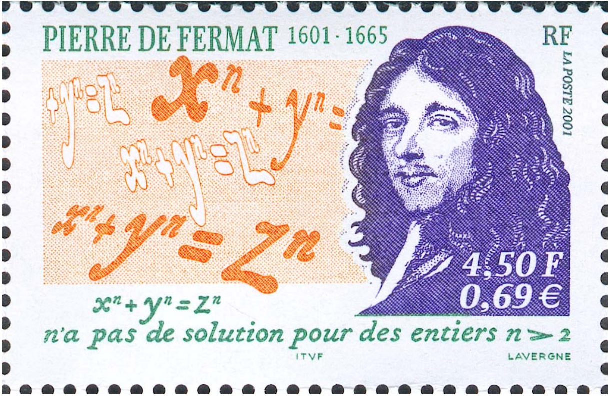

Leçon 110 - Sommabilité

20 juin 2025

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Application Cas des suites indexées sur $\mathbb{N}$.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d \in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D, \mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Application Cas des suites indexées sur $\mathbb{N}$.
Exemple Famille non sommable et série (semi-)convergente

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes

On montre la sommabilité de la famille des valeurs absolues, respectivement modules.
On commence donc toujours par considérer $(|z_d|)_{d\in D}$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes

On montre la sommabilité de la famille des valeurs absolues, respectivement modules.
On commence donc toujours par considérer $(|z_d|)_{d\in D}$.

<u>Exercice</u>

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Etudier la sommabilité de $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Décomposition en 4 tas

Remarque Rappels

Décomposition en 4 tas

Remarque Rappels

Savoir-faire. Décomposition en « morceaux »

$(x_d) \in (\mathbb{R})^D$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(x_d^+)_{d\in D}$ et $(x_d^-)_{d\in D}$ sont sommables.
$(z_d) \in (\mathbb{C})^D$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(z_d))_{d\in D}$ et $(\mathrm{Im}(z_d))_{d\in D}$ sont sommables.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Ce qui se convertit en un second savoir-faire qu'on exploite très fréquemment (une condition suffisante, seulement) :

Savoir-faire. Sommabilité par majoration

$\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Longrightarrow (z_d)_{d\in D}$ est sommable.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Ce qui se convertit en un second savoir-faire qu'on exploite très fréquemment (une condition suffisante, seulement) :

Savoir-faire. Sommabilité par majoration

$\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Longrightarrow$ $(z_d)_{d\in D}$ est sommable.

Démonstration

Somme

Définition - Somme d'une famille sommable

Soit $(x_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{d\in D} x_d = \sum_{d\in D} x_d^+ - \sum_{d\in D} x_d^-$.

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.

On pose alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\in D} z_d &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d) + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)\\ &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^+ - \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^- + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^+ - i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^-\end{aligned}$$

Somme

Définition - Somme d'une famille sommable

Soit $(x_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{d\in D} x_d = \sum_{d\in D} x_d^+ - \sum_{d\in D} x_d^-$.

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.

On pose alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\in D} z_d &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d) + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)\\ &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^+ - \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^- + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^+ - i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^-\end{aligned}$$

Remarque Elargissement

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Structure

Remarque Addition.

Structure

Remarque Addition.

Application $\sum_{d\in D}(a_d - b_d) = \sum_{d\in D} a_d - \sum_{d\in D} b_d$.

Structure

Remarque Addition.

Application $\sum_{d\in D}(a_d - b_d) = \sum_{d\in D} a_d - \sum_{d\in D} b_d$.

Proposition - Espace vectoriel

$\ell^1(D,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^D,+,\cdot)$.
C'est-à-dire, si $\lambda,\lambda' \in \mathbb{K}$ et $(z_d)_{d\in D}$, $(z'_d)_{d\in D}$ sommables,
alors $(\lambda z_d + \lambda' z'_d)_{d\in D}$ est sommable. Et

$$\sum_{d\in D} \lambda z_d + \lambda' z'_d = \lambda \sum_{d\in D} z_d + \lambda' \sum_{d\in D} z'_d$$

Structure

Remarque Addition.

Application $\sum_{d\in D}(a_d - b_d) = \sum_{d\in D} a_d - \sum_{d\in D} b_d$.

Proposition - Espace vectoriel

$\ell^1(D,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^D,+,\cdot)$.
C'est-à-dire, si $\lambda,\lambda' \in \mathbb{K}$ et $(z_d)_{d\in D}$, $(z'_d)_{d\in D}$ sommables, alors $(\lambda z_d + \lambda' z'_d)_{d\in D}$ est sommable. Et

$$\sum_{d\in D} \lambda z_d + \lambda' z'_d = \lambda \sum_{d\in D} z_d + \lambda' \sum_{d\in D} z'_d$$

(demi-)Démonstration

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Sous-famille

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$

Sous-famille

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$

Démonstration

Sous-famille

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$

Démonstration

Remarque Comparaison des valeurs des sommes

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.
Elle donne, en revanche, dès que la sommababilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.
Elle donne, en revanche, dès que la sommababilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Proposition - Suite croissante d'ensembles donnant D

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$. Supposons que $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(z_d)_{d\in D_n} \in \ell^1(D_n,\mathbb{K})$ et
$$\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d.$$

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.
Elle donne, en revanche, dès que la sommababilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Proposition - Suite croissante d'ensembles donnant D

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$. Supposons que $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(z_d)_{d\in D_n} \in \ell^1(D_n,\mathbb{K})$ et
$$\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d.$$

Démonstration

Attention à la non-réciproque

Attention. La réciproque est fausse

A bien avoir en tête.

$\mathbb{N}^* = \bigcup\!\!\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} [\![1,n]\!]$ et $x_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est sommable.

Et la somme $\displaystyle\sum_{k\in[\![1,n]\!]} x_k$ admet une limite : $\ln 2 \in \mathbb{R}$.

Et pourtant, la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Finalement, la réciproque est vraie que pour des familles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, (ou que dans $\mathbb{R}_-\dots$). La sommabilité est plus exigeante que la convergence. . .(comme pour les intégrales)

Exploiter la croissance des ensembles d'indexation

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)

On a vu que D était au plus dénombrable.

- Si D est fini, les calculs numériques sont simples.
- Si D est infini, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to D$ bijective. On note alors

$D_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$

On a donc $D = \bigcup\!\uparrow D_n$ et chaque D_n est fini.

On exploite alors $\displaystyle\sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \to +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d$.

Exploiter la croissance des ensembles d'indexation

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)

On a vu que D était au plus dénombrable.

- Si D est fini, les calculs numériques sont simples.
- Si D est infini, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to D$ bijective. On note alors $D_n = \varphi([\![0,n]\!])$

On a donc $D = \bigcup\!\uparrow D_n$ et chaque D_n est fini.

On exploite alors $\displaystyle\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d$.

Application Cas d'une somme sur $\mathbb{N}$

Indexation entière

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \to D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$.

on a $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K}) \Longleftrightarrow (z_{\sigma(d')})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$.

En cas de sommabilité, on a $\displaystyle\sum_{d\in D} z_d = \sum_{d'\in D'} z_{\sigma(d')}$

Indexation entière

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \to D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$.

on a $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K}) \Longleftrightarrow (z_{\sigma(d')})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$.

En cas de sommabilité, on a $\sum\limits_{d\in D} z_d = \sum\limits_{d'\in D'} z_{\sigma(d')}$

Corollaire - Version avec $D = \mathbb{N}$

Si $(z_n) \in \mathbb{C}^N$ et si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ est absolument convergente,

Alors pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Indexation entière

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \to D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$.

on a $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K}) \iff (z_{\sigma(d')})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$.

En cas de sommabilité, on a $\sum_{d\in D} z_d = \sum_{d'\in D'} z_{\sigma(d')}$

Corollaire - Version avec $D = \mathbb{N}$

Si $(z_n) \in \mathbb{C}^N$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ est absolument convergente,

Alors pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Démonstration

Complément au savoir-faire

On peut compléter le savoir-faire précédent, avec, en plus, un changement de variables.

Complément au savoir-faire

On peut compléter le savoir-faire précédent, avec, en plus, un changement de variables.

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (2)

On suppose que D est dénombrable, on reprend $\varphi : \mathbb{N} \to D$ bijective et $D_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$

On a : $\displaystyle\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}$.

Corollaire

Corollaire - La somme comme une forme linéaire

L'application $\ell^1(D,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(z_d)_{d\in D} \mapsto \sum_{d\in D} z_d$ est une forme linéaire.

Et pour tout $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$, on a $\left|\sum_{d\in D} z_d\right| \leqslant \sum_{d\in D} |z_d|$.

Corollaire

Corollaire - La somme comme une forme linéaire

L'application $\ell^1(D,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(z_d)_{d\in D} \mapsto \sum_{d\in D} z_d$ est une forme linéaire.

Et pour tout $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$, on a $\left|\sum_{d\in D} z_d\right| \leqslant \sum_{d\in D} |z_d|$.

Démonstration

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{K}$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Soit $(z_d)_{d\in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} 1. \text{ Pour tout } i \in I, (|z_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable} \\ 2. \left(\sum_{d\in P_i} |z_d|\right) \text{ est une famille sommable.} \end{cases}$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d\in D} z_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} z_d\right)$$

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{K}$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Soit $(z_d)_{d\in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} 1.\ \text{Pour tout } i \in I,\ (|z_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable} \\ 2.\ \left(\sum\limits_{d\in P_i} |z_d|\right) \text{est une famille sommable.} \end{cases}$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d\in D} z_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} z_d\right)$$

Démonstration

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{K}$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Soit $(z_d)_{d\in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} 1.\ \text{Pour tout } i \in I,\ (|z_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable} \\ 2.\ \left(\displaystyle\sum_{d\in P_i} |z_d|\right) \text{ est une famille sommable.} \end{cases}$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d\in D} z_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} z_d\right)$$

Démonstration

Application Somme sur $\mathbb{Z}$

D'abord vérifier la sommabilité

Attention. Pas de sommablité par la somme

Il faut bien s'assurer d'abord de la sommabilité avant le calcul.

La famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 1$ et $z_{-n} = -1$, et $z_0 = 0$ vérifie $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z_k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et pourtant cette famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

D'abord vérifier la sommabilité

Attention. Pas de sommablité par la somme

Il faut bien s'assurer d'abord de la sommabilité avant le calcul.
La famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 1$ et $z_{-n} = -1$, et $z_0 = 0$ vérifie $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z_k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Et pourtant cette famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Reprenons un calcul précédent :

Exercice

On considère $r \in [0,1[$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $z_n = r^n e^{in\theta}$ si $n \leqslant 0$, $z_n = r^{-n} e^{in\theta}$ si $n < 0$.

1. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n$.

Fubini - cas général

Théorème - Fubini : suites doubles complexes indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite numérique doublement indexée $(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.

$(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d\in D$, la famille $(z_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable
2. puis la famille $\left(\sum_{d'} |z_{d,d'}|\right)_{d\in D}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} z_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} z_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} z_{d,d'}\right)$$

Fubini - cas général

Théorème - Fubini : suites doubles complexes indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite numérique doublement indexée $(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.

$(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d\in D$, la famille $(z_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable
2. puis la famille $\left(\sum_{d'} |z_{d,d'}|\right)_{d\in D}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} z_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} z_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} z_{d,d'}\right)$$

Démonstration

Deux cas d'application

Proposition - Produit de termes

Soient $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ et $(z'_{d'})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{C})$.

Alors $(z_d z'_{d'})_{(d,d')\in D\times D'} \in \mathbb{C}^{D\times D'}$ est sommable.

Et $$\sum_{(d,d')\in D\times D'} z_d z'_{d'} = \left(\sum_{d\in D} z_d\right) \times \left(\sum_{d'\in D'} z'_{D'}\right).$$

Deux cas d'application

Proposition - Produit de termes

Soient $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ et $(z'_{d'})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{C})$.

Alors $(z_d z'_{d'})_{(d,d')\in D\times D'} \in \mathbb{C}^{D\times D'}$ est sommable.

Et $$\sum_{(d,d')\in D\times D'} z_d z'_{d'} = \left(\sum_{d\in D} z_d\right) \times \left(\sum_{d'\in D'} z'_{D'}\right).$$

Exercice

Faire la démonstration

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur $\mathbb{N}$

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$(z_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q\geqslant 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p\geqslant 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}| \right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Et on a alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q} \right)$.

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur $\mathbb{N}$

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$(z_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q\geqslant 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p\geqslant 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}| \right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Et on a alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q} \right)$.

On peut arbitrairement faire l'interversion $p \leftrightarrow q$.

Exercice

Faire la démonstration

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur $\mathbb{N}$

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.
$(z_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q\geqslant 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}|\right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Et on a alors $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q}\right)$.

On peut arbitrairement faire l'interversion $p \leftrightarrow q$.

Exercice

Faire la démonstration

Exemple Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
Le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$,

$$\text{avec, pour tout } n\in\mathbb{N},\ c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}.$$

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
Le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ est la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$,

avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q = \sum\limits_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}$.

Proposition - Produit de séries absolument convergentes

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries abs. conv.,

alors leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ est une série abs. conv..

Et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
Le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$,

avec, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}$.

Proposition - Produit de séries absolument convergentes

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries abs. conv.,

alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ est une série abs. conv..

Et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Démonstration

Applications

Exemple Exponentielle

Applications

Exemple Exponentielle

Application Formule du binôme négative

Applications

Exemple Exponentielle

Application Formule du binôme négative

Attention. Cas de non convergence absolue

Considérons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont semi-convergence (critère de Leibniz), i.e. convergentes mais non absolument convergentes.

Le produit de Cauchy donne $c_n = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}}$.

Or $x \mapsto (x+1)(n+1-x)$ est maximal en $x = \frac{n}{2}$ et vaut $(\frac{n}{2}+1)^2$.

d'où $|c_n| \geqslant (n+1)\dfrac{2}{n+2} \geqslant 1$, donc $\sum c_n$ diverge grossièrement : la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires. Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires. Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !
- $\ell^1(D, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

$\Rightarrow$ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- Sommation par paquets et théorème de Fubini.

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- Sommation par paquets et théorème de Fubini.
- Application au produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Pour le prochain cours

- Lecture : Espace de probabilité
- Exercice n°817, 820 & 821