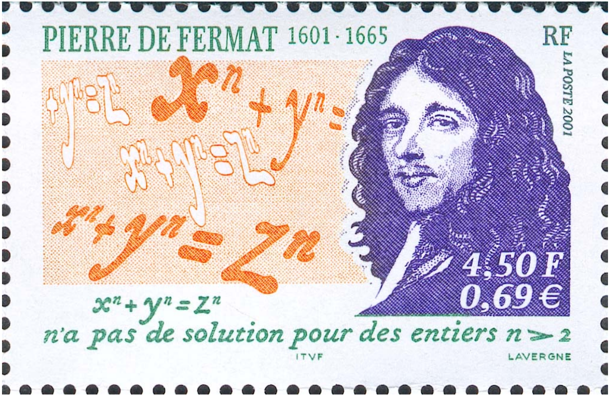

Leçon 109 - Sommabilité

19 juin 2025

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problème Ordre de calcul

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problème Ordre de calcul

Problème Structure d'espace vectoriel ?

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

$\Rightarrow$ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Définition - Famille de réels positifs sommable

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Définition - Famille de réels positifs sommable

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

Remarque Rappel

Exemples

Exemple Cas I fini

Exemples

Exemple Cas I fini

Exercice

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $\alpha_i = a$.
Alors montrer que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ I est fini.

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

2.1. Définition

2.2. Cas $I = \mathbb{N}$

2.3. Cas $I = \mathbb{N}^2$

2.4. Comparaisons

2.5. Sommation par suite croissante d'ensembles

2.6. Sommation par paquets et théorème de Fubini

2.7. Enoncé dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Remarque Notation

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Applications avec $I = \mathbb{N}^2$

Savoir-faire. Sous ensembles finis de $\mathbb{N}^2$

Se concentrer sur $[\![0, N]\!] \times [\![0, P]\!]$ car les familles sont à termes positifs.

Applications avec $I = \mathbb{N}^2$

Savoir-faire. Sous ensembles finis de $\mathbb{N}^2$

Se concentrer sur $[\![0, N]\!] \times [\![0, P]\!]$ car les familles sont à termes positifs.

Exercice

Montrer la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Exemple de famille non sommable

Savoir-faire. Montrer qu'une famille n'est pas sommable

Si l'on trouve une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I tel que $S_n := \sum_{i\in J_n} u_i$ n'est pas majorée, alors nécessairement la suite n'est pas sommable.

Exemple de famille non sommable

Savoir-faire. Montrer qu'une famille n'est pas sommable

Si l'on trouve une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I tel que $S_n := \sum_{i\in J_n} u_i$ n'est pas majorée, alors nécessairement la suite n'est pas sommable.

Exercice

On cherche à étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

1. Par une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{1}{p^2+q^2} \geqslant \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{Q+1}{p} - \arctan\frac{1}{p}\right)$$

2. Montrer alors que la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{2p-1}\frac{1}{p^2+q^2}\right)_n$ n'est pas majorée. Conclure

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Démonstration

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Démonstration

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Démonstration

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Démonstration

Remarque Intégration d'une fonction

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\displaystyle\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d$.

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs. (u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d$.

Remarque D_n fini ?

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d.$

Remarque D_n fini ?

Démonstration

Suite croissante de parties

Savoir-faire. Trouver une suite croissante d'ensembles d'indexation (fini)

Une stratégie classique consiste dans le cas où D est dénombrable sans être fini à considérer $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \sigma([\![0, n]\!])$. On a $D = \bigcup\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Suite croissante de parties

Savoir-faire. Trouver une suite croissante d'ensembles d'indexation (fini)

Une stratégie classique consiste dans le cas où D est dénombrable sans être fini à considérer $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \sigma([\![0, n]\!])$. On a $D = \bigcup\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Savoir-faire. Exploitation d'une suite croissante d'ensemble fini

Si $(D_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles finis d'union D. Alors toutes les sommes $S_n := \sum_{d \in D_n} u_d$ sont finies et la suite (S_n) est croissante.
La convergence de S_n est équivalente à la sommabilité de (u_d) sur D.

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Démonstration

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Démonstration

Application Série à termes positifs

Combinaison linéaire de familles sommables

Proposition - Sommabilité d'une combinaison linéaire

Soit D, un ensemble au plus dénombrable.
Soient $(u_d)_{d\in D}$ et $(v_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ deux familles de réels positifs, sommables.
Alors $(u_d+v_d)_{d\in D}$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda u_d)_{d\in D}$ sont sommables.
Et $\sum_{d\in D}(u_d+v_d) = \sum_{d\in D} u_d + \sum_{d\in D} v_d$ et $\sum_{d\in D} \lambda u_d = \lambda \sum_{d\in D} u_d$.

Combinaison linéaire de familles sommables

Proposition - Sommabilité d'une combinaison linéaire

Soit D, un ensemble au plus dénombrable.
Soient $(u_d)_{d\in D}$ et $(v_d)_{d\in D}\in(\mathbb{R}_+)^D$ deux familles de réels positifs, sommables.
Alors $(u_d+v_d)_{d\in D}$ et $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}_+$, $(\lambda u_d)_{d\in D}$ sont sommables.
Et $\sum\limits_{d\in D}(u_d+v_d)=\sum\limits_{d\in D}u_d+\sum\limits_{d\in D}v_d$ et $\sum\limits_{d\in D}\lambda u_d=\lambda\sum\limits_{d\in D}u_d$.

Démonstration

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I, (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I, (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Remarque I au plus dénombrable

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I, (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Remarque I au plus dénombrable

Démonstration

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Savoir-faire. Application du théorème de sommation par paquets avec $I = \mathbb{N}$

Si $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in P_n}$ est sommable,
2. puis $\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{d\in P_n} u_d \right)$ converge (série à termes positifs).

Et dans ce cas : $\sum_{d\in D} u_d = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{d\in P_n} u_d$.

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Savoir-faire. Application du théorème de sommation par paquets avec $I = \mathbb{N}$

Si $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in P_n}$ est sommable,
2. puis $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{d\in P_n} u_d\right)$ converge (série à termes positifs).

Et dans ce cas : $\sum_{d\in D} u_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{d\in P_n} u_d$.

Exemple Sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Fubini (positif)

Le théorème suivant apparait alors comme un corollaire :

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur $\mathbb{N}^2$

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

ou bien, si et seulement si

1. pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

Alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)$

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Démonstration

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Démonstration

Exercice

1. Etudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(pq)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

   Dans le cas sommable, donner la valeur de la somme.

2. Si on note $d(n)$, le nombre de diviseurs de n, montrer alors que cette somme vaut $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{d(n)}{n^\alpha}$.

Fubini (positif) famille double

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.

$(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. $\forall\ d \in D$, la famille $(u_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable de somme s_d
2. puis la famille $(s_d)_{d\in D}$ est sommable.

ou bien, si et seulement si

1. $\forall\ d' \in D'$, la somme $(u_{d,d'})_{d\in D}$ est sommable de somme $s_{d'}$
2. puis la famille $(s_{d'})_{d'\in D'}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} u_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} u_{d,d'}\right)$$

Fubini (positif) famille double

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.

$(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. $\forall\ d \in D$, la famille $(u_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable de somme s_d
2. puis la famille $(s_d)_{d\in D}$ est sommable.

ou bien, si et seulement si

1. $\forall\ d' \in D'$, la somme $(u_{d,d'})_{d\in D}$ est sommable de somme $s_{d'}$
2. puis la famille $(s_{d'})_{d'\in D'}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} u_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} u_{d,d'}\right)$$

Démonstration

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Démonstration

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Démonstration

Remarque La réciproque est fausse

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I} \left(\sum_{d\in P_i} u_d \right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Démonstration

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Démonstration

Savoir-faire. Etude d'une famille sommable

On se place dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut donc calculer d'abord la somme. (Si besoin, on ajoute : « sous réserve de convergence »).
Et on tire la conclusion selon la valeur : $\in \mathbb{R}$ ou $= +\infty$. Les méthodes s'adaptent.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

$\Rightarrow$ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i\in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i\in I} \alpha_i$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (a_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} a_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} a_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (a_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} a_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} a_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions. . .
- Nécessairement, I est alors au plus dénombrable.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} \alpha_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions. . .
- Nécessairement, I est alors au plus dénombrable.
- On retrouve les séries numériques positives, ou encore les sommes doubles. . .

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

$\Rightarrow$ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.
- Combinaison linéaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.
- Combinaison linéaire
- Sommation par paquets : application à Fubini.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Pour le prochain cours

- Lecture : Sommabilité
- Exercice n°811, 813 & 816