plus, le calcul ci-dessus donne la décomposition d'un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{-x+y+z}{3}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2x+y+z}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+2y-z}{3}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{-x+y+z}{3}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im} f} \end{aligned}$$

donc $\boxed{p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y - z \\ x - y + 2z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right).}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f = 3.p}$$

II Endomorphismes proportionnels à leur carré

Dans cette partie, nous considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit au vecteur nul ($\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Pour tout $k \in \mathbb{K}$, on note $A_k = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid u^2 = k.u\}$.
L'objet de cette partie est l'étude de ces ensembles A_k.

II.1. Nous allons étudier A_0.

(a) Soit $u \in A_0$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.u \in A_0$.

Soient $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times A_0$ fixés quelconques.
$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donc $\lambda.u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. De plus, par calcul dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$,

$$(\lambda.u)^2 = (\lambda.u) \circ (\lambda.u) = \lambda^2.u^2 = \lambda^2.0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)} = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$$

$\boxed{\text{donc } \lambda.u \in A_0.}$

(b) Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer que $u \in A_0 \iff \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.

- Supposons que $u \in A_0$. Alors $u^2 = 0$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}u$ fixé quelconque. Il existe $x \in E$: $u(x) = y$ donc
  $$u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0 \quad \text{car } u^2 = 0$$
  donc $y \in \mathrm{Ker}u$.
  Par conséquent, $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.
- Supposons que $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$.
  Soit $x \in E$ fixé quelconque.
  $$u^2(x) = u(\underbrace{u(x)}_{\substack{\in \mathrm{Ker}u \\ \text{car } \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u}}) = 0_E$$
  donc $u^2 = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } u \in A_0 \iff \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u.}$

Autre preuve :

$$u \in A_0 \iff u^2 = 0 \iff \mathrm{Im}u^2 = \{0_E\} \iff u(\mathrm{Im}u) = \{0_E\} \iff \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$$

(c) Déterminer A_0 lorsque E est de dimension finie égale à 1. Lorsque $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$, A_0 est-il un sous-espace vectoriel ?

- Supposons que $u \in A_0$.
  Si $\mathrm{rg}u \geqslant 1$, alors l'inclusion établie dans la question précédente $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$ implique $\dim \mathrm{Ker}u \geqslant \mathrm{rg}u \geqslant 1$ si bien que le théorème du rang donne
  $$\underbrace{\dim E}_{=1} = \underbrace{\mathrm{rg}u}_{\geqslant 1} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker}u}_{\geqslant 1} \geqslant 2$$
  d'où une contradiction.
  Par conséquent, $\mathrm{rg}u < 1$ donc $\mathrm{rg}u = 0$ donc $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Il est immédiat de vérifier que $0_{\mathcal{L}(E)}^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $0_{\mathcal{L}(E)} \in A_0$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } \dim_{\mathbb{K}} E = 1,\ A_0 = \{0_{\mathcal{L}(E)}\} \text{ donc } A_0 \text{ est, dans ce cas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).}$

Autres méthodes sans le théorème du rang :

- Si $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$ et $u \in A_0$, sachant que $\{0_E\} \subset \mathrm{Im}u \subset E$, alors par croissance de la dimension, $0 \leqslant \dim \mathrm{Im}u \leqslant 1$ donc $\dim \mathrm{Im}u \in \{0, 1\}$.
  Si $\mathrm{Im}u$ est de dimension 1, on a $\mathrm{Im}u \subset E$ et $\dim \mathrm{Im}u = 1 = \dim E$ donc $\mathrm{Im}u = E$, or $\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u$ donc $E = \mathrm{Ker}u$ donc $u = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ donc $\mathrm{Im}u = \{0_E\}$ ce qui contredit $\mathrm{Im}u = E$.
  Par conséquent, $\dim \mathrm{Im}u = 0$ donc $\mathrm{Im}u = \{0_E\}$ donc $u = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ donc $A_0 \subset \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ et l'inclusion réciproque est immédiate.
- Si $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$, alors $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = (\dim_{\mathbb{K}} E)^2 = 1$, or $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et $\mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ donc $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) = \{\lambda.\mathrm{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.
  Dès lors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
  $$\lambda.\mathrm{Id}_E \in A_0 \iff (\lambda.\mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)} \iff \lambda^2.\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)} \underbrace{\iff}_{\mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}} \lambda^2 = 0_{\mathbb{K}} \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$
  donc $A_0 = \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}\}$.

(d) On suppose dans cette question que E est de dimension 2. Montrer que A_0 contient au moins un élément différent de l'endomorphisme nul. On pourra définir un élément de A_0 dans une base (e_1, e_2) de E. Construire un autre élément de A_0 tel que que leur somme n'appartienne pas à A_0. Que peut-on en déduire ?

E est de dimension finie 2 donc (théorème d'existence de base en dimension finie) il existe (e_1, e_2) une base de E.

- Notons g l'unique application linéaire définie de E dans E par les conditions
  $$g(e_1) = 0_E \quad \text{et} \quad g(e_2) = e_1$$
  (ces choix sont fait pour satisfaire $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Ker}g$ ce qui, compte tenu de la caractérisation établie dans la question II.1(b) permettra d'affirmer que $g \in A_0$).
  g peut être explicitée :
  $$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\ ,\ g(\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2) = \lambda_2.e_1$$
  si bien que
  $$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\ ,\ g^2(\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2) = g(\lambda_2.e_1) = \lambda_2.g(e_1) = 0_E$$
  On a donc $g \in A_0$ et $g \neq 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ car $g(e_2) = e_1 \neq 0_E$.

$\boxed{\text{Ainsi, si } E \text{ est de dimension 2, } A_0 \neq \{0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}\}.}$

- Notons h l'unique application linéaire définie de E dans E par les conditions
  $$h(e_1) = e_2 \quad \text{et} \quad h(e_2) = 0_E$$
  (ces choix sont fait pour satisfaire $\mathrm{Im}h \subset \mathrm{Ker}h$ ce qui, compte tenu de la caractérisation établie dans la question II.1(b) permettra d'affirmer que $h \in A_0$).

On montre comme pour g que $h^2 = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$ donc $h \in A_0$.
En revanche, observons que

$$(g+h)^2(e_1) = (g+h)(\underbrace{g(e_1)}_{=0_E} + \underbrace{h(e_1)}_{=e_2}) = \underbrace{g(e_2)}_{=e_1} + \underbrace{h(e_2)}_{=0_E} = e_1 \neq 0_E$$

$\boxed{\text{donc } g+h \notin A_0 \text{ ce qui prouve que } A_0 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E) \text{ lorsque } E \text{ est de dimension 2.}}$

II.2. Soit $k \in \mathbb{K}^*$.

(a) Déterminer $A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E)$.

- Soit $u \in A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E)$ fixé quelconque.
  Composons par u^{-1} la relation fonctionnelle $u^2 = k.u$:

$$\underbrace{u^{-1} \circ u^2}_{=u} = \underbrace{u^{-1} \circ (k.u)}_{\substack{=k.u^{-1}\circ u \\ =k.\mathrm{Id}_E}}$$

  si bien que $A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E) \subset \{k.\mathrm{Id}_E\}$.
- Calculons $(k.\mathrm{Id}_E) \circ (k.\mathrm{Id}_E) = k^2.\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E = k^2.\mathrm{Id}_E = k.(k.\mathrm{Id}_E)$ donc $k.\mathrm{Id}_E \in A_k$.
  De plus, $k \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $k.\mathrm{Id}_E \in GL_{\mathbb{K}}(E)$ (si on compose à droite et à gauche par $k^{-1}.\mathrm{Id}_E$ on obtient Id_E) donc $k.\mathrm{Id}_E \in A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } A_k \cap GL_{\mathbb{K}}(E) = \{k.\mathrm{Id}_E\}.}$

(b) A_k est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$?

Par l'absurde, supposons que A_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Puisque $k.\mathrm{Id}_E$ appartient à A_k, alors, par stabilité d'un sous-espace par la loi de composition externe, $2.(k.\mathrm{Id}_E)$ appartient à A_k donc

$$(2k.\mathrm{Id}_E)^2 = k.(2k.\mathrm{Id}_E)$$

d'où,

$$4k^2.\mathrm{Id}_E = 2k^2.\mathrm{Id}_E \quad \text{donc} \quad 2k^2.\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$$

Or $E \neq \{0_E\}$ donc $\exists x_0 \in E : x_0 \neq 0_E$. En évaluant la relation précédente en x_0 :

$$2k^2.\underbrace{x_0}_{\neq 0_E} = 0_E$$

donc $2k^2 = 0_{\mathbb{K}}$ donc $k = 0_{\mathbb{K}}$ ce qui contredit l'hypothèse $k \neq 0_{\mathbb{K}}$.

$\boxed{A_k \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).}$

II.3. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soit $u \in A_k$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont supplémentaires.

- **Analyse.** Soit $x \in E$ fixé quelconque.
  Supposons qu'il existe $(x_I, x_K) \in \mathrm{Im}u \times \mathrm{Ker}u$:

$$x = x_I + x_K \tag{1}$$

  De plus $x_I \in \mathrm{Im}u$ donc $\exists t \in E : x_I = u(t)$ si bien que

$$x = u(t) + x_K$$

  Prenons l'image de cette relation par u :

$$u(x) = u^2(t) + \underbrace{u(x_K)}_{=0_E}$$

  or $u^2 = k.u$ donc $u(x) = k.u(t)$ donc $u(x) = k.x_I$ si bien que $x_I = \frac{1}{k}.u(x)$ et, en reportant dans (1), $x_K = x - \frac{1}{k}.u(x)$.
  Ceci prouve l'unicité de la décomposition (1) donc la somme $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ est directe.
- **Synthèse.** Soit $x \in E$ fixé quelconque.
  Posons $x_I = \frac{1}{k}.u(x)$ et $x_K = x - \frac{1}{k}.u(x)$.
  - ⋆ Par linéarité de u, $x_I = u\left(\frac{1}{k}.x\right)$ donc $x_I \in \mathrm{Im}u$.
  - ⋆ Calculons $u(x_K) = u(x) - \frac{1}{k}.u^2(x) = u(x) - \frac{1}{k}.(k.u(x)) = 0_E$ donc $x_K \in \mathrm{Ker}u$.
  - ⋆ Calculons $x_I + x_K = \frac{1}{k}.u(x) + x - \frac{1}{k}.u(x) = x$.

  Ceci prouve l'existence d'une décomposition (1) pour tout $x \in E$ donc $E \subset \mathrm{Im}u + \mathrm{Ker}u$. L'inclusion réciproque est immédiate car $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $E = \mathrm{Im}u + \mathrm{Ker}u$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}u \text{ et } \mathrm{Ker}u \text{ sont supplémentaires.}}$

(b) Pour $x \in \mathrm{Im}u$, calculer $u(x)$ et en déduire une expression de u en fonction du projecteur p_u sur $\mathrm{Im}u$ parallèlement au noyau de u. Cette relation correspond-elle à une propriété de l'application linéaire f de la partie I ?

- Soit $x \in \mathrm{Im}u$. Il existe $t \in E : x = u(t)$ si bien que la relation $u^2 = k.u$ évaluée en t donne $u(u(t)) = k.u(t)$ donc $u(x) = k.x$.
- Soit $x \in E$ fixé quelconque.
  D'après la question précédente,
  $$\exists (x_I, x_K) \in \mathrm{Im}u \times \mathrm{Ker}u \ : \ x = x_I + x_K$$
  Observons alors que
  ⋆ $u(x) = u(x_I) + \underbrace{u(x_K)}_{= 0_E} = u(x_I) = k.x_I$ d'après le premier point de la question car $x_I \in \mathrm{Im}u$.
  ⋆ $p_u(x) = x_I$ par définition de p_u.
  Par conséquent, $u(x) = k.p_u(x) = (k.p_u)(x)$ donc $\boxed{u = k.p_u.}$
  Dans la partie I, l'endomorphisme f satisfait $f^2 = 3.f$ donc $f \in A_3$ donc, en notant p le projecteur sur $\mathrm{Im}f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}f$, le resultat que nous venons d'établir implique $f = 3.p$ ce qui correspond à la conclusion des calculs effectués dans la question I.4.

II.4. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soient $(u, v) \in A_k^2$.
Montrer que, si $u \circ v = v \circ u$, alors il existe $k' \in \mathbb{K}$ tel que $u \circ v \in A_{k'}$ et, dans ce cas,
$$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v$$

- Puisque u et v commutent,
  $$(u \circ v)^2 = u^2 \circ v^2 = (k.u) \circ (k.v) = k^2.(u \circ v)$$
  donc $u \circ v \in A_{k^2}$.
- ⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}(u \circ v)$ fixé quelconque.
  Il existe $x \in E : y = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}u$.
  De plus u et v commutent donc $y = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}v$. Par conséquent, $y \in \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v$.
  Ainsi $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v$.
  ⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v$ fixé quelconque.
  Puisque $v \in A_k$ et $y \in \mathrm{Im}v$, le résultat de la question II.3(b) donne $v(y) = k.y$ or $k \neq 0$ donc $y = \frac{1}{k}.v(y) = v\left(\frac{1}{k}.y\right)$.
  De même, $u \in A_k$ et $y \in \mathrm{Im}u$, le résultat de la question II.3(b) donne $u(y) = k.y$ or $k \neq 0$ donc $y = \frac{1}{k}.u(y) = u\left(\frac{1}{k}.y\right)$.
  En utilisant l'expression analogue obtenue ci-dessus avec v,
  $$y = u\left(\frac{1}{k}.y\right) = u\left(\frac{1}{k}.v\left(\frac{1}{k}.y\right)\right) = u\left(v\left(\frac{1}{k^2}.y\right)\right) = (u \circ v)\left(\frac{1}{k^2}.y\right)$$
  donc $y \in \mathrm{Im}u \circ v$. Par conséquent, $\mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}(u \circ v)$.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}u \cap \mathrm{Im}v.}$$
- ⋆ Soit $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$ fixé quelconque.
  $v \in A_k$ donc $E = \mathrm{Im}v \oplus \mathrm{Ker}v$ (question II.3(a)) donc
  $$\exists (x_{I,v}, x_{K,v}) \in \mathrm{Im}v \times \mathrm{Ker}v \ : \ x = x_{I,v} + x_{k,v}$$
  donc
  $$v(x) = v(x_{I,v}) + \underbrace{v(x_{K,v})}_{= 0_E} = k.x_{I,v}$$
  d'après la propriété établie dans la question II.3(b) : $\forall t \in \mathrm{Im}v \ , \ v(t) = k.t$. Par conséquent,
  $$0_E = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(k.x_{I,v}) = k.u(x_{I,v})$$
  or $k \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $u(x_{I,v}) = 0_E$ si bien que $x_{I,v} \in \mathrm{Ker}u$.
  Par conséquent $x = x_{I,v} + x_{k,v}$ avec $(x_{I,v}, x_{K,v}) \in \mathrm{Ker}u \times \mathrm{Ker}v$.
  Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u \circ v) \subset \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v$.
  ⋆ Soit $x \in \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v$ fixé quelconque.
  Il existe $(x_u, x_v) \in \mathrm{Ker}u \times \mathrm{Ker}v$ tel que $x = x_u + x_v$.
  $$(u \circ v)(x) = u(v(x_u + x_v)) = u(v(x_u) + \underbrace{v(x_v)}_{= 0_E}) \underbrace{=}_{= u \circ v = v \circ u} v(\underbrace{u(x_u)}_{= 0_E}) = 0_E$$
  donc $x \in \mathrm{Ker}u \circ v$.
  Par conséquent, $\mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v \subset \mathrm{Ker}(u \circ v)$.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(u \circ v) = \mathrm{Ker}u + \mathrm{Ker}v.}$$

II.5. Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Soient $(u, v) \in A_k^2$.
(a) Montrer que si $u \circ v + v \circ u = 0$, alors $u \circ v = v \circ u = 0$.

L'hypothèse donne
$$u \circ v = -v \circ u$$

Composons à gauche par u et utilisons l'associativité de la loi $\circ$:

$$\begin{aligned}
u\circ u\circ v=-u\circ v\circ u \quad &\Rightarrow \quad u^2\circ v=-u\circ v\circ u\\
&\Rightarrow \quad k.u\circ v=-u\circ v\circ u \quad \text{or par hypothèse, } u\circ v=-v\circ u\\
&\Rightarrow \quad k.u\circ v=-(-v\circ u)\circ u\\
&\Rightarrow \quad k.u\circ v=v\circ u^2\\
&\Rightarrow \quad k.u\circ v=v\circ(k.u)\\
&\Rightarrow \quad k.u\circ v=k.v\circ u\\
&\Rightarrow \quad u\circ v=v\circ u \quad \text{en composant par } k^{-1}\ (k\neq 0_{\mathbb{K}} \text{ par hyp.) avec la LCE de } \mathbb{K} \text{ sur } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E).
\end{aligned}$$

Par transitivité de l'égalité :

$$u\circ v=-v\circ u=-u\circ v$$

donc $2.(u\circ v)=0$ or $2\neq 0$ donc $u\circ v=0$ d'où $v\circ u=-u\circ v=0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } u\circ v=v\circ u=0.}$$

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u+v$ appartienne à A_k. Montrer que, dans ce cas

$$\mathrm{Im}(u+v)=\mathrm{Im}u+\mathrm{Im}v \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(u+v)=\mathrm{Ker}u\cap\mathrm{Ker}v$$

- ⋆ Supposons que $u+v\in A_k$.
  Alors $(u+v)^2=k.(u+v)$ donc en développant (attention $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ n'est pas une $\mathbb{K}$-algèbre commutative a priori) :

  $$\underbrace{u^2}_{=k.u \text{ car } u\in A_k}+u\circ v+v\circ u+\underbrace{v^2}_{=k.v \text{ car } v\in A_k}=k.u+k.v$$

  donc $u\circ v+v\circ u=0$ donc (question précédente) $u\circ v=v\circ u=0$.

  ⋆ Supposons que $u\circ v=v\circ u=0$.
  En reprenant le calcul ci-dessus,

  $$\begin{aligned}
  (u+v)^2 &= \underbrace{u^2}_{=k.u \text{ car } u\in A_k}+\underbrace{u\circ v}_{=0 \text{ par hyp.}}+\underbrace{v\circ u}_{=0 \text{ par hyp.}}+\underbrace{v^2}_{=k.v \text{ car } v\in A_k}\\
  &= k.(u+v)
  \end{aligned}$$

  donc $u+v\in A_k$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } u+v\in A_k \iff u\circ v=v\circ u=0.}$$

- Supposons que $u+v\in A_k$.

  ⋆ Soit $x\in\mathrm{Ker}u\cap\mathrm{Ker}v$ fixé quelconque.
  Alors $(u+v)(x)=\underbrace{u(x)}_{=0_E \text{ car } x\in\mathrm{Ker}u}+\underbrace{v(x)}_{=0_E \text{ car } x\in\mathrm{Ker}v}=0_E$ donc $x\in\mathrm{Ker}(u+v)$.
  Par conséquent, $\mathrm{Ker}u\cap\mathrm{Ker}v\subset\mathrm{Ker}(u+v)$

  ⋆ Soit $x\in\mathrm{Ker}(u+v)$ fixé quelconque.
  Alors $u(x)+v(x)=0_E$ donc $u(x)=-v(x)$
  D'après la première partie de la question, $u\circ v=0$ donc

  $$0_E=u(v(x))=u(-u(x))=-u^2(x)=-ku(x)$$

  or $k\neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $u(x)=0_E$ donc $x\in\mathrm{Ker}u$.
  D'après la première partie de la question, $v\circ u=0$ donc

  $$0_E=v(u(x))=v(-v(x))=-v^2(x)=-kv(x)$$

  or $k\neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $v(x)=0_E$ donc $x\in\mathrm{Ker}v$.
  Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u+v)\subset\mathrm{Ker}u\cap\mathrm{Ker}v$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(u+v)=\mathrm{Ker}u\cap\mathrm{Ker}v.}$$

  ⋆ Soit $y\in\mathrm{Im}(u+v)$ fixé quelconque.
  Il existe $x\in E$ tel que $(u+v)(x)=y$ donc $y=\underbrace{u(x)}_{\in\mathrm{Im}v}+\underbrace{v(x)}_{\in\mathrm{Im}v}\in\mathrm{Im}u+\mathrm{Im}v$.
  Par conséquent, $\mathrm{Im}(u+v)\subset\mathrm{Im}u+\mathrm{Im}v$.

  ⋆ Soit $y\in\mathrm{Im}u+\mathrm{Im}v$ fixé quelconque.
  Il existe $(x_u,x_v)\in E^2 : y=u(x_u)+v(x_v)$.
  Par ailleurs, $u\in A_k$ donc $E=\mathrm{Im}u\oplus\mathrm{Ker}u$ donc

  $$\exists(x_{I,u},x_{k,u})\in\mathrm{Im}u\times\mathrm{Ker}u\ :\ x_u=x_{I,u}+x_{K,u}$$

  De même, $v\in A_k$ donc $E=\mathrm{Im}v\oplus\mathrm{Ker}v$ donc

  $$\exists(x_{I,v},x_{k,v})\in\mathrm{Im}v\times\mathrm{Ker}v\ :\ x_v=x_{I,v}+x_{K,v}$$

  On en déduit que

  $$u(x_u)=u(x_{I,u})+u(x_{K,u})=u(x_{I,u})=k.x_{I,u} \quad \text{et} \quad v(x_v)=v(x_{I,v})+v(x_{K,v})=v(x_{I,v})=k.x_{I,v}$$

  si bien que $y=u(x_{I,u})+v(x_{I,v})=k.(x_{I,u}+x_{I,v})$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(u+v)(x_{I,u}+x_{I,v}) &= \underbrace{u(x_{I,u})}_{=k.x_{I,u}} + \underbrace{u(x_{I,v})}_{\substack{=0_E \\ \text{car } u\circ v=0 \Rightarrow \mathrm{Im}v \subset \mathrm{Ker}u}} + \underbrace{v(x_{I,u})}_{\substack{=0_E \\ \text{car } v\circ u=0 \Rightarrow \mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}v}} + \underbrace{v(x_{I,v})}_{=k.x_{I,v}} \\ &= k.(x_{I,u}+x_{I,v})\end{aligned}$$

donc $(u+v)(x_{I,u}+x_{I,v}) = y$ si bien que $\mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}(u+v)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}u + \mathrm{Im}v.}$$

III

Dans cette partie, on considère $k \in \mathbb{K}^*$ et $(u,v) \in A_k^2$ ($\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

III.1. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

(a) Montrer que f et u commutent si et seulement si $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont stables par f ce qui signifie $f(\mathrm{Im}u) \subset \mathrm{Im}u$ et $f(\mathrm{Ker}u) \subset \mathrm{Ker}u$.

- Supposons que f et u commutent.
  - ⋆ Soit $x \in \mathrm{Ker}u$ fixé quelconque.

$$u(f(x)) \underbrace{=}_{f\circ u = u\circ f} f(u(x)) \underbrace{=}_{x\in\mathrm{Ker}u} f(0_E) = 0_E$$

  donc $f(x) \in \mathrm{Ker}u$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \mathrm{Ker}u \text{ est } f\text{-stable.}}$$

  - ⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}u$ fixé quelconque.
  Puisque $u \in A_k$ et $y \in \mathrm{Im}u$, le résultat de la question II.3(b) donne $u(y) = k.y$ donc en prenant l'image par f, $f(u(y)) = k.f(y)$ or $f\circ u = u\circ f$ donc $u(f(y)) = k.f(y)$, or $k \neq 0$ donc $f(y) = \dfrac{1}{k}.u(f(y)) = u\left(\dfrac{1}{k}.f(y)\right)$ si bien que $f(y) \in \mathrm{Im}u$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \mathrm{Im}u \text{ est } f\text{-stable.}}$$

  Ainsi, $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont stables par f.
- Supposons que $\mathrm{Im}u$ et $\mathrm{Ker}u$ sont stables par f.
  Soit $x \in E$ fixé quelconque.
  Puisque $u \in A_k$, d'après la question II.3(a), $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$ donc $\exists (x_I, x_K) \in \mathrm{Im}u \times \mathrm{Ker}u$:

$$x = x_I + x_K$$

  de sorte que

$$(f\circ u)(x) = f(u(x)) \underbrace{=}_{\text{question II.3(b)}} f(k.x_I) = k.f(x_I)$$

  et

$$(u\circ f)(x) = u(f(x_I)+f(x_K)) = \underbrace{u(f(x_I))}_{\substack{=k.f(x_I) \\ \text{d'après quest. II.3(b) car Im}u\ f\text{-stable} \\ \text{donc } f(x_I)\in \mathrm{Im}u}} + \underbrace{u(f(x_K))}_{\substack{=0_E \\ \text{car Ker}u\ f\text{-stable} \\ \text{donc } f(x_K)\in\mathrm{Ker}u}} = k.f(x_I)$$

  donc $(f\circ u)(x) = (u\circ f)(x)$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } f\circ u = u\circ f.}$$

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par v si et seulement si $F = (F\cap \mathrm{Im}v) \oplus (F \cap \mathrm{Ker}v)$.

- Supposons que F est v-stable.
  La stabilité de F par v permet de restreindre v à F au départ et à F à l'arrivée en $v_{|F}^{|F} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F)$.
  De plus $v \in A_k$ donc $v^2 = k.v$ donc $(v_{|F}^{|F})^2 = k.v_{|F}^{|F}$ si bien que $v_{|F}^{|F}$ appartient à l'ensemble A_k associé à l'espace vectoriel F donc le résultat de la question II.3(a) donne

$$F = \mathrm{Im}v_{|F}^{|F} \oplus \mathrm{Ker}v_{|F}^{|F}$$

  - ⋆ D'une part

$$\mathrm{Ker}v_{|F}^{|F} = \{x\in F \mid v(x) = 0_E\} = \{x \in F \mid x \in \mathrm{Ker}v\} = F\cap \mathrm{Ker}v$$

  - ⋆ D'autre part,

$$\mathrm{Im}v_{|F}^{|F} = \{v(x) \mid x\in F\} \subset \mathrm{Im}v \text{ et puisque } F \text{ est } v\text{-stable, } \mathrm{Im}v_{|F}^{|F} = v(F) \subset F$$

  donc $\mathrm{Im}v_{|F}^{|F} \subset F\cap \mathrm{Im}v$.
  Réciproquement, soit $y \in F\cap\mathrm{Im}v$ fixée quelconque, alors

$$y \in F \text{ et, puisque } y\in \mathrm{Im}v \text{ et } v\in A_k,\ v(y) = k.y$$

  donc $y = v\left(\underbrace{\dfrac{1}{k}.y}_{\in F}\right) = v_{|F}^{|F}\left(\dfrac{1}{k}.y\right)$ donc $y \in v_{|F}^{|F}$ d'où $F\cap\mathrm{Im}v \subset \mathrm{Im}v_{|F}^{|F}$.

  Par conséquent, $\mathrm{Im}v_{|F}^{|F} = F \cap \mathrm{Im}v$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (F\cap \text{Im}v)\oplus(F\cap\text{Ker}v)=F.}$$

- Supposons que $F=(F\cap \text{Im}v)\oplus(F\cap\text{Ker}v)$.
  Soit $x\in F$ fixé quelconque.
  D'après l'hypothèse, $\exists(x_I,x_K)\in(F\cap\text{Im}v)\times(F\cap\text{Ker}v)$ tels que

$$x=x_I+x_K$$

  Alors

$$v(x)=\underbrace{v(x_I)}_{\substack{=k.x_I\\ \text{d'après quest. II.3(b) car } x_I\in\text{Im}v \text{ et } v\in A_k}}+\underbrace{v(x_K)}_{\substack{=0_E\\ \text{car } x_K\in\text{Ker}v}}=k.x_I$$

  Or $x_I\in F$ et F sous-espace vectoriel de E donc $k.x_I\in F$ donc $v(x)\in F$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, } F \text{ est } v\text{-stable.}}$$

(c) Montrer que u et v commutent si et seulement si

$$E=(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Im}u\cap\text{Ker}v)\oplus(\text{Im}u\cap\text{Im}v)$$

-

$$\begin{aligned}
u \text{ et } v \text{ commutent} &\iff \text{Im}u \text{ et Ker}u \text{ sont } v\text{-stables} \quad \text{quest. III.1(a) pour } f\leftarrow v\\
&\iff \text{Im}u \text{ est } v\text{-stable et Ker}u \text{ est } v\text{-stable}\\
&\iff \text{Im}u=(\text{Im}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Im}u\cap\text{Ker}v) \quad\text{et}\quad \text{Ker}u=(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)\\
&\qquad \text{en appliquant la question III.1(b) pour } F\leftarrow\text{Im}u \text{ et } F\leftarrow\text{Ker}u\\
&\qquad \text{or } u\in A_k \text{ donc la question II.3(b) donne } E=\text{Im}u\oplus\text{Ker}u\\
&\Rightarrow E=(\text{Im}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Im}u\cap\text{Ker}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)
\end{aligned}$$

- Réciproquement, supposons que $E=(\text{Im}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Im}u\cap\text{Ker}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\oplus(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)$.
  - ⋆ Soit $x\in\text{Ker}u$ fixé quelconque.
    $\exists(x_{I,u,I,v},x_{I,u,K,v},x_{K,u,I,v},x_{K,u,K,v})\in(\text{Im}u\cap\text{Im}v)\times(\text{Im}u\cap\text{Ker}v)\times(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\times(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)$:

$$x=x_{I,u,I,v}+x_{I,u,K,v}+x_{K,u,I,v}+x_{K,u,K,v}$$

    Par conséquent,

$$\begin{aligned}
u(x)&=\underbrace{u(x_{I,u,I,v})}_{\substack{=k.x_{I,u,I,v}\\ \text{car } x_{I,u,I,v}\in\text{Im}u}}+\underbrace{u(x_{I,u,K,v})}_{\substack{=k.x_{I,u,K,v}\\ \text{car } x_{I,u,K,v}\in\text{Im}u}}+\underbrace{u(x_{K,u,I,v})}_{\substack{=0_E\\ \text{car } x_{K,u,I,v}\in\text{Ker}u}}+\underbrace{u(x_{K,u,K,v})}_{\substack{=0_E\\ \text{car } x_{K,u,K,v}\in\text{Ker}u}}\\
&=k.(x_{I,u,I,v}+x_{K,u,I,v})
\end{aligned}$$

    Puisque $x\in\text{Ker}u$, $k.(x_{I,u,I,v}+x_{I,u,K,v})=0_E$, or $k\neq 0$ donc

$$x_{I,u,I,v}+x_{I,u,K,v}=0_E$$

    or $\text{Im}u\cap\text{Im}v$ et $\text{Im}u\cap\text{Ker}v$ sont en somme directe donc par unicité de l'écriture de 0_E,

$$x_{I,u,I,v}=x_{I,u,K,v}=0_E$$

    d'où $x=x_{K,u,I,v}+x_{K,u,K,v}$.
    Calculons $v(x)$:

$$v(x)=\underbrace{v(x_{K,u,I,v})}_{\substack{=k.x_{K,u,I,v}\\ \text{car } x_{K,u,I,v}\in\text{Im}v}}+\underbrace{v(x_{K,u,K,v})}_{\substack{=0_E\\ \text{car } x_{K,u,K,v}\in\text{Ker}v}}=k.x_{K,u,I,v}\in\text{Ker}u\cap\text{Im}v$$

    donc $v(x)\in\text{Ker}u$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, Ker}u \text{ est } v\text{-stable.}}$$

  - ⋆ Soit $y\in\text{Im}u$ fixé quelconque.
    Il existe $x\in E$ tel que $y=u(x)$.
    $\exists(x_{I,u,I,v},x_{I,u,K,v},x_{K,u,I,v},x_{K,u,K,v})\in(\text{Im}u\cap\text{Im}v)\times(\text{Im}u\cap\text{Ker}v)\times(\text{Ker}u\cap\text{Im}v)\times(\text{Ker}u\cap\text{Ker}v)$:

$$x=x_{I,u,I,v}+x_{I,u,K,v}+x_{K,u,I,v}+x_{K,u,K,v}$$

    Par conséquent,

$$y=u(x)=k.x_{I,u,I,v}+k.x_{I,u,K,v}$$

    donc

$$v(y)=k.\underbrace{v(x_{I,u,I,v})}_{=k.x_{I,u,I,v}}+k.\underbrace{v(x_{I,u,K,v})}_{=0_E}=k^2x_{I,u,I,v}\in\text{Im}u\cap\text{Im}v$$

    donc $v(y)\in\text{Im}u$.

$$\boxed{\text{Par conséquent, Im}u \text{ est } v\text{-stable.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, Im}u \text{ et Ker}u \text{ sont } v \text{ stables donc la question III.1(a) pour } f\leftarrow v \text{ permet de conclure au fait que } u \text{ et } v \text{ commutent.}}$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que $u \circ v = v \circ u$.

Notons $E_1 = \text{Ker}u \cap \text{Ker}v$, $E_2 = \text{Ker}u \cap \text{Im}v$, $E_3 = \text{Im}u \cap \text{Ker}v$ et $E_4 = \text{Im}u \cap \text{Im}v$. Notons π_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à $E_2 \oplus E_3 \oplus E_3$, π_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à $E_1 \oplus E_3 \oplus E_3$, π_3 et π_4 de la même manière.

III.2. (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, exprimer $\pi_i \circ \pi_j$.

- ⋆ Si $i = j$, π_i est un projecteur par définition donc $\pi_i \circ \pi_j = \pi_i^2 = \pi_i$.
- ⋆ Si $i \neq j$, par propriété de l'image (= le sous-espace sur lequel on projette) et du noyau (le sous-espace parallèlement auquel on projette) d'un projecteur, observons que $\text{Ker}\pi_i = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{4} E_k$ donc $\text{Im}\pi_j = E_j \subset \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{4} E_k = \text{Ker}\pi_i$ donc $\pi_i \circ \pi_j = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\ \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}.\pi_i.}$$

(b) En déduire que, pour tout $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4$, $(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^2 = a_1^2\pi_1 + a_2^2\pi_2 + a_3^2\pi_3 + a_4^2\pi_4$.

Soient pour tout $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4$.
En calculant dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (non commutative a priori)

$$\begin{aligned}
(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i.\pi_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{4} a_j.\pi_j\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} (a_i.\pi_i) \circ (a_j.\pi_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} a_i a_j.(\pi_i \circ \pi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i^2.\underbrace{\pi_i^2}_{=\pi_i} + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2 \\ i\neq j}} a_i a_j.\underbrace{\pi_i \circ \pi_j}_{=0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}} \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i^2.\pi_i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4,\ (a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^2 = a_1^2\pi_1 + a_2^2\pi_2 + a_3^2\pi_3 + a_4^2\pi_4.}$$

(c) Prouvez une simplification générale de l'expression $(a_1\pi_1+a_2\pi_2+a_3\pi_3+a_4\pi_4)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en fonction de $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4$, de $k \in \mathbb{N}$ et des $(\pi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

Soient $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4$ fixés quelconques.
Considérons la propriété $\mathcal{P}(\cdot)$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(k) \ :\ « \ (a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^k = a_1^k\pi_1 + a_2^k\pi_2 + a_3^k\pi_3 + a_4^k\pi_4 \ »$$

- Pour $k = 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie car, par convention,

$$(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^0 = \text{Id}_E$$

et

$$a_1^0\pi_1 + a_2^0\pi_2 + a_3^0\pi_3 + a_4^0\pi_4 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \text{Id}_E$$

- $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
(a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^{k+1} &= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i.\pi_i\right)^k \circ \left(\sum_{j=1}^{4} a_j.\pi_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i^k.\pi_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{4} a_j.\pi_j\right) \quad \text{car } \mathcal{P}(k) \text{ est vraie,} \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} (a_i^k.\pi_i) \circ (a_j.\pi_j) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} a_i^k a_j.(\pi_i \circ \pi_j) \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i^k a_i.\underbrace{\pi_i^2}_{=\pi_i} + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2 \\ i\neq j}} a_i^k a_j.\underbrace{\pi_i \circ \pi_j}_{=0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}} \\
&= \sum_{i=1}^{4} a_i^{k+1}.\pi_i
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{K}^4,\ \forall k \in \mathbb{N},\ (a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + a_3\pi_3 + a_4\pi_4)^k = a_1^k\pi_1 + a_2^k\pi_2 + a_3^k\pi_3 + a_4^k\pi_4.}$

III.3. (a) Exprimer u, v, $u \circ v$ et Id_E en fonction de π_1, π_2, π_3 et π_4.

Soit $x \in E$ fixé quelconque.
Il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Par définition des projecteurs $(\pi_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$, $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $\pi_i(x) = x_i$.

- ⋆ $u(x) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3) + u(x_4) = k.x_3 + k.x_4 = (k.\pi_3 + k.\pi_4)(x)$,
- ⋆ $v(x) = v(x_1) + v(x_2) + v(x_3) + v(x_4) = k.x_2 + k.x_4 = (k.\pi_2 + k.\pi_4)(x)$,
- ⋆ $u(v(x)) = k.u(x_2) + k.u(x_4) = k^2.x_4 = k^2.\pi_4(x)$,
- ⋆ $\mathrm{Id}_E(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4)(x)$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } u = k.(\pi_3 + \pi_4),\ v = k.(\pi_2 + \pi_4),\ u \circ v = k^2.\pi_4,\ \mathrm{Id}_E = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4.}$

(b) Montrer que, si E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces de E non réduits au vecteur nul de E, alors $\mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}_E, u, v, u \circ v\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ de dimension 4.

- Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ fixés quelconques tels que

$$a.u + b.v + c.u \circ v + d.\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$$

En utilisant les expressions de u, v, $u \circ v$ et Id_E en fonction des projecteurs $(\pi_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$, cette relation donne

$$d.\pi_1 + (bk + d).\pi_2 + (ak + d).\pi_3 + (ak + bk + ck^2 + d).\pi_4 = 0_{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$$

Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, puisque $E_i \neq \{0_E\}$, choissons $t_i \in E_i \setminus \{0_E\}$.
En évaluant la relation ci-dessus

- ⋆ en t_1, on obtient $d.t_1 = 0_E$ or $t_1 \neq 0_E$ donc $d = 0$.
- ⋆ en t_2, on obtient $(bk + d).t_2 = 0_E$ or $t_2 \neq 0_E$ donc $bk + d = 0$. Or $d = 0$ et $k \neq 0$ donc $b = 0$.
- ⋆ en t_3, on obtient $(ak + d).t_3 = 0_E$ or $t_3 \neq 0_E$ donc $ak + d = 0$. Or $d = 0$ et $k \neq 0$ donc $a = 0$.
- ⋆ en t_4, on obtient $(ak + bk + ck^2 + d).t_4 = 0_E$ or $t_4 \neq 0_E$ donc $ak + bk + ck^2 + d = 0$. Or $a = b = d = 0$ et $k \neq 0$ donc $c = 0$.

Par conséquent, $(u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E)$ est une famille libre,

$\boxed{\text{donc c'est une base de } \mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\} \text{ qui est de dimension 4.}}$

- ⋆ $\mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\}$ est inclus dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
  - ⋆ $\mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ (par définition de la notation Vect).
  - ⋆ Soient $(f, g) \in \mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\}^2$ fixés quelconques. Il existe $(a, b, c, d, a', b', c', d') \in \mathbb{K}^8$: $f = a.u + b.v + c.u \circ v + d.\mathrm{Id}_E$ et $g = a'.u + b'.v + c'.u \circ v + d'.\mathrm{Id}_E$.

$$\begin{aligned} f \circ g &= (a.u + b.v + c.u \circ v + d.\mathrm{Id}_E) \circ (a'.u + b'.v + c'.u \circ v + d'.\mathrm{Id}_E) \\ &= aa'.u^2 + ab'.u \circ v + ac'.u \circ u \circ v + ad'.u \circ \mathrm{Id}_E \\ &\quad + ba'.v \circ u + bb'v^2 + bc'.v \circ u \circ v + bd'.v \circ \mathrm{Id}_E \\ &\quad ca'.u \circ v \circ u + cb'.u \circ v \circ v + cc'.(u \circ v)^2 + cd'.u \circ v \circ \mathrm{Id}_E \\ &\quad da'.\mathrm{Id}_E \circ u + db'.\mathrm{Id}_E \circ v + dc'.\mathrm{Id}_E \circ u \circ v + dd'\mathrm{Id}_E^2 \end{aligned}$$

Or $u^2 = k.u$, $v^2 = k.v$, $u^2 \circ v = k.u \circ v$, $u \circ v = v \circ u$, $v \circ u \circ v = u \circ v^2 = k.u \circ v$ (car u et v commutent), $(u \circ v)^2 = k^2.u \circ v$ (question II.4) donc

$$\begin{aligned} f \circ g &= (aa'k + ad' + da').u + (bb'k + bd' + db').v \\ &\quad + (ab' + ac'k + ba' + bc'k + ca'k + cb'k + cc'k^2 + cd' + dc').u \circ v + dd'\mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

donc $f \circ g \in \mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)}$

Rmq : en observant le rôle symétrique des coefficients de f et g dans l'expression de $f \circ g$, on obtient par commutativité du corps $\mathbb{K}$ que $f \circ g = g \circ f$ donc $\mathrm{Vect}\{u, v, u \circ v, \mathrm{Id}_E\}$ est une sous-algèbre commutative.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}_E, u, v, u \circ v\} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \text{ de dimension 4.}}$
