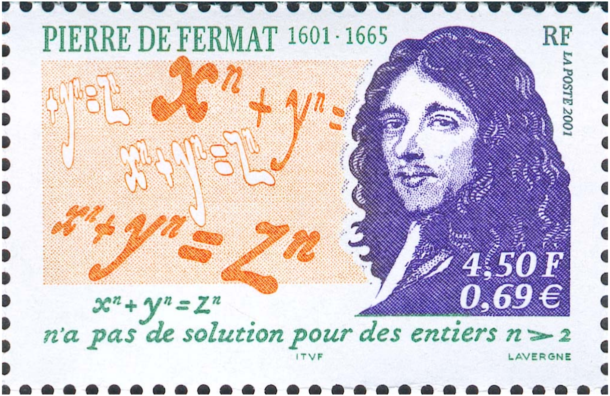


Leçon 106 - Fonctions de deux (plusieurs) variables

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

Semaines prochaines

<table>
<tr><th>MPSI 3
Sem. 32</th><th colspan="2">Lundi</th><th>Mardi</th><th>Mercredi</th><th>Jeudi</th><th>Vendredi</th><th>Samedi</th></tr>
<tr><td>8h00 - 9h00</td><td colspan="2" rowspan="4">Concours Blanc
Mathématiques</td><td rowspan="3">Cours Physique</td><td rowspan="4">Concours Blanc
Physique</td><td rowspan="2">Concours Blanc
Informatique pour tous</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9h00 - 10h00</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10h00 - 11h00</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11h00 - 12h00</td><td></td><td rowspan="2">Concours Blanc
Option informatique (?)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12h00 - 13h00</td><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>13h00 - 14h00</td><td colspan="2">LV2 (Espagnol) ?</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>14h00 - 15h00</td><td rowspan="2">TP
Physique 1
?</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">Cours Maths</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">Cours Maths</td><td rowspan="3">Cours Maths</td><td></td></tr>
<tr><td>15h00 - 16h00</td><td></td></tr>
<tr><td>16h00 - 17h00</td><td rowspan="2">TP
Physique 2
?</td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>17h00 - 18h00</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18h00 - 19h00</td><td colspan="2"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Semaines prochaines

MPSI 3 Sem. 33	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
8h00 - 9h00	LV1 : Espagnol		Oraux à Polytechnique et visite du campus	Oraux à l'X		
9h00 - 10h00						
10h00 - 11h00		Cours Maths				
11h00 - 12h00						
12h00 - 13h00						
13h00 - 14h00		**Fin des cours**				
14h00 - 15h00	Cours Maths			Musée de la lumière et de la matière		
15h00 - 16h00		**Conseil de classe (15h0)**				
16h00 - 17h00						
17h00 - 18h00						
18h00 - 19h00						

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall\ x \in \Omega, \exists\ \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Stabilité des ouverts

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
Une réunion d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Stabilité des ouverts

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
Une réunion d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur $\mathbb{R}$. Sur E

Partie fermée

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur $\mathbb{R}$. Sur E

<u>Exercice</u>

Montrer que $B = B_f(a, r)$ est un fermé de E. On peut s'aide d'un dessin !

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

Stabilité des fermés

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
Une intersection de fermés est un fermé.
Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

Attention. Faux pour une réunion infinie dénombrable de fermés

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] =]0,1[$, qui n'est pas fermé

Un premier lien avec les suites

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E
ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F, convergente, on a $\lim(x_n) \in F$

Un premier lien avec les suites

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E
ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F, convergente, on a $\lim(x_n) \in F$

Démonstration

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

Heuristique. Dans $\mathbb{R}_+^2$

L'ensemble $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y<1\}$ est-il ouvert ou fermé ? Cela semble compliqué.
Dans $\mathbb{R}^2$, $(0,0) \in \mathbb{R}_+$, mais il n'existe aucune boule centré en $(0,0)$ contenu dans S (quel que soit la norme).

Et en même temps $(1,0) \in \overline{S}$ mais il n'existe aucune boule centré en $(1,0)$ contenu dans $\overline{S}$.

Dans $\mathbb{R}^2$, S n'est ni ouvert, ni fermé.
Mais ce n'est pas le cas si l'on regarde QUE dans $\mathbb{R}_+^2$. En effet, dans ce cas, la boule ouverte (euclidienne) centré en $(0,0)$ de rayon $r = \frac{1}{10}$ n'a que des éléments dans S, puisqu'également nécessairement dans $\mathbb{R}_+^2$.

Donc dans $\mathbb{R}^2$, S est ouvert.

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :

$$\forall\ x \in U, \exists\ \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x,\epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :

   $\forall\, x \in U, \exists\, \epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap A \subset U$.

2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :

   $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :

   $\forall\, x \in U, \exists\, \epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap A \subset U$.

2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :

   $A \setminus V$ est un ouvert relatif de A.

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E. On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

Caractérisation relative

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E, alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A, si :

$$\forall\, x \in U, \exists\, \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x,\epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A, si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E. On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

Demonstration

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Compact

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,
si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite convergente dans E.
Formellement : $\forall\ (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists\ x \in E, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ tel que $(x_{\varphi(n)}) \to x$.

Compact

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,

si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite convergente dans E.

Formellement : $\forall\ (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists\ x \in E, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ tel que $(x_{\varphi(n)}) \to x$.

On a une caractérisation simple des compacts de $\mathbb{R}^n$.

Proposition - Compact de $\mathbb{R}^n$

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.

Compact

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,

si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite convergente dans E.

Formellement : $\forall\ (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists\ x \in E, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \nearrow\nearrow$ tel que $(x_{\varphi(n)}) \to x$.

On a une caractérisation simple des compacts de $\mathbb{R}^n$.

Proposition - Compact de $\mathbb{R}^n$

Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.

Démonstration

Borel-Lebesgue

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit E un espace normé. Soit $K \subset E$.
K est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant K, on peut en extraire un recouvrement fini.
Formellement : $\forall\ (O_i)_{i\in I} \in \mathscr{P}(E)^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, $\exists\ J \subset I$ **fini** tel que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$

Borel-Lebesgue

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit E un espace normé. Soit $K \subset E$.
K est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant K, on peut en extraire un recouvrement fini.
Formellement : $\forall\ (O_i)_{i\in I} \in \mathscr{P}(E)^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, $\exists\ J \subset I$ **fini** tel que $K \subset \bigcup_{j\in J} O_j$

<u>Exercice</u>
A-t-on le lemme de Cousin en toute dimension ?
Si K est compact, est-ce que pour tout $\delta : K \to \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots x_N \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$?
où $B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$ est la boule ouverte de centre x_i et de rayon $\frac{\delta(x_i)}{2}$.

Démonstration

On propose la démonstration avec un exercice (et beaucoup de raisonnement par l'absurde).

Corrigé en TD (les deux groupes) Exercice

1. On considère K un compact de E.
   1.1 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots x_N \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.
   On dit que K est précompact
   1.2 Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tels que $\forall\ x \in K$, $\exists\ i \in I$ tel que $B(x, \alpha) \subset O_i$.
   1.3 En déduire le sens direct du théorème.
2. On suppose que K vérifie la propriété d'extraction finie de recouvrement (dite de Borel-Lebesgue).
   2.1 On considère une suite (F_n) décroissante de fermés non vide de K. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
   2.2 En déduire la réciproque du théorème.

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Adhérences et intérieurs

Remarque Cas « pathologique »...

Adhérences et intérieurs

Remarque Cas « pathologique »...

Définition - Adhérence

Soit A une partie de E.
On note

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A \mid \|x - a\| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon>0} \left(\bigcup_{a \in A} B(a,\epsilon) \right)$$

Alors $A \subset \overline{A}$. $\overline{A}$ est un fermé.
En fait , $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F}_A} F$, où $\mathscr{F}_A$ est l'ensemble de tous les fermés contenant A.
C'est une borne supérieure : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
En particulier A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Adhérences et intérieurs

Remarque Cas « pathologique »...

Définition - Adhérence

Soit A une partie de E.
On note

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A \mid \|x - a\| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \left(\bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) \right)$$

Alors $A \subset \overline{A}$. $\overline{A}$ est un fermé.
En fait , $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F}_A} F$, où $\mathscr{F}_A$ est l'ensemble de tous les fermés contenant A.
C'est une borne supérieure : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
En particulier A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit A une partie quelconque de E. Un élément $x \in \overline{A}$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

i) $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$

ii) $\forall\ \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

iv) $\exists\ (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim(x_n) = x$.

iii) $d(x,A) = 0$

Savoir-faire

Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit A une partie quelconque de E. Un élément $x \in \overline{A}$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

i) $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$

ii) $\forall\, \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

iv) $\exists\, (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim(x_n) = x$.

iii) $d(x, A) = 0$

<u>Exercice</u>

Montrer que ces assertions sont équivalentes et signifie bien que $x \in \overline{A}$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit A une partie quelconque de E. Un élément $x \in \overline{A}$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

i) $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ a \in A$ tel que $\|x - a\| < \epsilon$

ii) $\forall\ \epsilon > 0,\ B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

iv) $\exists\ (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim(x_n) = x$.

iii) $d(x,A) = 0$

<u>Exercice</u>

Montrer que ces assertions sont équivalentes et signifie bien que $x \in \overline{A}$.

Définition - Partie dense

Une partie A est dite dense dans E si $\overline{A} = E$

Intérieur

Définition - Intérieur

Soit A une partie de E.
On note : $A^o = \{x \in E \mid \exists\ \epsilon > 0, \forall\ a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$
Alors $A^o \subset A$. A^o est un ouvert.
En fait , $A^o = \bigcup_{O \in \mathscr{O}_A} O$, où $\mathscr{O}_A$ est l'ensemble de tous les ouverts de A.
C'est une borne inférieure : A^o est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier A est ouvert si et seulement si $A^o = A$.

Intérieur

Définition - Intérieur

Soit A une partie de E.
On note : $A^o = \{x \in E \mid \exists\, \epsilon > 0, \forall\, a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$
Alors $A^o \subset A$. A^o est un ouvert.
En fait , $A^o = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$, où $\mathcal{O}_A$ est l'ensemble de tous les ouverts de A.
C'est une borne inférieure : A^o est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier A est ouvert si et seulement si $A^o = A$.

Savoir-faire. Caractérisation de $x \in A^o$

Soit A une partie quelconque de E. Un élément $x \in A^o$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

i) A est un voisinage de x

ii) $\exists\, \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A$

Intérieur

Définition - Intérieur

Soit A une partie de E.
On note : $A^o = \{x \in E \mid \exists\ \epsilon > 0, \forall\ a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$
Alors $A^o \subset A$. A^o est un ouvert.
En fait , $A^o = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$, où $\mathcal{O}_A$ est l'ensemble de tous les ouverts de A.
C'est une borne inférieure : A^o est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier A est ouvert si et seulement si $A^o = A$.

Savoir-faire. Caractérisation de $x \in A^o$

Soit A une partie quelconque de E. Un élément $x \in A^o$ si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

i) A est un voisinage de x

ii) $\exists\ \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A$

Démonstration

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Limite en un point

Définition - Limite (et continuité)

Soit $f : E \to F$, une application entre deux espaces vectoriels normés.
On dit que f admet en $x_0 \in E$, une limite égale à $f(x_0)$ si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \eta > 0 \mid \forall\ x \in E, \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \epsilon$$

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \eta > 0 \mid f\left(B(x_0, \eta)\right) \subset B(f(x_0), \epsilon)$$

$$\forall\ (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \to x, \qquad \left(f(x_n)\right) \to f(x)$$

On note alors $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Limite en un point

Définition - Limite (et continuité)

Soit $f : E \to F$, une application entre deux espaces vectoriels normés.
On dit que f admet en $x_0 \in E$, une limite égale à $f(x_0)$ si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \mid \forall\, x \in E, \|x - x_0\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leqslant \epsilon$$

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \mid f\left(B(x_0, \eta)\right) \subset B(f(x_0), \epsilon)$$

$$\forall\, (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \to x, \qquad \left(f(x_n)\right) \to f(x)$$

On note alors $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Il faudrait montrer l'équivalence entre ces définitions. La première et la seconde sont évidemment semblables, il s'agit juste d'une réécriture en terme de boules (les implications et les inégalités deviennent des inclusions).
Nous étudierons l'équivalence avec la troisième définition dans la

Continuité en un point

Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si f admet une limite au point a, on dit que :

- f *est continue en* a si $a \in A$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f *se prolonge par continuité en* a si $a \notin A$ mais a est adhérent à A.

  on *définit* alors $f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$.

Continuité en un point

Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si f admet une limite au point a, on dit que :

- f *est continue en* a si $a \in A$ et que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f *se prolonge par continuité en* a si $a \notin A$ mais a est adhérent à A.

  on *définit* alors $f(a) := \lim_{x\to a} f(x)$.

Définition - Continuité sur une partie

On dit que f *est continue sur une partie* A de E,
si f est continue en tout $a \in A$

Continuité en un point

Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si f admet une limite au point a, on dit que :

- f *est continue en* a si $a \in A$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f *se prolonge par continuité en* a si $a \notin A$ mais a est adhérent à A.
  on *définit* alors $f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$.

Définition - Continuité sur une partie

On dit que f *est continue sur une partie* A de E,
si f est continue en tout $a \in A$

Remarque Indépendance par rapport à la norme

Exemples

Exemples Exemples

Les applications linéaires (en dimension finie), les applications polynomiales (algèbre ?), les normes, les applications bilinéaires (en dimension finie) sont continues.

La composition de deux fonctions continues est continue.

Exemples

Exemples Exemples

Les applications linéaires (en dimension finie), les applications polynomiales (algèbre ?), les normes, les applications bilinéaires (en dimension finie) sont continues.

La composition de deux fonctions continues est continue.

<u>Exercice</u>

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est-elle continue sur $[-1,1]\times[-1,1]$?

Caractérisation par coordonnées

Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est base de F. Soit A une partie de E. Soit a un point adhérent de A

Soit f une application de A dans F. Soit $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i \in F$.

On suppose que $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

Alors : f admet b comme limite au point a,

si et seulement si, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, f_i admet b_i comme limite au point a.

Caractérisation par coordonnées

Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est base de F. Soit A une partie de E. Soit a un point adhérent de A

Soit f une application de A dans F. Soit $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i \in F$.

On suppose que $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

Alors : f admet b comme limite au point a,

si et seulement si, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, f_i admet b_i comme limite au point a.

Démonstration

Caractérisation par coordonnées

Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que $(e_1, e_2, \dots e_p)$ est base de F. Soit A une partie de E. Soit a un point adhérent de A

Soit f une application de A dans F. Soit $b = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i \in F$.

On suppose que $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

Alors : f admet b comme limite au point a,

si et seulement si, $\forall\ i \in \mathbb{N}$, f_i admet b_i comme limite au point a.

Démonstration

On ne s'intéressera maintenant qu'aux situations où $\underline{F = \mathbb{R}}$.

Continuité et topologie

La continuité est la meilleure façon de transformer des fermés en fermés, des ouverts en ouverts. . . : d'étudier les topologies d'ensembles.

Continuité et topologie

La continuité est la meilleure façon de transformer des fermés en fermés, des ouverts en ouverts. . . : d'étudier les topologies d'ensembles.

Proposition - Image réciproque

Soit $f : E \to F$, continue, alors :

- si $B \subset F$ est ouvert, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert.
- si $B \subset F$ est fermé, alors $f^{-1}(B)$ est un fermé.

Continuité et topologie

Proposition - Image réciproque

Soit $f : E \to F$, continue, alors :

- si $B \subset F$ est ouvert, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert.
- si $B \subset F$ est fermé, alors $f^{-1}(B)$ est un fermé.

Attention. Image directe ?

Ce résultat est vraie pour les images réciproque, mais pas les images directes.
On a par ailleurs une équivalence : f est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.

Continuité et topologie

Proposition - Image réciproque

Soit $f : E \to F$, continue, alors :

- si $B \subset F$ est ouvert, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert.
- si $B \subset F$ est fermé, alors $f^{-1}(B)$ est un fermé.

Attention. Image directe ?

Ce résultat est vraie pour les images réciproque, mais pas les images directes.
On a par ailleurs une équivalence : f est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.

Démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \dfrac{x+y}{x^2+y^2} > 1\}$. B est-il ouvert ?

Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \geqslant 1\}$. B est-il ouvert ? fermé ?

Exercice

Exercice

Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \dfrac{x+y}{x^2+y^2} > 1\}$. B est-il ouvert ?

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \geqslant 1\}$. B est-il ouvert ? fermé ?

Remarque Contournement du problème

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

Par les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.
Soit A une partie de E. Soit a un point adhérent de A
Soit f une application de A dans F. Soit $b \in F$.
Alors : f admet b comme limite au point a,
si et seulement si, $\forall\ (x_n) \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$.

Par les suites

Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.
Soit A une partie de E. Soit a un point adhérent de A
Soit f une application de A dans F. Soit $b \in F$.
Alors : f admet b comme limite au point a,
si et seulement si, $\forall\ (x_n) \to a \Rightarrow f(x_n) \to b$.

Démonstration

Savoir-faire

Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Si une fonction est telle que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ admettent deux limite différentes alors que (u_n) et (v_n) ont même limite, c'est qu'elle n'est pas continue.

Ainsi avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, on a :

- avec $(u_n) = (\frac{1}{n}, 0)$ qui converge vers $(0,0)$, $f(u_n) = 0$ qui converge vers 0.
- avec $(v_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ qui converge vers $(0,0)$, $f(v_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$ qui converge vers $\frac{1}{2}$.

Donc f ne peut pas être continue en 0.

Savoir-faire

Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Une autre méthode qui marche souvent est d'étudier le terme dominant en rendant unidimensionnel les variables, c'est-à-dire en considérant $y = \lambda x$.
Alors $f(x,y) = f_\lambda(x)$, on étudie alors les limites possibles de $f_\lambda(x)$, pour x tendant vers 0, selon λ.
Si les limites dépendent de λ, alors f ne peut pas être continue.
Ici : $f_\lambda(x) = f(x,\lambda x) = \dfrac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, limite qui dépend de λ.
Donc $f(0,0)$ n'a pas de valeur unique…

Savoir-faire

Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Une autre méthode qui marche souvent est d'étudier le terme dominant en rendant unidimensionnel les variables, c'est-à-dire en considérant $y = \lambda x$.
Alors $f(x, y) = f_\lambda(x)$, on étudie alors les limites possibles de $f_\lambda(x)$, pour x tendant vers 0, selon λ.
Si les limites dépendent de λ, alors f ne peut pas être continue.
Ici : $f_\lambda(x) = f(x, \lambda x) = \dfrac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, limite qui dépend de λ.
Donc $f(0,0)$ n'a pas de valeur unique...

Remarque Autre utilisation : $u_{n+1} = f(u_n)$

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

Norme continue

Proposition - Application lipschitzienne

Soit $f : A \subset E \to F$ une application k-lipschitzienne.

Alors $\quad f$ est continue

Norme continue

Proposition - Application lipschitzienne

Soit $f : A \subset E \to F$ une application k-lipschitzienne.
Alors $\quad f$ est continue

Puisque $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne :

Savoir-faire. Continuité de $\|\cdot\|$

L'application $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ est continue sur E.
Soit $x_0 \in A$, alors $\forall\, x \in A$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant k\|x - x_0\|$.
Soit $\epsilon > 0$, alors avec $\delta = \frac{\epsilon}{k}$, on a :

$$\forall\, x \in A,\ \|x - x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leqslant k\delta = \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout x_0, f est continue sur A en entier

Composition

Proposition - Applications composées

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et normés.
Soient $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$ continues et telles que $f(A) \subset B$.
Alors : $\quad g \circ f : A \subset E \to G$ est continue.

Composition

Proposition - Applications composées

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et normés.
Soient $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$ continues et telles que $f(A) \subset B$.
Alors : $\quad g \circ f : A \subset E \to G$ est continue.

Démonstration

Polynômes

Proposition - (et définition)Polynômes de plusieurs variables

On appelle <u>fonctions polynomiales de n variables</u>, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où $a_k \in \mathbb{K}$ et $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des x_i.

Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.

Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{K}^n$

Polynômes

Proposition - (et définition)Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de n variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où $a_k \in \mathbb{K}$ et $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des x_i.

Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.

Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{K}^n$

Exemple Déterminant

Polynômes

Proposition - (et définition)Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de n variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où $a_k \in \mathbb{K}$ et $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$.

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des x_i.

Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.

Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{K}^n$

Exemple Déterminant

Exercice

Montrer que $f : (x,y,z) \mapsto (\ln(xy^2), \frac{x+y}{z}, x^2y + y^2z + z^2x)$ est continue sur une partie A de $\mathbb{R}^3$ à préciser.

Application

Savoir-faire. Montrer qu'une application est continue

Lorsqu'il faut montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue il faut :

1. bien étudier l'ensemble de définition
2. montrer par composition de fonctions continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de fonctions polynomiales que f est continue sur une grande partie de l'ensemble de définition
3. terminer par l'étude aux points frontières.
   En règle générale, il faut chercher les ordres maximales et les comparer (cf. exercice suivant)

Application

Savoir-faire. Montrer qu'une application est continue

Lorsqu'il faut montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue il faut :

1. bien étudier l'ensemble de définition
2. montrer par composition de fonctions continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de fonctions polynomiales que f est continue sur une grande partie de l'ensemble de définition
3. terminer par l'étude aux points frontières.
   En règle générale, il faut chercher les ordres maximales et les comparer (cf. exercice suivant)

Exemple $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Image direct d'un compact

Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si f est continue de E sur F et si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

Image direct d'un compact

Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si f est continue de E sur F et si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

Démonstration

Image direct d'un compact

Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si f est continue de E sur F et si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

Démonstration

Comme $f(K)$ est fermé et borné

Proposition - Optimalité

Si f est continue sur un compact de E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Image direct d'un compact

Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si f est continue de E sur F et si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

Démonstration

Comme $f(K)$ est fermé et borné

Proposition - Optimalité

Si f est continue sur un compact de E, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

⇒Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒Continuité

« Dimension » p

Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère…

« Dimension » p

Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère. . .

Analyse Représentation de fonctions de deux variables

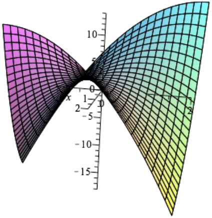
« Dimension » p

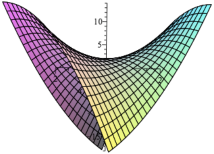
Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère. . .

Analyse Représentation de fonctions de deux variables

Considérons le point $a = (1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -\frac{3}{2}) \in S$ et deux vecteurs :

- $u_1 = (1, 0)$,
- $u_2 = (0, 1)$,





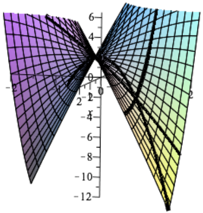
« Dimension » p

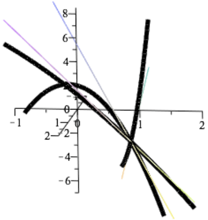
Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère…

Analyse Représentation de fonctions de deux variables

Considérons le point $a = (1,1,f(1,1)) = (1,1,-\frac{3}{2}) \in S$ et deux vecteurs :

- $u_1 = (1,0)$,
- $u_2 = (0,1)$,





Ligne de niveau. « Dimension » $p-1$

Remarque Courbe des équipotentiels

Ligne de niveau. « Dimension » $p-1$

Remarque Courbe des équipotentiels

Définition - Ligne de niveau zéro

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation $f(x_1,\ldots x_p)=0$.
Il s'agit en fait de l'ensemble $\{(x_1,x_2,\ldots x_p)\in\mathbb{R}^p \mid f(x_1,\ldots x_p)=0\}$.

Ligne de niveau. « Dimension » $p-1$

Remarque Courbe des équipotentiels

Définition - Ligne de niveau zéro

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation $f(x_1, \dots x_p) = 0$.
Il s'agit en fait de l'ensemble $\{(x_1, x_2, \dots x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \dots x_p) = 0\}$.

Exemple Cône

Ligne de niveau. « Dimension » $p-1$

Remarque Courbe des équipotentiels

Définition - Ligne de niveau zéro

Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation $f(x_1, \ldots x_p) = 0$.
Il s'agit en fait de l'ensemble $\{(x_1, x_2, \ldots x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \ldots x_p) = 0\}$.

Exemple Cône
Exemple Cercle

Bilan des représentation

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension : courbe, surface, volume par rapport au mode de (re)présentation : explicite ($y = f(x)$, $z = f(x, y)\dots$), implicite (par une équation type ligne de niveau) et paramétrique ($(x(t), y(t))$, vu au chapitre précédent).

Bilan des représentation

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension : courbe, surface, volume par rapport au mode de (re)présentation : explicite ($y = f(x)$, $z = f(x,y)\dots$), implicite (par une équation type ligne de niveau) et paramétrique ($(x(t), y(t))$, vu au chapitre précédent).

Proposition - « Surface »

On a les objets géométriques suivants, selon les types suivants :

	Courbe	Surface
Explicite	$M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $y = h(x)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^0$	$M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $z = g(x,y)$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^0$
Implicite	$M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $g(x,y) = 0$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^1$	$M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f(x,y,z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^1$
Paramétrique	$M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$M(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ où $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Evidemment, il possible d'envisager une généralisation de ces définitions.

Bilan des représentation

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension : courbe, surface, volume par rapport au mode de (re)présentation : explicite ($y = f(x)$, $z = f(x,y)\dots$), implicite (par une équation type ligne de niveau) et paramétrique ($(x(t), y(t))$, vu au chapitre précédent).

Proposition - « Surface »

On a les objets géométriques suivants, selon les types suivants :

	Courbe	Surface
Explicite	$M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $y = h(x)$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^0$	$M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $z = g(x,y)$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^0$
Implicite	$M(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $g(x,y) = 0$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^1$	$M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f(x,y,z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ soit $\mathscr{C}^1$
Paramétrique	$M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ où $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$M(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ où $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Evidemment, il possible d'envisager une généralisation de ces définitions.

Remarque Comment coder une courbe (un chemin ou un arc) dans $\mathbb{R}^3$?

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin
- Dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, il s'agit des fermés bornés

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin
- Dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, il s'agit des fermés bornés
- L'intérieur est l'intersection des ouverts contenus, l'adhérence est l'intersection des fermés contenant.

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

$\Rightarrow$ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- Continuité en un point, puis sur un ensemble

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

$\Rightarrow$ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- Continuité en un point, puis sur un ensemble
- Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- Continuité en un point, puis sur un ensemble
- Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- Continuité en un point, puis sur un ensemble
- Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées
- Application topologique : définir des fermés, des ouverts par image réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- Continuité en un point, puis sur un ensemble
- Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées
- Application topologique : définir des fermés, des ouverts par image réciproque
- Application topologique : définir des compact par image directe

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

Conclusion

Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

Pour le prochain cours

- Lecture : 4. Différentielle et érivées partielles
- Exercice n° 828 & 829