Devoir Surveillé n°0

Sujet donné le samedi 14 septembre 2024, 2h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la <u>précision</u> des raisonnements et l'énoncé des <u>formules utilisées</u>. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice -

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 1$.

Dans cet exercice, on démontre de deux façons : $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, puis on applique cette formule.

.1. Première méthode.
Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} x^k$ afin d'obtenir l'expression rationnelle de $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$.

.2. Seconde méthode.
Montrer que le calcul $(1-x)^2\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$ conduit, *grâce à une manipulation astucieuse*, à une somme doublement télescopique.
Retrouver l'expression $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$.

.3. En déduire la valeur de

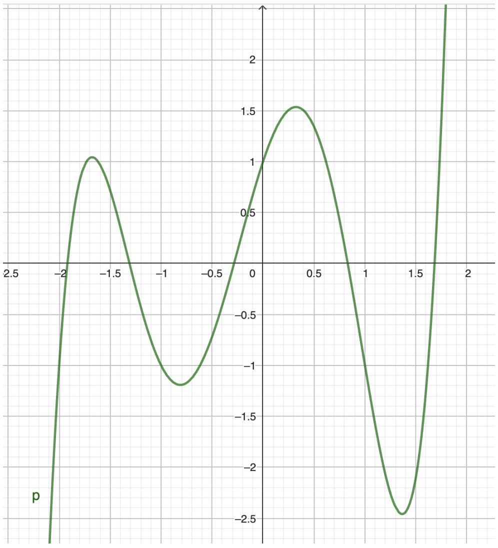
$$\sum_{h=5}^{100} \frac{h}{2^h}$$

Problème - Aperçu du groupe de Galois des racines d'un polynôme

Dans ce problème, on considère la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par :

$$P : x \mapsto 1+3x-3x^2-4x^3+x^4+x^5$$

On note $\mathcal{C}$, la représentation graphique dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la courbe $y=P(x)$. Autrement écrit : $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=P(x)\}$.
Cette représentation graphique est donnée. On pourra fréquemment s'y référer « sans jamais l'exploiter comme argument d'autorité ».



$\boxed{\text{I Racines de } P}$

On peut noter $\mathcal{Z}_P$, l'ensemble des racines de P

I.1. Justifier autrement que par un argument du type : « cela se voit »que la fonction polynomiale P, dont on sait qu'elle est <u>continue</u>, admet exactement 5 racines sur $\mathbb{R}$.

On note A, B, C, D, E ces cinq racines avec pour les différencier les relations : $A < B < C < D < E$.
On a donc $\mathcal{Z}_P = \{A, B, C, D, E\}$.

I.2. Valeur approchée de E.

(a) On cherche une valeur approchée de E par la méthode de Newton (algorithme de la tangente). Montrer qu'il s'agit de considérer une suite (u_n) dont la relation de récurrence est donnée par

$$u_{n+1} = \frac{-1 - 3u_n^2 - 8u_n^3 + 3u_n^4 + 4u_n^5}{3 - 6u_n - 12u_n^2 + 4u_n^3 + 5u_n^4}$$

(b) On choisit, jusqu'à la fin de cette partie : $u_0 = 2$.
Exprimer u_1 sous forme de fraction irréductible.

On va étudier la convergence de (u_n)

(c) Pourquoi peut-on affirmer la proposition suivante ?

pour tout $u \geqslant 1$ réel, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse u est sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[1, +\infty[$.

On pourra étudier la convexité de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On notera $g_u : x \mapsto P'(u)(x-u) + P(u)$, la fonction affine dont la représentation est la droite, tangente à $\mathcal{C}$, en $M\big(u, P(u)\big)$.
D'après la question précédente, on a pour tout $u \in [1, +\infty[$, puis tout $x \in [1, +\infty[$, $g_u(x) \leqslant P(x)$, avec égalité en $x = u$.

(d) Montrer, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
On <u>admet</u> que (u_n) converge vers E, unique point fixe de la relation de récurrence sur $[1, +\infty[$.

On donne les approximations numériques suivantes

A	B	C	D	E
$-1,91899$	$-1,30972$	$-0,28462$	$0,83083$	$1,68251$

II Relation entre les racines

Numériquement, il semble qu'on ait la relation : $E = 4C^2 + 2D^2$.
Nous allons montrer, *en exploitant une stratégie d'Evariste Galois* qu'une telle relation est impossible.
On considère $\Phi : x \mapsto x^2 - 2$ et $\tilde{P} : x \mapsto -1 + 3x + 3x^2 - 4x^3 - x^4 + x^5$.

II.1. Relation coefficients-racines.

(a) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-A)(x-B)(x-C)(x-D)(x-E)$?

(b) En déduire que $\Sigma_1 := A + B + C + D + E = -1$.
$:=$ signifie qu'on définit ainsi Σ_1, comme le nombre $A + B + C + D + E$. Il faut montrer que ce nombre vaut -1.

(c) De même donner la valeur de $\Sigma_5 := A \times B \times C \times D \times E$, $\Sigma_4 := ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE$ et $\Sigma_3 := ABC + ABD + ABE + ACD + ACE + ADE + BCD + BCE + BDE + CDE$ (on ne demande pas la valeur de Σ_2).

II.2. On considère $T = P \times \tilde{P}$, on a effectué le développement, mais il manque deux termes :

$$T(x) = -1 + 0x + 15x^2 + 0x^3 - 35x^4 + ??x^6 + ??x^7 - 9x^8 + 0x^9 + x^{10}$$

Donner la valeur de $[T]_6$ et $[T]_7$. (On laissera les traces des calculs sur la copie !)

II.3. Action de Φ sur $\mathcal{Z}_P$.

(a) Montrer, en exploitant $P(\Phi(z))$, que si $z \in \{A, B, C, D, E\}$, alors $\Phi(z) \in \{A, B, C, D, E\}$

(b) Montrer que $\Phi(z_1) = \Phi(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$.

(c) En déduire, en exploitant les valeurs numériques données en fin de première partie que Φ établit une permutation de $\{A, B, C, D, E\}$.
Cela signifie que chacun des cinq nombres $\{A, B, C, D, E\}$ admet un unique antécédent par Φ.

(d) Compléter le cycle de permutations des racines par Φ (on pourra exploiter les approximations numériques :

$$E \xrightarrow{\Phi} D \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} E$$

II.4. Fonctions polynomiales de 5 variables.
On considère trois fonctions polynomiale de 5 variables

— $f : (x_1, x_2, x_3, x_3, x_5) \mapsto x_1x_2x_3x_4x_5$,
— $g_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 + x_3 + x_4$,
— $g_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto -1 - x_2 - x_5$.

(a) Que vaut $f(A, B, C, D, E)$?

(b) Montrer que les fonctions g_1 et g_2 sont différentes, mais que $g_1(A, B, C, D, E) = g_2(A, B, C, D, E)$
Montrer que $g_1(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D), \Phi(E)) = g_2(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D), \Phi(E))$.

(c) Un théorème d'Evariste Galois affirme que

si h_1 et h_2 sont deux fonctions polynomiales de cinq variables à coefficients entiers telles que $h_1(A, B, C, D, E) = h_2(A, B, C, D, E)$, alors $h_1(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D), \Phi(E)) = h_2(\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D), \Phi(E))$.

Supposons (pour une démonstration par l'absurde) alors que $E = 4C^2 + 2D^2$, montrer alors que $B = 4E^2 + 2C^2$. Conclure.

DEVOIR SURVEILLE 0 - Correction

Exercice -

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 1$.

Dans cet exercice, on démontre de deux façons : $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, puis on applique cette formule.

.1. Première méthode.

Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} x^k$ afin d'obtenir l'expression rationnelle de $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$.

Suivant la méthode vue en cours :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} x^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} x^k = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{1-x^{n-i+1}}{1-x}$$

en exploitant le résultat sur la somme d'une suite en progression géométrique, de raison $x \neq 1$ et de premier terme x^i.
On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} x^k &= \frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{n}\left(x^i - x^{n+1}\right) = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^{n+1}\right) = \frac{1}{1-x}\left(x\frac{1-x^n}{1-x} - nx^{n+1}\right)\\ &= \frac{x-x^{n+1}-nx^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Et par ailleurs,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} x^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} x^k = \sum_{k=1}^{n}\left(x^k\sum_{i=1}^{k} 1\right) = \sum_{k=1}^{n} kx^k$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} hx^h = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}}$$

.2. Seconde méthode.

Montrer que le calcul $(1-x)^2\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$ conduit, *grâce à une manipulation astucieuse*, à une somme doublement télescopique.

Retrouver l'expression $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} hx^h$.

On a

$$(1-x)^2\sum_{h=1}^{n} hx^h = (1-2x+x^2)\sum_{h=1}^{n} hx^h = \sum_{h=1}^{n}(hx^h - 2hx^{h+1} + hx^{h+2}) = \sum_{h=1}^{n}(hx^h - hx^{h+1}) + \sum_{h=1}^{n}(hx^{h+2} - hx^{h+1})$$

Ce n'est pas des sommes télescopiques, mais presque (il aurait fallut $(h+1)x^{h+1}$, par exemple).
Notons alors, afin de forcer l'apparition d'un télescopage, que :
$hx^h - (h+1)x^{h+1} = hx^h - hx^{h+1} - x^{h+1}$ et $hx^{h+2} - (h-1)x^{h+1} = hx^{h+2} - hx^{h+1} + x^{h+1}$
Ainsi : $hx^h - (h+1)x^{h+1} + hx^{h+2} - (h-1)x^{h+1} = hx^h - 2hx^{h+1} + hx^{h+2}$.
Et donc en posant $u_h = hx^h$ et $v_h = (h-1)x^{h+1}$, on trouve

$$(1-x)^2\sum_{h=1}^{n} hx^h = \sum_{h=1}^{n}(u_h - u_{h+1}) + \sum_{h=1}^{n}(v_{h+1} - v_h)$$

Et ainsi, par double télescopage :

$$(1-x)^2\sum_{h=1}^{n} hx^h = u_1 - u_{n+1} + v_{n+1} - v_1 = 1x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} - 0x^1$$

Ainsi, en divisant par $(1-x)^2 \neq 0$:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} hx^h = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}}$$

.3. En déduire la valeur de

$$\sum_{h=5}^{100} \frac{h}{2^h}$$

Notons, par sommation par paquets (ou relation de Chasles) :

$$\sum_{h=5}^{100} \frac{h}{2^h} = \sum_{h=1}^{100} \frac{h}{2^h} - \sum_{h=1}^{4} \frac{h}{2h}$$

En prenant, $x = \frac{1}{2} \neq 1$ dans la formule obtenu précédemment :

$$\sum_{h=5}^{100} \frac{h}{2^h} = \frac{\frac{1}{2} - 101\frac{1}{2^{101}} + 100\frac{1}{2^{102}} - \frac{1}{2} + 5\frac{1}{2^5} - 4\frac{1}{2^6}}{(1-\frac{1}{2})^2}$$

$$\boxed{\sum_{h=5}^{100} \frac{h}{2^h} = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} - 101\frac{1}{2^{99}} + 100\frac{1}{2^{100}} = \frac{3}{8} - \frac{102}{2^{100}}}$$

Problème - Aperçu du groupe de Galois des racines d'un polynôme

Ce polynôme est l'exemple choisi par Alain Connes dans son exposé proposé à l'Académie des sciences, en 2011.
Cette conférence s'intitule Évariste Galois et la théorie de l'ambiguïté.
Si vous vous embêtez ce week-end, vous pouvez visualiser la conférence : https ://www.dailymotion.com/video/xovjfs
Vous pouvez aussi lire les notes : https ://www.academie-sciences.fr/archivage_site/activite/conf/exposeConnes_291111_diapo.pdf
(Tout est en lien sur cahier-de-prepa).

Insistons : ce n'est pas parce qu'on ne comprend pas tout, que notre cerveau ne continue pas à penser !

I Racines de P

On peut noter $\mathcal{Z}_P$, l'ensemble des racines de P

I.1. Justifier autrement que par un argument du type : « cela se voit »que la fonction polynomiale P, dont on sait qu'elle est continue, admet exactement 5 racines sur $\mathbb{R}$.

- La fonction P est de degré 5, donc elle admet au plus 5 racines.
- Il s'agit d'une fonction continue, car polynomiale, nous allons employer à cinq reprises le théorème des valeurs intermédiaires.

  On s'aide du graphique, pour choisir de manière intelligente les points dont on calcule les images.

  $P(-2) = 1 + 3\times(-2) - 3\times(-2)^2 - 4\times(-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 = 1 - 6 - 12 + 32 - 16 - 32 = -1 < 0$

  $P(-\frac{3}{2}) = 1 + 3\times(-\frac{3}{2}) - 3\times(-\frac{3}{2})^2 - 4\times(-\frac{3}{2})^3 + (-\frac{3}{2})^4 + (-\frac{3}{2})^5 = \frac{32 - 144 - 216 + 432 + 162 - 243}{32} = \frac{23}{32} > 0$

  $P(-1) = 1 + 3\times(-1) - 3\times(-1)^2 - 4\times(-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 3 - 3 + 4 + 1 - 1 = -1 < 0$

  $P(0) = 1 > 0$

  $P(1) = 1 + 3 - 3 - 4 + 1 + 1 = -1 < 0$

  $P(2) = 1 + 3\times 2 - 3\times 2^2 - 4\times 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 6 - 12 - 32 + 16 + 32 = 11 > 0$

  On peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[-2, \frac{-3}{2}]$, $[\frac{-3}{2}, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$, dont les cinq intervalles-images contiennent 0.

  On trouve donc une racine de P sur chacun de ces intervalles. P admet donc au moins 5 racines.

$$\boxed{P \text{ admet donc exactement 5 racines sur } \mathbb{R} \text{ (On peut même les localiser).}}$$

On note A, B, C, D, E ces cinq racines avec pour les différencier les relations : $A < B < C < D < E$.
On a donc $\mathcal{Z}_P = \{A, B, C, D, E\}$.

I.2. Valeur approchée de E.

(a) On cherche une valeur approchée de E par la méthode de Newton (algorithme de la tangente).
Montrer qu'il s'agit de considérer une suite (u_n) dont la relation de récurrence est donnée par

$$u_{n+1} = \frac{-1 - 3u_n^2 - 8u_n^3 + 3u_n^4 + 4u_n^5}{3 - 6u_n - 12u_n^2 + 4u_n^3 + 5u_n^4}$$

Pour l'algorithme de Newton, on considère un point u de référence. On calcule son image $P(u)$, et la tangente à la $\mathcal{C}$ en ce point.
Elle a pour équation : $y = P'(u)(x - u) + P(u)$.
L'idée consiste alors à remplacer u par u', qui annule la tangente. On a donc l'équation : $0 = P'(u)(u' - u) + P(u)$.

Cela donne : $u = u' - \dfrac{P(u)}{P'(u)}$ (évidemment, à condition que $P'(u) \neq 0$).
Compte-tenu de l'expression de P et celle de $P' : x \mapsto 3 - 6x - 12x^2 + 4x^3 + 5x^4$, on trouve

$$u' = u - \frac{1 + 3u - 3u^2 - 4u^3 + u^4 + u^5}{3 - 6u - 12u^2 + 4u^3 + 5u^4} = \frac{-1 - 3u^2 - 8u^3 + 3u^4 + 4u^5}{3 - 6u - 12u^2 + 4u^3 + 5u^4}$$

Il reste à faire : $u \leftarrow u_n$ et donc $u' \leftarrow u_{n+1}$:

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{-1 - 3u_n^2 - 8u_n^3 + 3u_n^4 + 4u_n^5}{3 - 6u_n - 12u_n^2 + 4u_n^3 + 5u_n^4}}$$

(b) On choisit, jusqu'à la fin de cette partie : $u_0 = 2$.
Exprimer u_1 sous forme de fraction irréductible.

$u_0 = 2$. On a donc, en reprenant l'expression trouvée en question I.2.(a) :

$$u_1 = \frac{-1 - 3 \times 2^2 - 8 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + 4 \times 2^5}{3 - 6 \times 2 - 12 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + 5 \times 2^4} = \frac{-1 - 12 - 64 + 48 + 128}{3 - 12 - 48 + 32 + 80} = \frac{99}{55} = \frac{9}{5}$$

$$\boxed{u_1 = \frac{9}{5} (= 1,8)}$$

On va étudier la convergence de (u_n)

(c) Pourquoi peut-on affirmer la proposition suivante ?

pour tout $x \geqslant 1$ réel, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x est sous la courbe $\mathcal{C}$ sur $[1, +\infty[$.

On pourra étudier la convexité de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

La fonction polynomiale P est dérivable trois fois. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) = -6 - 24x + 12x^2 + 20x^3$.
Puis $P^{(3)}(x) = -24 + 24x + 60x^2 = 24(x-1) + 60x^2$.
et donc pour tout $x \geqslant 1$, $P^{(3)}(x) \geqslant 0$, donc $P^{(2)}$ est croissante sur $[1, +\infty[$.
Donc pour tout $x \geqslant 1$, $P^{(2)}(x) \geqslant P^{(2)}(1)$. Et comme $P^{(2)}(1) = 2 > 0$,

$$\boxed{\forall\, x \geqslant 1,\ P''(x) > 0, \text{ donc } P \text{ est convexe sur } [1, +\infty[\text{ (au moins).}}$$

Pour une fonction f, être convexe sur un intervalle I, signifie que toutes les tangentes à courbe associée à f et prise dans des points d'abscisse sur I sont sous la courbe (pour $x \in I$).

$$\boxed{\text{pour tout } u \geqslant 1 \text{ réel, la tangente à } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse } u \text{ est sous la courbe } \mathcal{C} \text{ sur } [1, +\infty[.}$$

On notera $g_u : x \mapsto P'(u)(x - u) + P(u)$, la fonction affine dont la représentation est la droite, tangente à $\mathcal{C}$, en $M\big(u, P(u)\big)$.
D'après la question précédente, on a pour tout $u \in [1, +\infty[$, puis tout $x \in [1, +\infty[$, $g_u(x) \leqslant P(x)$, avec égalité en $x = u$.

(d) Montrer, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Commençons par une remarque. Fixons $u \in [1, +\infty[$, quelconque.
On sait que $E \in [1, +\infty[$ et $P(E) = 0$.
On a donc (puisque la tangente est sous la courbe) : $g_u(E) \leqslant P(E) = 0$, donc $g_u(E) \leqslant 0$.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}_n$: « $E \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
— $u_0 = 2 > E$ et $u_1 = 1,8 > E$ (valeurs numériques de l'énoncé).
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a donc $E \leqslant u_{n+1}$.
Considérons $u \leftarrow u_{n+1}$ (de la remarque préliminaire).
Alors par définition, u_{n+2} est le seul point tel que la fonction affine $g_{u_{n+1}}(u_{n+2}) = 0$.
Or d'après le T.V.I., comme $g_{u_{n+1}}(E) \leqslant 0$ et $g_{u_{n+1}}(u_{n+1}) = P(u_{n+1}) \leqslant 0$, on a $u_{n+2} \in [E, u_{n+1}]$.
Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
La récurrence est donc démontrée.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ E \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

On a donc (u_n) est décroissante, et (u_n) est minorée (par E).

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc convergente.}}$$

On <u>admet</u> que (u_n) converge vers E, unique point fixe de la relation de récurrence sur $[1, +\infty[$.

On donne les approximations numériques suivantes

A	B	C	D	E
$-1,91899$	$-1,30972$	$-0,28462$	$0,83083$	$1,68251$

II Relation entre les racines

Numériquement, il semble qu'on ait la relation : $E = 4C^2 + 2D^2$.
Nous allons montrer, *en exploitant une stratégie d'Evariste Galois* qu'une telle relation est impossible.
On considère $\Phi : x \mapsto x^2 - 2$ et $\tilde{P} : x \mapsto -1 + 3x + 3x^2 - 4x^3 - x^4 + x^5$.

II.1. Relation coefficients-racines.

(a) Pourquoi peut-on affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - A)(x - B)(x - C)(x - D)(x - E)$?

C'est un théorème du cours, qui permet d'affirmer qu'on peut factoriser un polynôme par les monômes $x - \lambda$, si λ sont des racines distinctes de P :

$$\exists\ Q \text{ fonction polynomiale de degré } 5-5=0 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R},$$
$$P(x) = Q(x) \times \prod_{\lambda \in \mathcal{Z}_P} (x - \lambda) = Q(x) \times (x - A)(x - B)(x - C)(x - D)(x - E)$$

Or $\deg Q = 0$, donc Q est une constante, notée maintenant μ.
Par unicité d'écriture d'une fonction polynomiale, on peut développer et identifier :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = \mu(x^5 - (A + B + C + D + E)x^4 + (AB + AC + \dots DE)x^3 - \dots + ABCDE)$$

On a donc nécessairement $\mu = 1$ (en comparant les termes associés à x^5).

$$\boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - A)(x - B)(x - C)(x - D)(x - E)}$$

(b) En déduire que $\Sigma_1 := A + B + C + D + E = -1$.
$:=$ signifie qu'on définit ainsi Σ_1, comme le nombre $A + B + C + D + E$. Il faut montrer que ce nombre vaut -1.

Si on prolonge l'identification de la question précédente, comme nombre devant le monôme x^4 :
d'un côté 1
de l'autre $-(A + B + C + D + E) = -\Sigma_1$.

$$\boxed{\Sigma_1 = -1}$$

(c) De même donner la valeur de $\Sigma_5 := A \times B \times C \times D \times E$, $\Sigma_4 := ABCD + ABCE + ABDE + ACDE + BCDE$ et $\Sigma_3 := ABC + ABD + ABE + ACD + ACE + ADE + BCD + BCE + BDE + CDE$ (on ne demande pas la valeur de Σ_2).

Si on continue ce prolonge d'identification des questions précédentes, con trouve respectivement devant x^0, x et x^2 :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} -\Sigma_5 & = 1 \\ \Sigma_4 & = 3 \\ -\Sigma_3 & = -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Sigma_5 & = -1 \\ \Sigma_4 & = 3 \\ \Sigma_3 & = 3 \end{array}\right.}$$

II.2. On considère $T = P \times \tilde{P}$, on a effectué le développement, mais il manque deux termes :

$$T(x) = -1 + 0x + 15x^2 + 0x^3 - 35x^4 + ??x^6 + ??x^7 - 9x^8 + 0x^9 + x^{10}$$

Donner la valeur de $[T]_6$ et $[T]_7$. (On laissera les traces des calculs sur la copie)

On applique la formule (de Cauchy) vu en cours :

$$\begin{aligned} [T]_6 = &\quad [P \times \tilde{P}]_6 = \sum_{k=0}^{6} [P]_k \times [\tilde{P}]_{6-k} = [P]_0[\tilde{P}]_6 + [P]_1[\tilde{P}]_5 + [P]_2[\tilde{P}]_4 + [P]_3[\tilde{P}]_3 + [P]_4[\tilde{P}]_2 + [P]_5[\tilde{P}]_1 + [P]_6[\tilde{P}]_0 \\ = &\quad 1 \times 0 + 3 \times 1 + (-3) \times (-1) + (-4) \times (-4) + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 0 \times (-1) = 3 + 3 + 16 + 3 + 3 = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T]_7 = &\quad [P \times \tilde{P}]_7 = \sum_{k=0}^{7} [P]_k \times [\tilde{P}]_{7-k} = [P]_0[\tilde{P}]_7 + [P]_1[\tilde{P}]_6 + [P]_2[\tilde{P}]_5 + [P]_3[\tilde{P}]_5 + [P]_4[\tilde{P}]_3 + [P]_5[\tilde{P}]_2 + [P]_6[\tilde{P}]_1 + [P]_7[\tilde{P}]_0 \\ = &\quad (-3) \times 1 + (-4) \times (-1) + 1 \times (-4) + 1 \times 3 = -3 + 4 - 4 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{T(x) = -1 + 15x^2 - 35x^4 + 28x^6 - 9x^8 + x^{10}}$$

II.3. Action de Φ sur $\mathcal{Z}_P$.

(a) Montrer, en exploitant $P(\Phi(z))$, que si $z \in \{A, B, C, D, E\}$, alors $\Phi(z) \in \{A, B, C, D, E\}$

Soit $z \in \{A, B, C, D, E\}$, une racine de P (donc).
On note $\Phi(z) = z^2 - 2$, sont image. Le calcul donne (globalement) pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(\Phi(x)) = {} & 1 + 3(x^2-2) - 3(x^2-2)^2 - 4(x^2-2)^3 + (x^2-2)^4 + (x^2-2)^5 \\ = {} & 1 + (-6+3x^2) + (-12+12x^2-3x^4) + (32 - 48x^2 + 24x^4 - 4x^6) \\ & +(16 - 32x^2 + 24x^4 - 8x^6 + x^8) + (-32 + 80x^2 - 80x^4 + 40x^6 - 10x^8 + x^{10}) \\ = {} & -1 + 15x^2 - 35x^4 + 28x^6 - 9x^8 + x^{10} = T(x) = P(x) \times \tilde{P}(x) \end{aligned}$$

Donc pour $z \in \{A, B, C, D, E\}$, $P(\Phi(z)) = P(z) \times \tilde{P}(z) = 0$. Donc $P(\Phi(z)) = 0$.
Ainsi, $\Phi(z)$ est une racine de P et donc

$$\boxed{\Phi(z) \in \{A, B, C, D, E\}}$$

(b) Montrer que $\Phi(z_1) = \Phi(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$.

Supposons que $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$, alors $z_1^2 - 2 = z_2^2 - 2$ ainsi $0 = z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$.
Par intégrité de $\mathbb{R}$ (un produit est nul si et seulement si un des termes est nul), on a donc :

$$\boxed{\text{Si } \Phi(z_1) = \Phi(z_2), \text{ alors } z_1 = z_2 \text{ ou } z_1 = -z_2.}$$

(c) En déduire, en exploitant les valeurs numériques données en fin de première partie que Φ établit une permutation de $\{A, B, C, D, E\}$.
Cela signifie que chacun des cinq nombres $\{A, B, C, D, E\}$ admet un unique antécédent par Φ.

Notons $\mathcal{Z}_P = \{A, B, C, D, E\}$, ensemble des racines de P.
Soit $z \in \mathcal{Z}_P$, alors $\Phi(z) \in \mathcal{Z}_P$.
Supposons (pour un raisonnement par l'absurde), qu'il existe $z_1 \neq z_2 \in \mathcal{Z}_P$ tel que $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$.
D'après la question précédente : $z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$.
Or par hypothèse, on n'a pas $z_1 = z_2$, donc il faut nécessairement $z_1 = -z_2$.
En regardant les valeurs numériques, il est impossible que l'on puisse avoir $z_1 = -z_2$.
Par conséquent, Φ est une application de $\mathcal{Z}_P$ sur $\mathcal{Z}_P$ injectif (c'est ce que l'on vient de montrer).

$$\boxed{\Phi \text{ établit une permutation de } \{A, B, C, D, E\}.}$$

(d) Compléter le cycle de permutations des racines par Φ (on pourra exploiter les approximations numériques :

$$E \xrightarrow{\Phi} D \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} E$$

On peut faire quelques calculs numériques approchés avec les valeurs données dans l'énoncé.
On constate que l'on a la succession de valeurs :

$$\boxed{E \xrightarrow{\Phi} D \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\Phi} C \xrightarrow{\Phi} A \xrightarrow{\Phi} E}$$

II.4. Fonctions polynomiales de 5 variables.
On considère trois fonctions polynomiale de 5 variables

— $f : (x_1, x_2, x_3, x_3, x_5) \mapsto x_1x_2x_3x_4x_5$,
— $g_1 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto x_1 + x_3 + x_4$,
— $g_2 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto -1 - x_2 - x_5$.

(a) Que vaut $f(A, B, C, D, E)$?

En exploitant le résultat numérique trouvé en II.1.(c) :

$$\boxed{f(A, B, C, D, E) = ABCDE = -1}$$

(b) Montrer que les fonctions g_1 et g_2 sont différentes, mais que $g_1(A,B,C,D,E) = g_2(A,B,C,D,E)$
Montrer que $g_1(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E)) = g_2(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E))$.

L'égalité de fonction signifie que les valeurs prises sont toujours identique.
Pour démontrer qu'il n'y a pas égalité, il suffit de trouver un argument qui conduit à des valeurs distinctes avec g_1 et g_2.
Ainsi : $g_1(1,0,0,0,0) = 1$ et $g_2(1,0,0,0,0) = -1$

$$\boxed{\text{Donc } g_1 \neq g_2.}$$

Puis, en exploitant le résultat numérique de II.1.(b) :

$$\boxed{g_1(A,B,C,D,E) = A+C+D = -1-B-E = g_2(A,B,C,D,E)}$$

Puis, avec la permutation Φ :

$$\begin{aligned} g_1(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E)) &= g_1(E,C,A,B,D) = E+A+B = -1-C-D = g_2(E,C,A,B,D) \\ &= g_2(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E)) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{g_1(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E)) = g_2(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E))}$$

(c) Un théorème d'Evariste Galois affirme que

si h_1 et h_2 sont deux fonctions polynomiales de cinq variables à coefficients entiers telles que
$h_1(A,B,C,D,E) = h_2(A,B,C,D,E)$, alors $h_1(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E)) = h_2(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E))$.

Supposons (pour une démonstration par l'absurde) alors que $E = 4C^2+2D^2$, montrer alors que $B = 4E^2+2C^2$. Conclure.

Considérons donc $h_1 : (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mapsto 4x_3 + 2x_4 - x_5$ et $h_2 : (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mapsto 0$.
On a donc $h_1(A,B,C,D,E) = 4C^2+2D^2-E = 0 = h_2(A,B,C,D,E)$, puisqu'on a supposé que $E = 4C^2+2D^2$.
D'après le théorème d'Evariste Galois,
on a alors $h_1(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D,\Phi(D),\Phi(E)) = h_2(\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(D),\Phi(E))$
c'est-à-dire : $h_1(E,C,A,B,D) = h_2(E,C,A,B,D)$
et encore $h_1(\Phi(E),\Phi(C),\Phi(A),\Phi(B),\Phi(D)) = h_2(\Phi(E),\Phi(C),\Phi(A),\Phi(B),\Phi(D))$, ce qui donne :

$$h_1(D,A,E,C,B) = 4E^2+2C^2-B = h_2(D,A,E,C,B) = 0$$

On a donc $B = 4E^2+2C^2$. Or $B<0$, cette égalité est donc impossible.

$$\boxed{\text{Nécessairement, on n'a pas } E = 4C^2+2D^2.}$$
