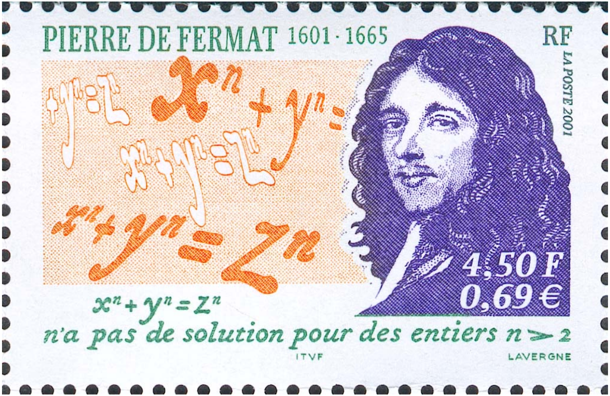

Leçon 105 - Fonctions de deux (plusieurs) variables

10 juin 2025

⇒Normes équivalentes et cie.

⇒Topologie : ouverts, fermés

Problèmes

Problème Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R}^p$

Problèmes

Problème Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^p$

Problème Si la valeur absolue est remplacée par une norme...

Problèmes

Problème Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^p$

Problème Si la valeur absolue est remplacée par une norme...

Problème Continuité et représentation de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Problèmes

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

Problèmes

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

Problème Dérivation $\Rightarrow$ continuité

Problèmes

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

Problème Dérivation $\Rightarrow$ continuité

Problème « Tout problème mathématique est le calcul d'un maximum »

⇒Normes équivalentes et cie.

⇒Topologie : ouverts, fermés

Topologie ?

Heuristique. Pourquoi la topologie ?

Selon Wikipédia, l'étymologie du mot « topologie » (en grec $\tau o\pi o\lambda o\gamma\iota\alpha$) procède de l'association de deux noms grecs $\tau o\pi o\sigma$ (topos, masculin) et $\lambda o\gamma\iota\alpha$ (logia, féminin) qui signifient respectivement « le lieu » et « l'étude ». Littéralement, topologie signifie l'« étude d'un lieu » ou « étude topique ».
Elle s'intéresse donc à définir ce qu'est un lieu (appelé aussi « espace ») et quelles peuvent en être les propriétés. Une ancienne dénomination fut analysis situs, c'est-à-dire « l'étude du lieu ».
La topologie est une branche des mathématiques concernant l'étude des déformations spatiales par des transformations continues (sans arrachages ni recollement des structures). La topologie s'intéresse plus précisément aux espaces topologiques et aux applications qui les lient, dites « continues ».

En analyse, grâce aux informations qu'elle fournit sur l'espace considéré, elle permet d'obtenir un certain nombre de résultats (existence ou unicité de solutions d'équations différentielles, notamment).

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

Définition - Norme

Soit E, un $\mathbb{K}$e.v. (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$N : E \to \mathbb{R}^+$ est un norme si :

1. $\forall\ x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
2. $\forall\ x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\forall\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$
4. $\forall\ x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (I.T.)

Un *espace vectoriel* muni d'une norme est appelé un <u>espace vectoriel normé</u>

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

Définition - Norme

Soit E, un $\mathbb{K}$e.v. (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$N : E \to \mathbb{R}^+$ est un norme si :

1. $\forall\ x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
2. $\forall\ x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$
3. $\forall\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$
4. $\forall\ x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (I.T.)

Un *espace vectoriel* muni d'une norme est appelé un <u>espace vectoriel normé</u>

Remarque Norme et produit scalaire

Inégalité triangulaire

Savoir-faire. Renverser l'inégalité triangulaire

Dans beaucoup d'exercices, il faut utiliser l'inégalité triangulaire pour également minorer $d(x, y) = \|x - y\|$.

Comme $\|x\| = \|x + y - y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$,

donc $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$, et de même $\|y - x\| \geqslant \|y\| - \|x\|$,

or $\|x - y\| = \|y - x\|$, donc

$$\|x - y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

Rappelons que l'on a la majoration :
$\|x - y\| \leqslant \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

Inégalité triangulaire

Savoir-faire. Renverser l'inégalité triangulaire

Dans beaucoup d'exercices, il faut utiliser l'inégalité triangulaire pour également minorer $d(x,y) = \|x-y\|$.

Comme $\|x\| = \|x+y-y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$,

donc $\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$, et de même $\|y-x\| \geqslant \|y\| - \|x\|$,

or $\|x-y\| = \|y-x\|$, donc

$$\|x-y\| \geqslant \big|\|x\| - \|y\|\big|$$

Rappelons que l'on a la majoration :
$\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$

Remarque Notation

Distance

Définition - Distance

Soit E un $\mathbb{K}$ev. $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ est un distance si :

1. $\forall\ x, y \in E,\ d(x,y) \geqslant 0$
2. $\forall\ x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall\ x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
4. $\forall\ x, y, z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

Distance

Définition - Distance

Soit E un $\mathbb{K}$ev. $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ est un distance si :

1. $\forall\, x, y \in E,\ d(x,y) \geqslant 0$
2. $\forall\, x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall\, x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
4. $\forall\, x, y, z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

Exercice

Montrer que si N est une norme sur E, alors $d : (x,y) \mapsto N(x-y)$ est une distance sur E

Exemple de normes (espaces vectoriels de dimension finie)

Proposition - Exemple de normes de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{K}^n$

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
Alors, Les applications suivantes en sont des normes

- $\|(x_1, x_2, \ldots x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|(x_1, x_2, \ldots x_n)\|_\infty = \max_i(|x_i|)$
- $\|(x_1, x_2, \ldots x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

  Cette dernière norme dérive du produit scalaire $(x|y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Exemple de normes (espaces vectoriels de dimension finie)

Proposition - Exemple de normes de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{K}^n$

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.
Alors, Les applications suivantes en sont des normes

- $\|(x_1, x_2, \dots x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|(x_1, x_2, \dots x_n)\|_\infty = \max_i(|x_i|)$
- $\|(x_1, x_2, \dots x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

  Cette dernière norme dérive du produit scalaire $(x|y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Il est important de savoir démontrer cela.

Démonstration

Convergence dans E

On retrouve la même définition que pour la convergence de suites réelles, mais où la valeur absolue est remplacée par la norme.

Convergence dans E

On retrouve la même définition que pour la convergence de suites réelles, mais où la valeur absolue est remplacée par la norme.

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E.
On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, \|x_n - x\| \leqslant \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.
On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente. Si l'ensemble est non vide : $\{x\} = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} B(x_n, \epsilon)$ (Les boules seront définies plus loin...)

Convergence dans E

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E.
On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N, \|x_n - x\| \leqslant \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.
On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente. Si l'ensemble est non vide : $\{x\} = \bigcap\limits_{\epsilon>0} \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant N} B(x_n, \epsilon)$ (Les boules seront définies plus loin...)

<u>Exercice</u>

Montrer l'unicité de la limite

Convergence dans E

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E.
On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall \ \epsilon > 0, \exists \ N \in \mathbb{N} \mid \forall \ n \geqslant N, \|x_n - x\| \leqslant \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.
On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente. Si l'ensemble est non vide : $\{x\} = \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} B(x_n, \epsilon)$ (Les boules seront définies plus loin...)

Exercice
Montrer l'unicité de la limite

Exercice Convergence de $\begin{pmatrix} (1+\frac{1}{n})^n & n\sin\frac{1}{n} \\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} & \arctan n \end{pmatrix}$

Normes équivalentes

Attention. Résultat qui dépend de la norme

A priori ce résultat dépend de la norme considérée ! Ce qui est un vrai et grave problème, en particulier pour les suites (ou séries) de fonctions que vous verrez en seconde année.
Mais nous verrons plus loin que souvent ce problème se résout : il suffit que E soit de dimension finie

Normes équivalentes

Heuristique. Une même limite pour deux normes différentes

Pour **un même espace vectoriel**, nous pouvons avoir **plusieurs normes** en présence.

Or celles-ci ont pour vocation de définir la limite de suite (en remplaçant la valeur absolue).

Est-il possible qu'une même suite de nombres de E converge vers des limites différentes, selon la norme considérée ?

Pour s'assurer que la limite est identique, il faut que pour deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on ait :

$$\left(\forall\ \epsilon_1, \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N_1,\ \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_1\right) \Longrightarrow \left(\forall\ \epsilon_2, \exists\ N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N_2,\ \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_2\right)$$

et

$$\left(\forall\ \epsilon_2, \exists\ N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N_2,\ \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_1\right) \Longrightarrow \left(\forall\ \epsilon_1, \exists\ N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N_1,\ \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_2\right)$$

Normes équivalentes

Heuristique. Une même limite pour deux normes différentes

Pour cela il faut que $\|x_n - \ell\|_1$ soit petite en même temps que $\|x_n - \ell\|_2$, pour tout (x_n) et ℓ bien choisie.
Notre habitude pour démontrer une convergence est d'utiliser des majorations et minorations,
il faut et il suffit ici que les normes soient comparables (majorer et minorer) avec de constante de proportionnalité :

$$\exists\ A, B \text{ tels que } \forall\ X \in E \qquad \|X\|_1 \leqslant A\|X\|_2 \text{ et } \|X\|_2 \leqslant B\|X\|_1$$

Que l'on peut résumer en une formule

Normes équivalentes

Proposition - Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé, muni de deux normes N et N'.
On dit que N et N' sont équivalentes si il existe a et b tel que :

$$\forall\ x \in E, \qquad aN'(x) \leqslant N(x) \leqslant bN'(x).$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Normes équivalentes

Proposition - Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé, muni de deux normes N et N'.
On dit que N et N' sont équivalentes si il existe a et b tel que :

$$\forall\ x \in E, \qquad aN'(x) \leqslant N(x) \leqslant bN'(x).$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

<u>Exercice</u>

Montrer que N' et N sont équivalentes si et seulement si :

$$\forall\ (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, (x_n) \to 0_E \text{ pour } N \Leftrightarrow (x_n) \to 0_E \text{ pour } N'.$$

Normes usuelles

Notons que tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme...

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$.
Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

Normes usuelles

Notons que tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme...

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$.
Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

Démonstration

Normes usuelles

Notons que tout $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme...

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$.
Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

Démonstration

Exercice

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$

Toutes équivalentes

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?
Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

Toutes équivalentes

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?
Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

Proposition - Norme équivalentes dans $\mathbb{R}^2$

Toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Toutes équivalentes

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?
Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

Proposition - Norme équivalentes dans $\mathbb{R}^2$

Toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Démonstration

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

Définition - Boules ouvertes / fermées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- boule ouverte de centre x et de rayon ρ, l'ensemble
$$B(x,\rho) = \{y \in E \mid \|x-y\| < \rho\}.$$
- boule fermé de centre x et de rayon ρ, l'ensemble
$$B_f(x,\rho) = \{y \in E \mid \|x-y\| \leqslant \rho\}$$

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

Définition - Boules ouvertes / fermées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- boule ouverte de centre x et de rayon ρ, l'ensemble
$$B(x,\rho) = \{y \in E \mid \|x-y\| < \rho\}.$$
- boule fermé de centre x et de rayon ρ, l'ensemble
$$B_f(x,\rho) = \{y \in E \mid \|x-y\| \leqslant \rho\}$$

Proposition - Suite - en terme de boule

Dans $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé,
$(x_n) \to x$ si et seulement si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ n \geqslant N,\ x_n \in B_f(x,\epsilon)$$

⇒Normes équivalentes et cie.

⇒Topologie : ouverts, fermés

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall\ x \in \Omega, \exists\ \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall\ x \in \Omega, \exists\ \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur $\mathbb{R}$

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall\ x \in \Omega, \exists\ \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur $\mathbb{R}$
Exemple Sur $\mathbb{R}^2$

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall\, x \in \Omega, \exists\, \rho > 0 \text{ tel que } B(x,\rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur $\mathbb{R}$

Exemple Sur $\mathbb{R}^2$

Exercice

Montrer que $A :=]0,1[\times[0,1]$ n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$

Stabilité des ouverts

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Stabilité des ouverts

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
Une réunion d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert

Stabilité des ouverts

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
Une réunion d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert

Démonstration

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur $\mathbb{R}$. Sur E

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur $\mathbb{R}$. Sur E

Exercice

Montrer que $B = B_f(a,r)$ est un fermé de E. On peut s'aide d'un dessin !

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

Attention. Faux pour une réunion infinie dénombrable de fermés

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]=]0,1[$, qui n'est pas fermé

Un premier lien avec les suites

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E
ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F, convergente, on a $\lim(x_n) \in F$

Un premier lien avec les suites

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E

ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F, convergente, on a $\lim(x_n) \in F$

Démonstration

⇒Normes équivalentes et cie.

⇒Topologie : ouverts, fermés

Dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

Heuristique. Dans $\mathbb{R}_+^2$

L'ensemble $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y<1\}$ est-il ouvert ou fermé ? Cela semble compliqué.

Dans $\mathbb{R}^2$, $(0,0) \in \mathbb{R}_+$, mais il n'existe aucune boule centré en $(0,0)$ contenu dans S (quel que soit la norme).

Et en même temps $(1,0) \in \overline{S}$ mais il n'existe aucune boule centré en $(1,0)$ contenu dans $\overline{S}$.

Dans $\mathbb{R}^2$, S n'est ni ouvert, ni fermé.

Mais ce n'est pas le cas si l'on regarde QUE dans $\mathbb{R}_+^2$. En effet, dans ce cas, la boule ouverte (euclidienne) centré en $(0,0)$ de rayon $r = \frac{1}{10}$ n'a que des éléments dans S, puisqu'également nécessairement dans $\mathbb{R}_+^2$.

Donc dans $\mathbb{R}^2$, S est ouvert.

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :

$$\forall\, x \in U, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x,\epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :

$A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :
   $\forall\, x \in U, \exists\, \epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap A \subset U$.
2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :
   $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :
   $\forall\ x \in U, \exists\ \epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap A \subset U$.
2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :
   $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E. On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :
   $\forall\ x \in U, \exists\ \epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap A \subset U$.
2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :
   $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E. On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

Demonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Normes équivalentes et cie.

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

- Les définitions de la continuité, convergence. . .nécessite une mesure de distance :
  ⇒ Etude dans les espaces vectoriels normés

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

- Les définitions de la continuité, convergence. . .nécessite une mesure de distance :
  ⇒ Etude dans les espaces vectoriels normés
- Nécessité de l'équivalence des normes :
  $\exists\, a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, x \in E$, $aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_2(x)$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Normes équivalentes et cie.

- Les définitions de la continuité, convergence. . .nécessite une mesure de distance :
  $\Rightarrow$ Etude dans les espaces vectoriels normés
- Nécessité de l'équivalence des normes :
  $$\exists\, a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall\, x \in E,\ aN_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant bN_2(x).$$
- Dans $\mathbb{R}^2$ (et $\mathbb{R}^n$ généralement), toutes les normes sont équivalentes

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Normes équivalentes et cie.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Normes équivalentes et cie.

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

Pour le prochain cours

- Lecture : 2. Topologie (fin)
  3. Continuité
- Exercice du cours : N°824 & 825
- TD de jeudi :
  8h-10h : 826, 830, exercice Caractérisation Borel-Lebesgue, 832, 834
  10h-12 : 827, 831, exercice Caractérisation Borel-Lebesgue, 833, 835