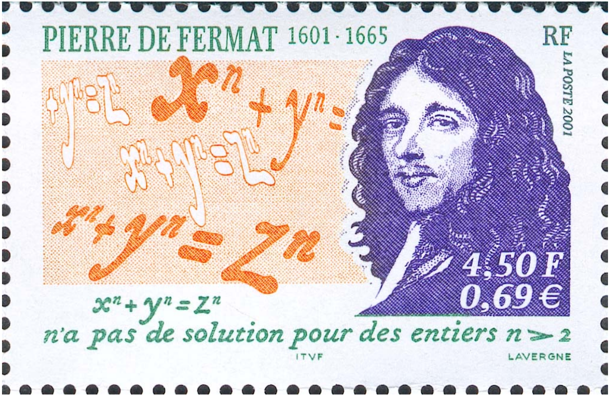
⇒ Dérivée partielle
⇒ Règle de la chaine
1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine



Leçon 107 - Fonctions de deux (plusieurs) variables

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Principe

Heuristique. Comment définir alors une dérivée de f ?

Si notre motivation est de généraliser la démarche de dérivation d'une fonction à une variable : le signe de f' indique les variations de f, alors il faut se demander ce que signifie que la fonction est croissante ?
Dans $\mathbb{R}^2$, cela n'a plus aucun sens.
Il ne faut donc pas s'attacher à cette approche des choses : dérivée = variations, mais plutôt à l'autre approche beaucoup plus essentielle : dérivée=DL_1.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Différentielle

Définition - Différentielle

Soient $a \in U$, ouvert de E et $f : U \to F$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L_a : E \to F$ telle que : $\forall\ h$ tel que $a + h \in U$,
$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$.
On note alors $\partial f(a)(h)$ le vecteur $L_a(h)$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Différentielle

Définition - Différentielle

Soient $a \in U$, ouvert de E et $f : U \to F$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L_a : E \to F$ telle que : $\forall\ h$ tel que $a + h \in U$,
$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$.
On note alors $\partial f(a)(h)$ le vecteur $L_a(h)$.

Remarque Sens du $o(h)$

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Différentielle

Définition - Différentielle

Soient $a \in U$, ouvert de E et $f : U \to F$.
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L_a : E \to F$ telle que : $\forall\ h$ tel que $a + h \in U$, $f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$.
On note alors $\partial f(a)(h)$ le vecteur $L_a(h)$.

Remarque Sens du $o(h)$

Attention. Nature des objets

Que sont ∂f, $\partial f(a)$ et $\partial f(a)(h)$?
Dans l'ordre inverse : un vecteur, une application linéaire et une application de E dans $\mathscr{L}(E,F)$?

Exemple

Application Fonction f linéaire. Exemple de la trace.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Exemple

Application Fonction f linéaire. Exemple de la trace.

Exemple Fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple Fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy^2 + 3\ln x + \frac{x}{y}$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Exemple

Application Fonction f linéaire. Exemple de la trace.

Exemple Fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple Fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy^2 + 3\ln x + \frac{x}{y}$.

Il reste à faire la démonstration de l'unicité
Démonstration

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Définition

On se concentre uniquement ici sur des fonctions de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Définition

On se concentre uniquement ici sur des fonctions de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Selon ce que l'on a déjà vu en sciences physiques :

Définition. Dérivée partielle (d'ordre 1)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $\vec{a} \in U$.

Notons $(e_1, e_2, \dots e_p)$, la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^p$.

On appelle dérivées partielles de f la famille :

$(\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_p f(\vec{a}))$:

$$\forall\ i \in \mathbb{N}_p, \qquad \partial_i f(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e_i}) - f(\vec{a})}{h}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on peut noter également ce nombre $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$

Exemple $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + (y - z)x + y^z$

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Mise en pratique

Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles

La dérivée partielle selon le vecteur de base $\vec{e}_i$ s'obtient en calculant la dérivée de $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$.
Cela consiste donc souvent, lorsque les variables associés aux $(\vec{e}_j)$ sont clairement définissables, à dériver la fonction f en **tenant pour constante** toutes les variables x_j associés aux vecteurs $\vec{e}_j \neq \vec{e}_i$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Mise en pratique

Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles

La dérivée partielle selon le vecteur de base $\vec{e}_i$ s'obtient en calculant la dérivée de $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$.
Cela consiste donc souvent, lorsque les variables associés aux $(\vec{e}_j)$ sont clairement définissables, à dériver la fonction f en **tenant pour constante** toutes les variables x_j associés aux vecteurs $\vec{e}_j \neq \vec{e}_i$.

Exemple Calcul des dérivées partielles de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ en $(1,2)$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Mise en pratique

<u>Exercice</u>

Calculer les dérivées partielles de la fonction f précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en $\vec{a}$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Mise en pratique

Exercice

Calculer les dérivées partielles de la fonction f précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en $\vec{a}$.

Remarque Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est différentiable

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Mise en pratique

<u>Exercice</u>

Calculer les dérivées partielles de la fonction f précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en $\vec{a}$.

Remarque Si $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est différentiable

Attention. Nature des objets

Supposons que $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est un nombre (a est un vecteur) et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ est une application de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Définition

Nous cherchons un critère réciproque : l'existence des dérivées partielles implique-t-elle la différentiabilité ?
Un critère *suffisant* à ce que « tout se passe bien »est le fait que l'application soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Un exemple illustrera ce qui peut (mal) se passer lorsque la fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition

Nous cherchons un critère réciproque : l'existence des dérivées partielles implique-t-elle la différentiabilité ?
Un critère *suffisant* à ce que « tout se passe bien »est le fait que l'application soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Un exemple illustrera ce qui peut (mal) se passer lorsque la fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition - Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou continûment différentiable sur U (ouvert),
si toutes les fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues de U dans $\mathbb{R}$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

A savoir !

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

A savoir !

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

Proposition - Exemples de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

- Les fonctions polynomiales (à p variables) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U *donc $\mathscr{C}^1(U)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est un espace vectoriel*

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

A savoir !

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

Proposition - Exemples de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

- Les fonctions polynomiales (à p variables) sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
- Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U *donc $\mathscr{C}^1(U)$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est un espace vectoriel*

Remarque Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Attention !

La dérivabilité n'implique pas la continuité !

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Attention !

La dérivabilité n'implique pas la continuité !

Attention. Fonction dérivable mais non continûment

La condition de continuité des dérivées de f est nécessaire comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit $f:(x,y)\mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ prolongé en $f(0,0)=0$.

Ici, les dérivées partielles en $\vec{0}=(0,0)$ donnent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

Et plus généralement, pour tout $\vec{u}=(a,b)$,

$$\varphi_{\vec{u}}(h)=\frac{1}{h}\left(f(\vec{0}+h\vec{u})-f(\vec{0})\right)=\frac{h^3ab^2}{h(h^2(a^2+b^2)}=\frac{ab^2}{a^2+b^2}\neq 0$$

Donc on n'a pas $\mathrm{D}_{\vec{u}}(f)(0,0)\neq a\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)+b\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Attention !

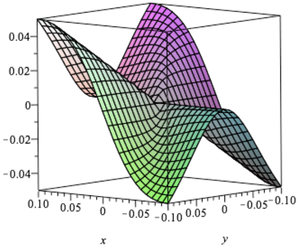
La dérivabilité n'implique pas la continuité !

Attention. Fonction dérivable mais non continûment

Donc on n'a pas $\mathrm{D}_{\vec{u}}(f)(0,0) \neq a\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + b\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$.

Ici les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$.

La représentation graphique montre que la fonction f n'est pas « totalement lisse »mais semble comme froissée.



1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Développements limités

Théorème - Développement limité

Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Alors :

1. f est continue sur U.
2. f admet en tout point $\vec{a}$ de U de $\mathbb{R}^p$ un développement limité :

$$f(\vec{a}+\vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_p)$ et $\epsilon : U \to \mathbb{R}$, tel que $\epsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Développements limités

Théorème - Développement limité

Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Alors :

1. f est continue sur U.
2. f admet en tout point $\vec{a}$ de U de $\mathbb{R}^p$ un développement limité :

$$f(\vec{a}+\vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots u_p)$ et $\epsilon : U \to \mathbb{R}$, tel que $\epsilon(u) \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Développements limités

Théorème - Développement limité

Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Alors :

1. f est continue sur U.
2. f admet en tout point $\vec{a}$ de U de $\mathbb{R}^p$ un développement limité :

$$f(\vec{a}+\vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_p)$ et $\epsilon : U \to \mathbb{R}$, tel que $\epsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

Démonstration

Exemple $f(x,y) \mapsto (\ln(\frac{x+y}{2}), \arctan(x^2 - y^2 + 1))$.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Développements limités

Théorème - Développement limité

Soit f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Alors :

1. f est continue sur U.
2. f admet en tout point $\vec{a}$ de U de $\mathbb{R}^p$ un développement limité :

$$f(\vec{a}+\vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{p} u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_p)$ et $\epsilon : U \to \mathbb{R}$, tel que $\epsilon(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration
Exemple $f(x,y) \mapsto (\ln(\frac{x+y}{2}), \arctan(x^2 - y^2 + 1))$.
Remarque Notation physique

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Gradient

Remarque Pourquoi $\mathrm{d}f(\vec{a}) : u \mapsto \ldots$ est-ce bien une application linéaire ?

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Gradient

Remarque Pourquoi $\mathrm{d}f(\vec{a}) : u \mapsto \ldots$ est-ce bien une application linéaire ?
D'après le théorème de représentation de Riesz en dimension finie :

Définition - Gradient

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On appelle gradient de f, l'application vectorielle :

$$\nabla f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \vec{a} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathrm{d}f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle$.
Et aussi (approx. au 1er ordre) :
$f(\vec{a} + h\vec{u}) = f(\vec{a}) + h\langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle + o(h)$

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Dérivation d’une composition

Il s’agit ici d’étudier l’impact de la composition dans le calcul différentiel.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

Analyse Composition : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Dérivation d'une composition

⇒ Dérivée partielle
⇒ Règle de la chaine
1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

Analyse Composition : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Proposition - Règle de la chaîne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ouvert de $\mathbb{R}$, avec $\varphi(I) \subset U$.
Alors $g : f \circ \varphi$ est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\ t \in I \qquad g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{\varphi(t)})$$

Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

Analyse Composition : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

Proposition - Règle de la chaîne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ouvert de $\mathbb{R}$, avec $\varphi(I) \subset U$.
Alors $g : f \circ \varphi$ est une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\ t \in I \qquad g'(t) = \sum_{j=1}^{p} x_j'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{\varphi(t)})$$

Application Changement de paramétrage pour un arc

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Truc pour le calcul

L'application physique suivante explique le nom donné à cette règle :

Exemple Fondamental !

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Truc pour le calcul

L'application physique suivante explique le nom donné à cette règle :

Exemple Fondamental !

Truc & Astuce pour le calcul. Comment dériver des fonctions composées ?

Si vous devez dériver la suite de composition $f \circ \varphi$:

$$t \xrightarrow{\varphi} (x_1, x_2, \dots x_n) \xrightarrow{f} f \circ \varphi(t)$$

- t a une influence sur tout $x_k = \varphi_k(t)$ égale à $\varphi_k'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}$
- Puis, tout x_k a une influence sur tout f égale à $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$

Puis on regarde tous les chemins possibles ! ! (sommation)

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \varphi)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \times \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t)$$

C'est la formule générale, mais penser à l'appliquer directement.

⇒ Dérivée partielle
⇒ Règle de la chaine
1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Remarques

Attention - Autour de la formule de la chaîne

Même si en physique on a tendance à oublier le point (vecteur) pour lequel on effectue le calcul de la différentielle, il ne faut pas l'oublier ici ! !
Noter également qu'il est préférable (au moins mnémnotechniquement) d'écrire d'abord les dérivée de f (à gauche), puis celles des x_k à droite. Cela correspond bien à l'écriture de la dérivation. C'est aussi avec cette écriture qu'on peut faire des vraies/fausses simplifications rapides par $\partial x_j \dots$

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Remarques

Attention - Autour de la formule de la chaîne

Même si en physique on a tendance à oublier le point (vecteur) pour lequel on effectue le calcul de la différentielle, il ne faut pas l'oublier ici !!
Noter également qu'il est préférable (au moins mnémnotechniquement) d'écrire d'abord les dérivée de f (à gauche), puis celles des x_k à droite. Cela correspond bien à l'écriture de la dérivation. C'est aussi avec cette écriture qu'on peut faire des vraies/fausses simplifications rapides par ∂x_j...

Exercice

Exprimer la dérivée de $f:(x,y)\mapsto f(x,y)$ en fonction de r et de θ si l'on admet le paramétrage : $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Gradient en coordonnées polaires

Analyse Comment écrire le gradient en coordonnées polaires ?

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Gradient en coordonnées polaires

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Analyse Comment écrire le gradient en coordonnées polaires ?

Proposition - Le gradient en coordonnée polaire

Notons $\mathscr{B}' = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, la base mobile de $\mathbb{R}^2$.
Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,\theta) \mapsto g(r,\theta)$.

Le gradient de g s'écrit dans $\mathscr{B}'$: $\nabla g(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

et il vérifie également $\mathrm{d}g(\vec{a})(\vec{u}) = \langle \nabla g(\vec{a}), \vec{u} \rangle$
($\vec{u}$ écrit dans la base $\mathscr{B}'$)

Règle de la chaîne et sciences physiques

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

Remarque Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Règle de la chaîne et sciences physiques

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

Remarque Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

Exemple Thermodynamique

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Règle de la chaîne et sciences physiques

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

Remarque Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

Exemple Thermodynamique

Remarque Notation de dérivation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Règle de la chaîne et sciences physiques

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

Remarque Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

Exemple Thermodynamique

Remarque Notation de dérivation

Exemple Formule de la chaîne physicienne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

- Définition : à autres variables fixés

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dérivée partielle

- Définition : à autres variables fixés
- Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f admet un DL_1.

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

- Définition : à autres variables fixés
- Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f admet un DL_1.
- Attention aux cas pathologiques (on ne généralise pas simplement dans $\mathbb{R}^2$ les résultats dans $\mathbb{R}$)

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Dérivée partielle

- Définition : à autres variables fixés
- Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors f admet un DL_1.
- Attention aux cas pathologiques (on ne généralise pas simplement dans $\mathbb{R}^2$ les résultats dans $\mathbb{R}$)
- Utilisation des DL_1 comme approximation numérique : cf. Physique

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

- Formule de dérivation d'un produit

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

- Formule de dérivation d'un produit
- Application à la physique

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

Conclusion

Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Pour le prochain cours

- Lecture : Visualisation (et optimisation)
- Exercice n°838

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
4.1. Développement limité. Différentiabilité
4.2. Dérivées partielles
4.3. Application de classe $\mathscr{C}^1$
4.4. Règle de la chaine