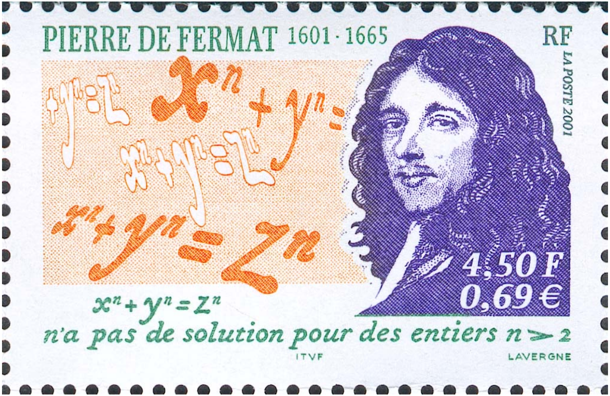


Leçon 108 - Fonctions de deux (plusieurs) variables

13 juin 2025

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Plan de l'espace

Commençons par la tangente à une surface : il s'agit d'un plan. Pour la courbe, nous ferons une analogie et retrouverons les résultats déjà connus...

Plan de l'espace

Heuristique. Décrire un plan de $\mathbb{R}^3$

Comment peut-on décrire un plan dans $\mathbb{R}^3$ (espace affine) ?

1. et en donnant un point du plan .
2. en décrivant sa pente, c'est-à-dire le plan parallèle qui passe par O, ou encore le plan de l'espace vectoriel parallèle.
   - celui-ci est donné soit par une équation explicite : $ax + by + cz = 0$.
   - Ou de manière équivalente, mais plus géométrique, par un vecteur orthogonal au plan en question (ici $\vec{u} = (a, b, c)$). Cela correspond à *l'écriture implicite du plan*.
   - ou enfin, par la donnée de deux vecteurs formant une famille génératrice du plan (ici $\vec{v}, \vec{w}$). Cela correspond à *l'écriture paramétrique du plan*.

Surface (vraie)

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicte** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$z = ax + by + c$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à $\text{vect} u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(u,v) & = & a_1 u + b_1 v + c_1 \\ y(u,v) & = & a_2 u + b_2 v + c_2 \\ z(u,v) & = & a_3 u + b_3 v + c_3 \end{array} \right.$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3).

Surface (vraie)

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicte** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$z = ax + by + c$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à vect$u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$\begin{cases} x(u,v) & = & a_1 u + b_1 v + c_1 \\ y(u,v) & = & a_2 u + b_2 v + c_2 \\ z(u,v) & = & a_3 u + b_3 v + c_3 \end{cases}$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3).

Démonstration

Surface (vraie)

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicte** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$z = ax + by + c$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à $\mathrm{vect}u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$\begin{cases} x(u,v) &= a_1u + b_1v + c_1 \\ y(u,v) &= a_2u + b_2v + c_2 \\ z(u,v) &= a_3u + b_3v + c_3 \end{cases}$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3).

Démonstration

Remarque Point de vue et nature de la définition

Plan tangent à une surface

Heuristique. Regarder au voisinage d'un point

Pour pouvoir regarder une surface au voisinage de point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, il faut que l'on puisse maîtriser l'ensemble des $M(x, y, z)$, voisin de M_0 et qui se trouve sur la surface Σ. Il faut donc que le vecteur $\lim_{M(\in\Sigma)\to M_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|M_0M\|}$ ait un sens.

Or $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0$ (cas implicite)

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\times(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\times(z-z_0)=0$$

donc $\langle \nabla f(x, y, z) \cdot \overrightarrow{M_0M}\rangle = 0$.

Il est donc nécessaire, dans le cas des surfaces implicites, que $\nabla f(x, y, z)$ soit non nul pour pouvoir définir, alors, un plan tangent. *Le cas parametré est hors programme* La surface va ressembler à un plan, localement, si le point au voisinage duquel nous faisons l'étude est régulier.

Point régulier

Définition - Point régulier

Un point $M(x,y,z)$ d'une surface Σ est dit **régulier** si :

- dans le cas d'une surface définie explicitement :
  $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ sont finis,
- dans le cas d'une surface définie implicitement :
  $\nabla f(x,y,z) \neq 0.$
- dans le cas d'une surface définie paramétriquement $\varphi(u,v)$:
  $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ forment une famille libre.

Point régulier

Définition - Point régulier

Un point $M(x,y,z)$ d'une surface Σ est dit **régulier** si :

- dans le cas d'une surface définie explicitement : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ sont finis,
- dans le cas d'une surface définie implicitement : $\nabla f(x,y,z) \neq 0$.
- dans le cas d'une surface définie paramétriquement $\varphi(u,v)$: $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ forment une famille libre.

Un point non régulier est dit critique, nous le verrons plus tard.

Plan tangent à une surface

Proposition - Plan tangent

Considérons une surface Σ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de cette surface.

Alors : Σ admet en M un plan tangent :

- dans la cas où Σ a pour équation explicite $z = g(x, y)$, ce plan tangent a pour équation :
$$z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$$
ou $z - z_0 = \langle \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \rangle$.
- dans la cas où Σ a pour équation implicite $f(x, y, z) = 0$, ce plan tangent a pour équation :
$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} \rangle = 0$$
- Dans le cas où Σ est définie paramétriquement par $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ le plan tangent à cette surface en $M_0(u_0, v_0)$ a pour équation :
$M_0 + \mathrm{vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$.

Exercice

<u>Exercice</u>

Montrer que $M(1,1,1)$ est un point régulier de la surface Σ d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

Donner une équation du plan tangent à Σ en M

Droite tangente à une courbe

Remarque Droite tangente à une courbe.

Droite tangente à une courbe

Remarque Droite tangente à une courbe.

Exercice

On considère l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{E}$, donner l'équation de la droite tangente en M.

Courbes implicites

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe $\mathscr{C}$ et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.
On suppose que $\mathscr{C}$ a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.
Alors : il existe un paramétrage de classe $\mathscr{C}^1$ de la courbe $\mathscr{C}$.
Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ tels que

- $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que $\mathscr{C}$

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe $\mathscr{C}$ et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.
On suppose que $\mathscr{C}$ a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.
Alors : il existe un paramétrage de classe $\mathscr{C}^1$ de la courbe $\mathscr{C}$.
Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ tels que

- $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que $\mathscr{C}$

Analyse Fonctions implicites

Courbes implicites

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe $\mathscr{C}$ et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.
On suppose que $\mathscr{C}$ a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.
Alors : il existe un paramétrage de classe $\mathscr{C}^1$ de la courbe $\mathscr{C}$.
Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ tels que

- $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que $\mathscr{C}$

Analyse Fonctions implicites
Application Thermodynamique

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Principe

Heuristique. Interprétation géométrique du gradient

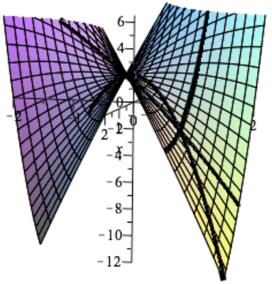
Soit $\vec{a} \in U$. Dans la direction donnée par $\vec{u}$, la variation donnée par f est

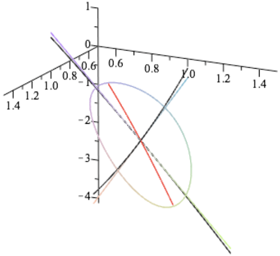
$$f(\vec{a}+h\vec{u})-f(\vec{a})=h\langle\nabla f(\vec{a});\vec{u}\rangle$$

Nous savons que le produit scalaire est maximale lorsque les deux vecteurs multiplié sont colinéaires (optimisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Donc pour h donné, la variation $f(\vec{a}+h\vec{u})-f(\vec{a})$ est extrémale si u est colinéaire à $\nabla f(\vec{a})$.
Par conséquent, $\nabla f(\vec{a})$ indique la plus forte pente (variation) de f en a.

Visualisation

Exemple Retour sur la fonction $f(x,y) \to x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy + 2$





Chemin croissant

On peut dire encore mieux :

Proposition - Gradient

Soit $\vec{a}$ un point régulier de f.
Supposons que $f(\vec{a}) = C$.
Alors : $\nabla f(\vec{a})$ est orthogonal à la ligne de niveau $f(\vec{x}) = C$, dans le sens des lignes de valeurs croissantes.

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Point critique

Heuristique. Etude des extremum

Dans le cadre des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, il est légitime de chercher des extremums, puisque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ muni d'une relation d'ordre.
Nous allons essayer de répondre à cette question. Souvenons que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, la nullité de la dérivée en x_0 est un critère nécessaire pour affirmer que $f(x_0)$ est un maximum (ou minimum) local de f.
Attention ce n'est pas une condition suffisante : penser à $x \longmapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en $0\dots$

Extrema

Définition - Extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $\vec{a} \in U$

On dit que f admet un maximum (resp. mninimum) global sur U en $\vec{a}$

ssi $\forall\ \vec{x} \in U$, $f(\vec{a}) \geqslant f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leqslant f(\vec{x})$)

On dit que f admet un maximum (resp. mninimum) local en $\vec{a}$

ssi $\exists\ \epsilon > 0$ tel que $\forall\ \vec{x} \in U \cap B_\epsilon(\vec{a})$, $f(\vec{a}) \geqslant f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leqslant f(\vec{x})$).

Un maximum (resp. minimum) global est un maximum (resp. minimum) local.

Extrema

Définition - Extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Soit $\vec{a} \in U$

On dit que f admet un maximum (resp. mninimum) global sur U en $\vec{a}$

ssi $\forall\ \vec{x} \in U,\ f(\vec{a}) \geqslant f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leqslant f(\vec{x})$)

On dit que f admet un maximum (resp. mninimum) local en $\vec{a}$

ssi $\exists\ \epsilon > 0$ tel que $\forall\ \vec{x} \in U \cap B_\epsilon(\vec{a}),\ f(\vec{a}) \geqslant f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leqslant f(\vec{x})$).

Un maximum (resp. minimum) global est un maximum (resp. minimum) local.

Remarque Extrema

Points critiques

Définition - Points critiques

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On dit que $\vec{a}$ est un point critique de f si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

Points critiques

Définition - Points critiques

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On dit que $\vec{a}$ est un point critique de f si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

Remarque Les dérivées partielles en $\vec{a}$

Optimalité

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Supposons que f possède un extremum local en $\vec{a}$.
Alors : $\vec{a}$ est un point critique de f

Optimalité

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Supposons que f possède un extremum local en $\vec{a}$.
Alors : $\vec{a}$ est un point critique de f

Attention. La condition n'est que nécessaire

Penser un point-col (comme sur la figure 1 de ce chapitre), qui admet au point col un point critique (maximal selon x et minimal selon y), mais pas d'extremum

Optimalité

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Supposons que f possède un extremum local en $\vec{a}$.
Alors : $\vec{a}$ est un point critique de f

Attention. La condition n'est que nécessaire

Penser un point-col (comme sur la figure 1 de ce chapitre), qui admet au point col un point critique (maximal selon x et minimal selon y), mais pas d'extremum

Démonstration

Méthode de recherche d'optimalité

Remarque Ouvert, fermé et compact

Méthode de recherche d'optimalité

Remarque Ouvert, fermé et compact

Savoir-faire. Recherche d'extremum

Considérons f dont on recherche un extremum.

1. On montre l'existence de cet extremum en appliquant le théorème de continuité sur un fermé borné K.
2. (a) On considère ensuite son intérieur. C'est un ouvert et on recherche les points critiques.
   Localement, on regarde s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.
   On étudie donc $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$.
   Directement ou bien avec l'aide d'un DL d'ordre 2 (si possible) :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{0}_{\text{point critique}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x - a_i)^2 + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|^2)$$

   qu'on étudie...
   (b) On recherche les points sur la frontière.
   Souvent ce sera un ensemble où chaque x_i est bloqué sauf un.

Application

Remarque Système d'équations, non linéaires

Application

Remarque Système d'équations, non linéaires

Exercice

Etudier les extremums globaux de $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-2x-4y$ sur $U=[0,3]\times[1,5]$.

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Optimisation sous contrainte

Analyse Problématique

Optimisation sous contrainte

Analyse Problématique

On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.

On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

Optimisation sous contrainte

Analyse Problématique
On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.
On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

Théorème. Extrema lié. Optimisation sous contrainte

Soient f et $g_1, \ldots g_r$ sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U de E,
Notons X l'ensemble des zéros de g_1, $g_2 \ldots g_r$.
Si $\vec{x} \in X$, avec $\forall\ i \in \mathbb{N}_r$, $\mathrm{d}g_i(\vec{x}) \neq 0$ et si $f_{|g_1,\ldots g_r}$ admet un extremum en $\vec{x}$, alors $\nabla f(\vec{x}) \in \mathrm{vect}\big(\nabla g_1(\vec{x}), \ldots \nabla g_r(\vec{x})\big)$.

Optimisation sous contrainte

Analyse Problématique
On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.
On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

Théorème. Extrema lié. Optimisation sous contrainte

Soient f et $g_1, \dots g_r$ sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U de E,
Notons X l'ensemble des zéros de $g_1, g_2 \dots g_r$.
Si $\vec{x} \in X$, avec $\forall\ i \in \mathbb{N}_r$, $\mathrm{d}g_i(\vec{x}) \neq 0$ et si $f_{|g_1,\dots g_r}$ admet un extremum en $\vec{x}$, alors $\nabla f(\vec{x}) \in \mathrm{vect}\big(\nabla g_1(\vec{x}), \dots \nabla g_r(\vec{x})\big)$.

Remarque Si $r = 1$

Multiplicateur de Lagrange

Application Maximum d'entropie

$H:(x,y)\mapsto -x\ln x - y\ln y - z\ln z$ sous les contraintes

$x+y+z=1$ et $xE_1+yE_2+zE_3=E$

Multiplicateur de Lagrange

Application Maximum d'entropie
$H:(x,y)\mapsto -x\ln x - y\ln y - z\ln z$ sous les contraintes
$x+y+z=1$ et $xE_1+yE_2+zE_3=E$

Savoir-faire. Multiplicateurs de Lagrange

Soit à optimiser f sous les contraintes $g_1,\dots g_r$ sur le domaine U, ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On considère $H:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$, $(x_1,\dots x_p,\lambda_1,\dots\lambda_r)\mapsto$
$f(x_1,\dots x_p)-\lambda_1 g_1(x_1,\dots x_p)+\cdots\lambda_r g_r(x_1,\dots x_p)$.
Alors si $\vec{x}$ est un optimum sous contrainte (« optimum lié »), nécessairement $\vec{x}$ est (la première partie d')un point critique de H.

Multiplicateur de Lagrange

Application Maximum d'entropie
$H : (x, y) \mapsto -x\ln x - y\ln y - z\ln z$ sous les contraintes
$x + y + z = 1$ et $xE_1 + yE_2 + zE_3 = E$

Savoir-faire. Multiplicateurs de Lagrange

Soit à optimiser f sous les contraintes $g_1, \dots g_r$ sur le domaine U, ouvert de $\mathbb{R}^p$.
On considère $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots x_p, \lambda_1, \dots \lambda_r) \mapsto f(x_1, \dots x_p) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots x_p) + \cdots \lambda_r g_r(x_1, \dots x_p)$.
Alors si $\vec{x}$ est un optimum sous contrainte (« optimum lié »), nécessairement $\vec{x}$ est (la première partie d')un point critique de H.

Application Distribution de Boltzmann

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- Si G est le graphe $z = f(x,y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.
  Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x - x_0, y - y_0$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Visualisation de la dérivation

- Si G est le graphe $z = f(x,y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.
  Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0$
- Si G est la courbe implicite $G = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.
  Son équation est $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
- Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0
  Son équation est $M_0 + \mathrm{vect}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- Si G est le graphe $z = f(x,y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.
  Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0$
- Si G est la courbe implicite $G = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.
  Son équation est $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
- Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0
  Son équation est $M_0 + \operatorname{vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$
- Si $g(x_0, y_0) = 0$, de classe $\mathscr{C}^1$ et (x_0, y_0) régulier.
  Alors il existe un paramétrage $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, tels que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $g(x(t), y(t)) = 0$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- Si G est le graphe $z = f(x,y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.
  Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0$
- Si G est la courbe implicite $G = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.
  Son équation est $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
- Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0
  Son équation est $M_0 + \mathrm{vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$
- Si $g(x_0, y_0) = 0$, de classe $\mathscr{C}^1$ et (x_0, y_0) régulier.
  Alors il existe un paramétrage $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, tels que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $g(x(t), y(t)) = 0$.
- On peut aussi écrite y en fonction de x. Très souvent exploité en physique !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Visualisation de la dérivation

- Si G est le graphe $z = f(x,y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.
  Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0$
- Si G est la courbe implicite $G = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.
  Son équation est $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0) = 0$
- Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u,v) = \big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0
  Son équation est $M_0 + \mathrm{vect}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)$
- Si $g(x_0,y_0) = 0$, de classe $\mathscr{C}^1$ et (x_0,y_0) régulier.
  Alors il existe un paramétrage $x,y :]-\epsilon,\epsilon[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, tels que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ et pour tout $t\in]-\epsilon,\epsilon[$, $g(x(t),y(t)) = 0$.
- On peut aussi écrite y en fonction de x. Très souvent exploité en physique !
- Le gradiant indique la plus forte pente

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Visualisation de la dérivation

$\Rightarrow$ Optimisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

- Sur un compact (=fermé borné dans $\mathbb{R}^n$), une fonction continue est bornée et atteint ses bornes

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Visualisation de la dérivation

$\Rightarrow$ Optimisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Pour le prochain cours

- Lecture : Sommabilité
- Exercice n°836 & 837