Devoir Surveillé n°10

Sujet donné le vendredi 6 juin 2025, 3h.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Attribution d'une valeur à des séries divergentes

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la somme infinie $1+2+\cdots+n+\cdots$ vaut $-\dfrac{1}{12}$. S'en est suivi tout un ensemble de recherches sur ce sujet...

L'objectif de ce problème est de présenter quelques situations où l'on attribue une valeur finie à « une somme infinie ». On s'intéresse en particulier au cas de la série de terme général n. Dans la première partie sont présentées deux situations qui dans les deux cas font apparaître la valeur $-\frac{1}{12}$, ce qui montre que cette valeur ne semble pas être fortuite. La troisième partie traite plus particulièrement de la façon dont Ramunajan a étudié les sommes infinies en s'appuyant sur la formule de Euler-Maclaurin. La valeur qu'il octroie à ces sommes étant en quelque sorte un terme de compensation entre une somme et une intégrale.

Notations

• On note, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor$ la partie entière de x. On rappelle qu'il s'agit de l'uniqe entier qui satisfait $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$.
On dira qu'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à support compact sans $\mathbb{R}^+$ lorsqu'il existe un réel $K\geqslant 0$ tel que pour tout $t\geqslant K$, $\varphi(t)=0$.

• (Définition) On dit qu'une application g est **intégrable sur un intervalle** $[a,b[\subset\mathbb{R}$ si
— pour tout $x\in[a,b[$, $|g|$ est intégrable sur $[a,x]$
— et, $x\mapsto\displaystyle\int_a^x|g(t)|\mathrm{d}t$ (qui est donc croissante) est majorée sur $[a,b[$

• (Propriété 1) Ainsi, si g est intégrable, $\displaystyle\int_a^x|g(t)|\mathrm{d}t$ admet une limite pour $x\to b^-$ que l'on note $\displaystyle\int_a^{\to b}|g(t)|\mathrm{d}t$.

• (Propriété 2) On **admet** que dans cette situation, si g est intégrable sur $[a,b[$ et est en outre continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ admet également une limite pour $x\to b^-$ notée $\displaystyle\int_a^{\to b}g(t)\mathrm{d}t$ et vérifiant $\displaystyle\left|\int_a^{\to b}g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^{\to b}g(t)\mathrm{d}t$.

La notion d'intégrabilité sera exploitée à partir des questions 2 de la partie III.

I . Première approche

On note, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}ne^{-nx}$.

I.1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

I.2. Montrer que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$.
On pourra exploiter la limite, pour $n\to+\infty$, de $n^2\times ne^{-nx}$, lorsque $x>0$.

I.3. Montrer que pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f(x)$ peut s'exprimer comme une fraction rationnelle en e^{-x} que l'on donnera.

I.4. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $(1-e^{-x})\times g(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

I.5. A l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c+o(1)$$

I.6. En déduire

$$\lim_{x\to0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}ne^{-nx}-\frac{1}{x^2}\right)$$

II Une seconde approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0)=1$.
Soit $K>0$ telle que φ soit nulle sur $[K,+\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\psi(t)=t\varphi(t)$.
On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K,+\infty[$.

II.1. Généralisation du théorème des sommes de Riemann.
Pour toute cette question, f désigne une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et x est un réel strictement positif.

(a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $a+nx \in]a,b]$.

(b) Montrer que pour tout $L \geqslant 0$, $\left|L-\lfloor \frac{L}{x}\rfloor x\right| \leqslant x$

(c) Montrer que

$$x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor} f(a+nx)-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor}\left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx)-f(t)\mathrm{d}t\right)-\int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

(d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor} f(a+nx)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

II.2. Un développement asymptotique lorsque $x \to 0$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$.

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\displaystyle R_{k,\ell}(x)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\left(\int_{nx}^{t}\frac{(t-s)^k}{k!}\psi^{(k+\ell)}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a,b\in I$.
Sans justification, préciser les valeurs des paramètres α et β de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^\alpha}{n!}f^{(\beta)}(t)\mathrm{d}t$$

(b) Déterminer $\displaystyle\int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t$ ainsi que $\displaystyle\int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t$

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor} nx\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)$ et de $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)$

(d) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, pour tout $t\geqslant 0$,

$$\psi^{(\ell)}(t)=\int_K^t\frac{(t-s)^k}{k!}\psi^{(\ell+k+1)}(s)\mathrm{d}s$$

(e) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^k}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi^{(\ell)}(t)\mathrm{d}t=0$.

(f) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{R_{k,\ell}(x)}{x^k}=0$

(g) Montrer que pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\left(\psi^{(\ell)}(t)-\psi^{(\ell)}(nx)\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}\frac{(t-nx)^k}{k!}\psi^{(k+\ell)}(nx)\mathrm{d}t\right)+R_{p,\ell+1}(x)$$

(h) En déduire que

$$\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)+\frac{x}{6}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)+\frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

(i) Montrer que $\displaystyle x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\left(\psi'(nx)-\psi'(t)\right)\mathrm{d}t-\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t$.

(j) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)-\frac{R_{1,2}(x)}{x}-\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t$.

(k) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t$.

(l) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx) = \frac{1}{x^2}\int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi(t)\mathrm{d}t.$

(m) En déduire qu'il existe un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx) = \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1).$

III Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

III.1. La formule d'Euler-Maclaurin.

On considère la famille de polynôme $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sorte que :

$$B_0 = 1 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ B_p' = pB_{p-1} \text{ avec } \int_0^1 B_p(x)\mathrm{d}x = 0$$

On admet dans ce problème l'existence et l'unicité des polynômes B_p (polynômes de Bernoulli).
On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, $b_p = B_p(0)$ et $\tilde{B}_p$, la fonction 1-périodique de sorte que $\tilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0,1[$.
Autrement écrit : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{B}_p(x) = B_p(x - \lfloor x \rfloor)$.
On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $r_{p,a} = \displaystyle\int_1^a \frac{\tilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t)\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer B_1 et B_2.

(b) Montrer que pour tout entier naturel p, $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, $b_p = B_p(1)$ et pour tout $p \geqslant 3$, impair, $b_p = 0$.
En déduire que pour $p \geqslant 2$, $\tilde{B}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ et n'est nécessairement PAS un polynôme.

(d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) + \cdots + f(n) = \displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}$.

(f) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n) - f^{(2\ell-1)}(1)\right) + r_{2p+1,n}$$

C'est la formule d'Euler-MacLaurin d'usage fréquent en analyse mathématique.

III.2. La constante de Ramanujan.

Pour les questions qui suivent, nous avons besoin de la notion de fonction intégrable définie en début de devoir.
On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{(2p+1)}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose, **sous réserve d'existence**,

$$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{\to+\infty} \tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \qquad C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \sum_{\ell=1}^{p} \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!} f^{(2\ell-1)}(1) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

(a) Montrer pour tout $p \geqslant q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p.

On note à présent $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k)$ la valeur de C_p, où $p \geqslant q$.

(b) Déterminer $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2$.
(On pourra commencer par chercher la valeur de q suffisante pour chacun de ces calculs).

(c) On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)$.

Qu'obtient-on si $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe ?

Correction du DS 10

I . Première approche

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$.

I.1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Avec $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^n$ converge si et seulement $q \in]-1,1[$,

ainsi avec $q = e^{-x}$, la série $\sum_n e^{-nx}$ converge ssi $e^{-x} \in]-1,1[\Longleftrightarrow x > 0$ (par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$).

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*}$$

I.2. Montrer que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$:

Avec $\alpha = 2$, $n^2 \times n e^{-nx} = n^3 \left(e^{-x}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée car $e^{-x} \in [0,1[$. Donc $n e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour $n \to +\infty$.

Par ailleurs, les suites $(n e^{-nx})$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sont à termes positifs

et enfin la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann). Ainsi, par comparaison, la série $\sum_n n e^{-nx}$ converge.

Pour $x \leqslant 0$:

$n e^{-nx} \geqslant n e^0 = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, la série $\sum_n n e^{-nx}$ diverge grossièrement (terme général qui ne tend pas vers 0).

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathcal{D}g = \mathbb{R}_+^*.}$$

I.3. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ peut s'exprimer comme une fraction rationnelle en e^{-x} que l'on donnera.

On applique la formule bien connue pour les sommes d'une série géométrique (de raison e^{-x}) convergente :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathcal{D}_f, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}}$$

I.4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1-e^{-x}) \times g(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^* = \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(1-e^{-x})\sum_{n=0}^{N} n e^{-nx} &= \sum_{n=0} n e^{-nx} - \sum_{n=0} n e^{-(n+1)x} = \sum_{n=0}^{N} n e^{-nx} - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1) e^{-nx} \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{N} (n-(n-1)) e^{-nx} + N e^{-(N+1)x} = \sum_{n=1}^{N} e^{-nx} + N e^{-(N+1)x}
\end{aligned}$$

On peut alors passer à la limite pour $N \to +\infty$ (tout converge ici) :

$$\boxed{(1-e^{-x}) g(x) = e^{-x} f(x) + 0 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}}$$

I.5. A l'aide de développements limités en 0, déterminer trois constantes réelles a, b et c telles qu'au voisinage de 0

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + o(1)$$

On travaille au voisinage de $x = 0$, donc $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
Donc au voisinage de $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} &\underset{x\to0}{=} \frac{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\left(1 - 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^2)\right)^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2))^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - x + \left(2 \times 1 \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + o(x^2)} \\
&\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x^2}(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 - x + \tfrac{7}{12}x^2 + o(x^2))^{-1} = \frac{1}{x^2}(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 + x + \tfrac{-7}{12}x^2 + x^2 + o(x)) \\
&\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x^2}(1 - x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 + x + \tfrac{5}{12}x^2 + o(x)) = \frac{1}{x^2}\left(1 + 0x + (\tfrac{5}{12} - 1 + \tfrac{1}{2})x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)
\end{aligned}$$

où on a exploité $(1+v)^{-1} = 1 - v + v^2 - v^3 \dots$

$$\boxed{\text{Ainsi, au voisinage de 0, } \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + o(1) \text{ avec } a = 1,\ b = 0 \text{ et } c = -\frac{1}{12}.}$$

I.6. En déduire

$$\lim_{x \to 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right)$$

On a pour tout $x > 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{12} + o(1)$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} - \frac{1}{x^2} \right)}$$

Cela conduit donc à penser *un peu rapidement*, en prenant $x \leftarrow 0$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n = -\frac{1}{12} \dots$

II Une seconde approche

On considère dans cette partie une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^+$ et telle que $\varphi(0) = 1$.
Soit $K > 0$ telle que φ soit nulle sur $[K, +\infty[$. On pose ψ la fonction telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$.
On peut alors observer que ψ ainsi que toutes ses dérivées sont nulles sur $[K, +\infty[$.

II.1. Généralisation du théorème des sommes de Riemann.
Pour toute cette question, f désigne une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et x est un réel strictement positif.

(a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $a + nx \in]a, b]$.

On a les équivalences :

$$a + nx \in]a, b] \Longleftrightarrow a < a + nx \leqslant b \Longleftrightarrow 0 < nx \leqslant b - a \Longleftrightarrow 0 < n \leqslant \frac{b-a}{x} \Longleftrightarrow 0 < n \leqslant \left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor$$

on a divisé par $x > 0$, donc cela ne change pas le sens de l'inégalité puis on a exploité le fait que n est un entier.

$$\boxed{\{n \in \mathbb{N} \mid a + nx \in]a, b]\} =]\!]0, \left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor]\!] = [\![1, \lfloor \frac{b-a}{n} \rfloor]\!] \text{ si } x < b - a}$$

(b) Montrer que pour tout $L \geqslant 0$, $\left| L - \lfloor \frac{L}{x} \rfloor x \right| \leqslant x$

Soit $L \geqslant 0$, alors $\dfrac{L}{x} - 1 < \lfloor \dfrac{L}{x} \rfloor \leqslant \dfrac{L}{x}$. En multipliant ces inégalités par $x > 0$: $L - x < \lfloor \dfrac{L}{x} \rfloor x \leqslant L$.

Puis : $x = L - (L - x) > L - \lfloor \dfrac{L}{x} \rfloor x \geqslant L - L = 0$. Comme le nombre est positif et que l'inégalité peut être élargie :

$$\boxed{\text{Pour tout } L \geqslant 0,\ \left| L - \lfloor \tfrac{L}{x} \rfloor x \right| \leqslant x.}$$

(c) Montrer que

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) - \int_{a + \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

On note $N = \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor$.
Par relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=1}^{N} f(a+nx) \big[t\big]_{a+(n-1)x}^{a+nx} - \int_a^{a+Nx} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} x f(a+nx) - \int_a^{a+Nx} f(t)\mathrm{d}t$$

Et donc

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t = x \sum_{n=1}^{N} f(a+nx) - \int_a^{a+Nx} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a+Nx}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t = x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$

(d) Montrer que $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Notons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, donc f et f' sont continues sur $[a,b]$.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe $M>0$ tel que $\forall\, u \in [a,b]$, $|f(u)| \leqslant M$.

D'après le théorème de Weierstrass, il existe $M'>0$ tel que $\forall\, u \in [a,b]$, $|f'(u)| \leqslant M$.

On a

$$\begin{aligned}\left| x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) - \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) \right| + \left| \int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t \right|\end{aligned}$$

- Soit $n \in [\![1,N]\!]$. Pour $t \in [a+(n-1)x, a+nx]$,

$$|f(t) - f(a+nx)| \leqslant \sup_{u\in[t,a+nx]} |f'(u)| \times |t-(a+nx)| \leqslant M'|(a+(n-1)x)-(a+nx)| = M'x$$

  Ainsi

$$\left| \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} M'x = M'Nx^2$$

  ensuite, puisque $Nx = \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor x \leqslant \frac{b-a}{x} x = b-a$, on a donc

$$\left| \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} \left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(a+nx) - f(t)\mathrm{d}t \right) \right| \leqslant M'(b-a)x$$

- Par ailleurs,

$$\left| \int_{a+Nx}^{b} f(t)\mathrm{d}t \right| = \int_{a+Nx}^{b} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant M(b-(a+Nx)) = M\left((b-a) - \lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor\right) \leqslant Mx$$

  d'après la question 1.(b) avec $L = b-a$.

Ainsi

$$\left| x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M'(b-a)x + Mx$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence par encadrement :

$$\boxed{x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) \text{ converge pour } x \to 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.}$$

II.2. Un développement asymptotique lorsque $x \to 0$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$.

Soit x un réel strictement positif.

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $R_{k,\ell}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+\ell)}(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a, b \in I$.
Sans justification, préciser les valeurs des paramètres α et β de la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^\alpha}{n!} f^{(\beta)}(t)\mathrm{d}t$$

C'est un résultat de cours, à savoir retrouver (dans l'énoncé au concours, il était donné) :

$$\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \text{ donc } \alpha = n, \beta = n+1.}$$

(b) Déterminer $\int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t$ ainsi que $\int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t$

Le théorème fondamental de l'analyse donne : $\displaystyle\int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t = [\psi(t)]_0^K = \psi(K) - \psi(0) = K \times \underbrace{\varphi(K)}_{=0} - 0\varphi(0) = 0.$

De même : $$\int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t = [\psi'(t)]_0^K = \psi'(K) - \psi'(0) = K \times \underbrace{\varphi(K)}_{=0} - 0\varphi(0) = 0$$

Or $\psi : x \mapsto x\varphi(x)$, donc $\psi'(x) = x\varphi'(x) + \varphi(x)$.
Et donc $\psi'(0) = \varphi(0) = 1$ (énoncé) et $\psi'(K) = K\varphi'(K) + \varphi(K) = 0$ (énoncé).

$$\boxed{\int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t = -1}$$

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n x\varphi(nx)$ ainsi que les valeurs de $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx)$ et de $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx)$

On applique la relation trouvée en 1.(d) avec $f \leftarrow \psi$, $a \leftarrow 0$ et $b \leftarrow K$.
il faut vérifier qu'on a bien les hypothèses adéquates : ψ est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
On trouve alors $\displaystyle x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x} \rfloor} f(a+nx) = x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi(nx) = x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n x\varphi(nx)$ dont on sait qu'elle tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n x\varphi(nx) = \int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t}$$

Avec la même méthode, mais avec $f \leftarrow \psi'$ puis $f \leftarrow \psi''$, on trouve

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) = \int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) = \int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t = -1}$$

(d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\psi^{(\ell)}(t) = \int_K^t \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(\ell+k+1)}(s)\mathrm{d}s$$

Soient $\ell, k \in \mathbb{N}$.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il en est de même de $\psi^{(\ell)}$, on peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à cette fonction en sommant jusqu'à l'ordre k avec $a \leftarrow K$ et $b \leftarrow t$:

$$\psi^{(\ell)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(t-K)^i}{i!} \psi^{(\ell+i)}(K) + \int_K^t \frac{(t-u)^k}{k!} \psi^{(\ell+k+1)}(u)\mathrm{d}u$$

Or, comme rappelé dans l'énoncé, $\psi^{(\ell+i)}(K) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc

$$\boxed{\psi^{(\ell)}(t) = \int_K^t \frac{(t-u)^k}{k!} \psi^{(\ell+k+1)}(u)\mathrm{d}u}$$

(e) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(\ell)}(t)\mathrm{d}t = 0.$

Soient $\ell, k \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \left[\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x, K\right]$.
D'après la question précédente, puisque $\psi^{(\ell+k+1)}$ est continue sur $\left[\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x, K\right]$:
Il existe $M^{\ell+k+1} = \sup_{u\in\left[\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x, K\right]} |\psi^{(\ell+k+1)}(u)|$ (il ne s'agit pas d'une puissance mais d'une notation).

$$\left|\psi^{(\ell)}(t)\right| \leqslant \int_t^K \frac{|t-u|^k}{k!} |\psi^{(\ell+k+1)}(u)|\mathrm{d}u \leqslant M^{\ell+k+1} \left[\frac{(u-t)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_t^K = \frac{M^{\ell+k+1}}{(k+1)!}(K-t)^{k+1}$$

(les bornes sont inversées pour les mettre dans l'ordre croissant).
Puis, comme $t \in \left[\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x, K\right]$, $|K-t| \leqslant \left|K - \lfloor \frac{K}{x} \rfloor x\right| \leqslant x$ d'après la question 1.(b).
Ainsi
$$\left|\frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(\ell)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \frac{M^{\ell+k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^k} \frac{M^{\ell+k+1}}{(k+1)!} x^{k+1} \left(K - \left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x\right) = \frac{M^{\ell+k+1}}{(k+1)!} x^2$$
Ainsi, d'après le théorème de convergence par encadrement :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}, \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^K \psi^{(\ell)}(t)\mathrm{d}t = 0.}$$

(f) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{R_{k,\ell}(x)}{x^k} = 0$.

On continue selon la même stratégie,

puisque $\psi^{(k+\ell)}$ est continue sur $[0, K]$ et admet toujours un majorant $M^{k+\ell}$ sur $[0, K]$, et donc sur $\mathbb{R}$ (nulle sur $[K, +\infty[$) :

$$\begin{aligned}
|R_{k,\ell}| &\leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left| \int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{k+\ell}(s) \mathrm{d}s \right| \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \underbrace{\int_{t}^{nx} \frac{|t-s|^k}{k!} M^{k+\ell} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t}_{t \leqslant s \leqslant nx} \\
&\leqslant M^{k+\ell} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{t}^{nx} \frac{(s-t)^k}{k!} \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = M^{k+\ell} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left[\frac{(s-t)^{k+1}}{(k+1)!} \right]_{s=t}^{s=nx} \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{M^{k+\ell}}{(k+1)!} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (nx-t)^{k+1} \mathrm{d}t = \frac{M^{k+\ell}}{(k+2)!} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left[-(nx-t)^{k+2} \right]_{(n-1)x}^{nx} \\
&\leqslant \frac{M^{k+\ell}}{(k+2)!} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} x^{k+2} = \frac{M^{k+\ell}}{(k+2)!} \left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x^{k+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{R_{k,\ell}(x)|}{x^k} \right| \leqslant \frac{M^{k+\ell}}{(k+2)!} \left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x^2 \leqslant \frac{M^{k+\ell}}{(k+2)!} K x$$

Et donc, par comparaison :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}, \lim_{x\to 0} \frac{R_{k,\ell}(x)}{x^k} = 0.}$$

(g) Montrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi^{(\ell)}(t) - \psi^{(\ell)}(nx) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k+\ell)}(nx) \mathrm{d}t \right) + R_{p,\ell+1}(x)$$

Soit $(\ell, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Soit $n \leqslant \lfloor \frac{K}{x} \rfloor$ puis $t \in [(n-1)x, nx]$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral pour $f \leftarrow \psi^{(\ell)}$, $b \leftarrow t$, $a \leftarrow nx$ et $n \leftarrow p$:

$$\psi^{(\ell)}(t) - \psi^{(\ell)}(nx) = \sum_{k=1}^{p} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(\ell+k)}(nx) + \int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(\ell+p+1)}(s) \mathrm{d}s$$

Puis, on intègre pour $t \in [(n-1)x, nx]$ (on peut intervertir somme et intégrale, la somme étant finie) :

$$\int_{(n-1)x}^{nx} \left(\psi^{(\ell)}(t) - \psi^{(\ell)}(nx) \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(\ell+k)}(nx) \mathrm{d}t + \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(\ell+p+1)}(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$$

Et enfin, en sommant pour n de 1 à $\lfloor \frac{K}{x} \rfloor$ (on intervertit les deux sommes finies, indépendantes) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\psi^{(\ell)}(t) - \psi^{(\ell)}(nx) \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(\ell+k)}(nx) \mathrm{d}t + \underbrace{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(\ell+p+1)}(s) \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t}_{=R_{p,\ell+1}(x)}}$$

(h) En déduire que

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx)) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) + \frac{x}{6} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}$$

Ainsi, en $\ell = 0$ et $p = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx)) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(k)}(nx) \mathrm{d}t \right) + R_{2,1}(x)$$

Pour $k = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^1}{1!} \psi^{(1)}(nx) \mathrm{d}t \right) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) \left[\frac{-(t-nx)^2}{2} \right]_{(n-1)x}^{nx} = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \frac{-(-x)^2}{2} \psi'(nx)$$

Pour $k=2$:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}\frac{(t-nx)^2}{2!}\psi^{(2)}(nx)\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)\left[\frac{-(t-nx)^3}{3!}\right]_{(n-1)x}^{nx}=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\frac{-(-x)^3}{3!}\psi''(nx)$$

Ainsi, en divisant tout par $x^2(\neq 0)$:

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)+\frac{x}{6}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)+\frac{R_{2,1}(x)}{x^2}}$$

(i) Montrer que $x\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\big(\psi'(nx)-\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t.$

On applique la réponse de la question 1.(d) pour $a\leftarrow 0$, $b\leftarrow K$ et $f\leftarrow\psi'$ (de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\int_0^K\psi'(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}\big(\psi'(nx)-\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t\right)-\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t$$

Et comme on a vu en question (b) que $\displaystyle\int_0^K\psi'(t)\mathrm{d}t=0$, on peut conclure :

$$\boxed{x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\big(\psi'(nx)-\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t}$$

(j) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)-\frac{R_{1,2}(x)}{x}-\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t.$

En reprenant le résultat précédent, après simplification par $x(>0)$:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)+\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\big(\psi'(nx)-\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral pour $f\leftarrow\psi'$, $a\leftarrow nx$, $b\leftarrow t$ et $n\leftarrow 1$:

$$\psi'(t)=\psi'(nx)+\frac{t-nx}{1}\psi''(nx)+\int_{nx}^{t}\frac{(t-s)}{1}\psi'''(s)\mathrm{d}s$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{(n-1)x}^{nx}\big(\psi'(nx)-\psi'(t)\big)\,\mathrm{d}t &= \psi''(nx)\int_{(n-1)x}^{nx}(nx-t)\mathrm{d}t-\int_{(n-1)x}^{nx}\int_{nx}^{t}(s-t)\psi^{(3)}(s)\mathrm{d}s\\ &= \psi''(nx)\left[\frac{-(nx-t)^2}{2}\right]_{(n-1)x}^{nx}-\int_{(n-1)x}^{nx}\int_{nx}^{t}(t-s)\psi^{(3)}(s)\mathrm{d}s\\ &= \frac{x^2}{2}\psi''(nx)-\int_{(n-1)x}^{nx}\int_{nx}^{t}(t-s)\psi^{(3)}(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Puis en sommant pour n de 1 à $\lfloor \frac{K}{x}\rfloor$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)+\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\frac{x^2}{2}\psi''(nt)-\int_{(n-1)x}^{nx}\int_{nx}^{t}(t-s)\psi^{(3)}(s)\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nt)-\frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\int_{nx}^{t}(t-s)\psi^{(3)}(s)\mathrm{d}s}_{=R_{1,2}(x)}\end{aligned}$$

On trouve donc le résultat attendu :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi'(nx)=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)-\frac{R_{1,2}(x)}{x}-\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t}$$

(k) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t$.

On fait la fusion des réponses précédentes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}\psi(t)-\psi(nx)\mathrm{d}t &= -\frac{x}{4}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)+\frac{x}{6}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)+\frac{R_{2,1}(x)}{x^2}+\frac{R_{1,2}(x)}{3x}+\frac{1}{2x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{x}{12}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)+\frac{R_{2,1}(x)}{x^2}+\frac{R_{1,2}(x)}{3x}+\frac{1}{2x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puis, d'après la question (c) : $\displaystyle x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi''(nx)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$;

la question (f) : $\displaystyle\frac{R_{2,1}(x)}{x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ et $\displaystyle\frac{R_{1,2}(x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$;

la question (e) ($k=1$ et $\ell=1$) : $\displaystyle\frac{1}{x}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi'(t)\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par addition, la limite existe et } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{12}}$$

(l) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}n\varphi(nx)=\frac{1}{x^2}\int_0^K\psi(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi(t)\mathrm{d}t$.

On exploite la réponse de la question 1.(c) pour $f\leftarrow\psi$, $a=0$, $b=K$:

$$x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor}f(a+nx)=x\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\psi(nx)=x^2\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}n\varphi(nx)$$

et cette somme est alors égale à

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor}\left(\int_{a+(n-1)x}^{a+nx}f(a+nx)-f(t)\mathrm{d}t\right)-\int_{a+\lfloor \frac{b-a}{x}\rfloor}^{b}f(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_0^K\psi(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}\psi(nx)-\psi(t)\mathrm{d}t\right)-\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}^{b}\psi(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En divisant par $x^2>0$, et en inversant le signe de l'intégrale au centre :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}n\varphi(nx)=\frac{1}{x^2}\int_0^K\psi(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}\left(\int_{(n-1)x}^{nx}(\psi(t)-\psi(nx))\,\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi(t)\mathrm{d}t}$$

(m) En déduire qu'il existe un réel $A\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\varphi(nx)=\frac{A}{x^2}-\frac{1}{12}+o(1)$.

On termine en exploitant de nouveau la question (e) : $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor x}^{K}\psi(t)\mathrm{d}t\underset{x\to 0}{\longleftarrow}0$ (avec $\ell=0$ et $k=2$),

On note alors $\displaystyle A=\int_0^K\psi(t)\mathrm{d}t$, on trouve alors avec la question précédente, pour $x\to 0$:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}n\varphi(nx)=\frac{A}{x^2}-\frac{1}{12}+o(1)+o(1)$$

Enfin, pour $n>\lfloor \frac{K}{x}\rfloor$ alors, puisque n est entier : $n\geqslant\left\lfloor\frac{K}{x}\right\rfloor+1>\frac{K}{x}$, donc $nx>K$.

Et donc pour $n>\lfloor \frac{K}{x}\rfloor$, $nx>K$ et donc $\varphi(nx)=0$.

Alors, pour tout $x>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\varphi(nx)=\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x}\rfloor}n\varphi(nx)$.

Et ainsi, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}n\varphi(nx)=\frac{A}{x^2}-\frac{1}{12}+o(1)\text{ où }A=\int_0^K\psi(t)\mathrm{d}t}$$

III Les sommes infinies au sens de Ramanujan

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

III.1. La formule d'Euler-Maclaurin.
On considère la famille de polynôme $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sorte que :

$$B_0 = 1 \text{ et pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ B_p' = pB_{p-1} \text{ avec } \int_0^1 B_p(x)\mathrm{d}x = 0$$

On admet dans ce problème l'existence et l'unicité des polynômes B_p (polynômes de Bernoulli).
On pose pour tout $p\in\mathbb{N}$, $b_p = B_p(0)$ et $\tilde{B}_p$, la fonction 1-périodique de sorte que $\tilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0,1[$.
Autrement écrit : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\tilde{B}_p(x) = B_p(x-\lfloor x\rfloor)$.
On pose pour tout $p\in\mathbb{N}$, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $r_{p,a} = \displaystyle\int_1^a \frac{\tilde{B}_p(t)}{p!} f^{(p)}(t)\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer B_1 et B_2.

$B_1' = 1B_0 = 1$. Donc il existe $b_1\in\mathbb{R}$ tel que $B_1 = X + b_1$.
Puis $0 = \displaystyle\int_0^1 B_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+b_1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + b_1 x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + b_1$. Donc $b_1 = -\frac{1}{2}$.
$B_2' = 2B_1 = 2X-1$. Donc il existe $b_2\in\mathbb{R}$ tel que $B_2 = X^2 - X + b_2$.
Puis $0 = \displaystyle\int_0^1 B_2(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x + b_2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + b_2 x\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + b_2$. Donc $b_2 = \frac{1}{6}$

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel p, $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$

Nous allons montrer le résultat par récurrence.
Posons, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p$: « $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$ ».

- $B_0 = 1$, donc $B_0(1-X) = 1 = B_0 = (-1)^0 B_0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $p\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
  Dérivons le polynôme $T = B_{p+1}\circ(1-X) - (-1)^{p+1}B_{p+1}$.

$$T' = -B_{p+1}'(1-X) - (-1)^{p+1}B_{p+1}'$$

  Or on sait que $B_{p+1}' = (p+1)B_p$, donc $T' = -(p+1)B_p(1-X) + (-1)^p(p+1)B_p = -(p+1)\times[B_p(1-X) - (-1)^p B_p] = 0$ d'après $\mathcal{P}_p$. Donc T est un polynôme constant, noté λ. Or, par linéarité de l'intégration :

$$\lambda = \int_0^1 \lambda\mathrm{d}x = \int_0^1 T(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 B_{p+1}(1-x)\mathrm{d}x - \int_0^1 B_{p+1}(x)\mathrm{d}x$$

  Mais $\displaystyle\int_0^1 B_{p+1}(x)\mathrm{d}x = 0$ et en posant $v = 1-x$ ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) : $\displaystyle\int_0^1 B_{p+1}(1-x)\mathrm{d}x = \int_1^0 B_{p+1}(v)(-\mathrm{d}v) = 0$
  Donc $\lambda = 0$, et $T = 0$ et ainsi $B_{p+1}\circ(1-X) = (-1)^{p+1}B_{p+1}$, donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

On a donc

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } p,\ B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X).}$$

Il est possible de faire sans récurrence, en démontrant que la famille des polynômes $(C_p)_p$ définie par :
$\forall\, p\in N$, $C_p = (-1)^p B_p(1-X)$
vérifie les mêmes relations que la famille (B_p) : $C_0 = 1$, et pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $C_p' = pC_{p-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 C_p(x)\mathrm{d}x = 0$.
Puis, d'exploiter l'unicité de cette famille de polynômes.

(c) Montrer que pour tout entier naturel $p\geqslant 2$, $b_p = B_p(1)$ et pour tout $p\geqslant 3$, impair, $b_p = 0$.
En déduire que pour $p\geqslant 2$, $\tilde{B}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ et n'est nécessairement PAS un polynôme.

Pour $p\geqslant 2$:

$$B_p(1) - B_p(0) = \int_0^1 B_p'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 pB_{p-1}(x)\mathrm{d}x = p\int_0^1 B_{p-1}(x)\mathrm{d}x = 0$$

d'après la relation fondamentale de définition de B_{p-1} car $p-1\in\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall\, p\in\mathbb{N}, p\geqslant 2 : \quad B_p(1) = B_p(0) = b_p}$$

Par ailleurs, si on applique la formule précédente en $x=1$: $b_p = B_p(0) = B_p(1-1) = B_p(1-x) = (-1)^p B_p(1) = (-1)^p b_p$.
Donc $(1-(-1)^p)b_p = 0$. Or si p est impair : $1-(-1)^p = 2\neq 0$, donc nécessairement

$$\boxed{\text{si } p \text{ est impair } (p\geqslant 2) : b_p = 0.}$$

Soit $p \geqslant 2$. La fonction $\tilde{B}_p$ vérifie en tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{B}_p(x) = B(x - \lfloor x \rfloor)$.

Et donc par composition, $\tilde{B}_p$ est continue en tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Par ailleurs, en $x \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon > 0$, $\tilde{B}_p(x+\epsilon) = B(\epsilon)$ et $\tilde{B}_p(x-\epsilon) = B_p(1-\epsilon)$.

Or comme $p \geqslant 2$, $B_p(0) = B_p(1) = \tilde{B}_p(x)$, $\tilde{B}_p$ est continue en x.

Si $\tilde{B}_p$ était un polynôme, alors $\tilde{B}_p - b_p$ serait également un polynôme,

il admettrait une infinité de racines sur $\mathbb{R}$: (au moins) tous les entiers relatifs, et donc $\tilde{B}_p - b_p = 0$.

$\tilde{B}_p$ serait le polynôme constant. Or B_p est de degré n (récurrence) donc non constant sur $[0,1]$, comme $\tilde{B}_p$

$$\boxed{\text{pour } p \geqslant 2,\ \tilde{B}_p \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et n'est nécessairement pas un polynôme.}}$$

(d) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t = \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_{p+1}(t)}{(p+1)!}f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [k, k+1[$, $\lfloor t \rfloor = k$, donc

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}B_p(t - \lfloor t \rfloor)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}B_p(t-k)\mathrm{d}t$$

Remarque :

Ici : ou bien $p = 0$ ou $p \geqslant 2$ et donc $\tilde{B}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$, et il n'est pas nécessaire d'exclure $k+1$,

ou bien $p = 1$, et dans ce cas, on supprime la valeur en 1 point

ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale en prenant $\tilde{B}(k+1) = B(1)$ plutôt que $B(0)$.

Puis on a fait le changement affine bijectif : $u = t - k$

$$\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{p!}\int_0^1 f^{(p)}(u+k)B_p(u)\mathrm{d}u$$

La fonction $g : u \mapsto f^{(p)}(u+k)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $g'(u) = f^{(p+1)}(u+k)$.

$h : u \mapsto \dfrac{1}{p+1}B_{p+1}(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (cf remarque) et $h'(u) = \dfrac{1}{p+1}B'_{p+1}(u) = \dfrac{p+1}{p+1}B_p(u) = B_p(u)$.

On peut appliquer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{p!}\int_0^1 g(u)h'(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{p!}\Big[g(u)h(u)\Big]_0^1 - \frac{1}{p+1}\int_0^1 g'(u)h(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{p!}\Big[g(u)h(u)\Big]_0^1 - \frac{1}{p!}\int_0^1 g'(u)h(u)\mathrm{d}u \\
&= \frac{f^{(p)}(k+1)B_{p+1}(1) - f^{(p)}(k)B_{p+1}(0)}{(p+1)\times p!} - \frac{1}{(p+1)\times p!}\int_0^1 f^{(p+1)}(u+k)B_{p+1}(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Et en faisant le changement de variable réciproque $x = u + k$ dans la dernière intégrale :

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t = \frac{f^{(p)}(k+1)B_{p+1}(1) - f^{(p)}(k)B_{p+1}(0)}{(p+1)!} - \frac{1}{(p+1)!}\int_k^{k+1} f^{(p+1)}(x)\tilde{B}_{p+1}(x)\mathrm{d}x}$$

(e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1) + \cdots + f(n) = \displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}$.

Sommons pour k de 1 à $n-1$ les expressions précédentes avec $p = 0$ afin de faire apparaitre $r_{1,n}$.

En effet, avec la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{\tilde{B}_0(t)}{1!}f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\tilde{B}_0(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\big(B_1(1)f(k+1) - B_1(0)f(k)\big) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\tilde{B}_1(t)}{1!}f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_0^n \frac{\tilde{B}_1(t)}{1!}f'(t)\mathrm{d}t \qquad \text{car } B_1(1) = \tfrac{1}{2} = -B_1(0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} f(k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - r_{1,n} = \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) - r_{1,n}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $B_0 = 1$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + f(1) + f(n) - \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + r_{1,n} = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n}}$$

(f) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1)+\cdots+f(n)=\int_1^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\sum_{\ell=1}^{p}\frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n)-f^{(2\ell-1)}(1)\right)+r_{2p+1,n}$$

C'est la formule d'Euler-MacLaurin d'usage fréquent en analyse mathématique.

Reprenons la formule trouvée en (d), en ajoutant le fait que pour $p \geqslant 1$, $B_{p+1}(1)=B_{p+1}(0)=b_{p+1}$;
donc pour $p \geqslant 1$:

$$\int_k^{k+1}\frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t-\int_k^{k+1}\frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!}\tilde{B}_{p+1}(t)\mathrm{d}t=\frac{[f^{(p)}(k+1)-f^{(p)}(k)]b_{p+1}}{(p+1)!}$$

Commençons par sommer pour k de 1 à $n-1$, d'après la relation de Chasles :

$$\int_1^n\frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t-\int_0^n\frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!}\tilde{B}_{p+1}(t)\mathrm{d}t=\frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\sum_{k=1}^{n-1}[f^{(p)}(k+1)-f^{(p)}(k)]=\frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\left(f^{(p)}(n)-f^{(p)}(1)\right)$$

où l'on a vu un premier télescopage.
Mais il y également un second télescopage pour la somme de $p=1$ jusqu'à $2s$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{2s}\left(\int_1^n\frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)\mathrm{d}t-\int_0^n\frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!}\tilde{B}_{p+1}(t)\mathrm{d}t\right) &= \int_1^n\left(\sum_{p=1}^{2s}\frac{f^{(p)}(t)}{p!}\tilde{B}_p(t)-\frac{f^{(p+1)}(t)}{(p+1)!}\tilde{B}_{p+1}(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_1^n\left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\tilde{B}_1(t)-\frac{f^{(2s+1)}(t)}{(2s+1)!}\tilde{B}_{2s+1}(t)\right)\mathrm{d}t=r_{1,n}-r_{2s+1,n}\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $s \geqslant 1$ (et même $s=0$) :

$$r_{1,n}=r_{2s+1,n}+\sum_{p=1}^{2s}\frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\left(f^{(p)}(n)-f^{(p)}(1)\right)$$

Enfin, comme on a vu que $b_{p+1}=0$ dès que $p+1$ est impair donc il ne reste dans la somme que les nombres $p=2\ell-1$ ($p+1$ est pair)
à condition que $2\ell-1 \in [\![1,2s]\!]$ i.e. pour ℓ de 1 à s.

$$r_{1,n}=r_{2s+1,n}+\sum_{\ell=1}^{s}\frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n)-f^{(2\ell-1)}(1)\right)$$

Enfin, en remplaçant $r_{1,n}$ par cette valeur dans le résultat de la question précédente :

$$\boxed{f(1)+\cdots+f(n)=\int_1^n f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\sum_{\ell=1}^{p}\frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n)-f^{(2\ell-1)}(1)\right)+r_{2p+1,n}}$$

III.2. La constante de Ramanujan.
Pour les questions qui suivent, nous avons besoin de la notion de fonction intégrable définie en début de devoir.
On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant q$, $f^{(2p+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $f^{(2p+1)}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pose, **sous réserve d'existence**,

$$C_0=\frac{f(1)}{2}-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^{\to+\infty}\tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

$$\forall\, p\in\mathbb{N}^*,\qquad C_p=\frac{f(1)}{2}-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\sum_{\ell=1}^{p}\frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}f^{(2\ell-1)}(1)+\int_1^{\to+\infty}\frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

(a) Montrer pour tout $p \geqslant q$ que C_p est bien définie et ne dépend pas de l'entier p.

Soit $p \geqslant q$. Compte-tenu de la question, on peut penser que cela signifie que $C_p=C_{p-1}=\cdots=C_q$ et ainsi le calcul s'arrête à l'ordre q.
• Montrons ce résultat, en commençant par montrer que C_p existe bien.
Tout d'abord $B_{2p+1}|_{[0,1]}$ est une application continue sur un segment (compact),
donc elle est majorée. On note $M_{2p+1}=\sup_{x\in[0,1]}|B_{2p+1}(x)|$. Alors :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\qquad |\tilde{B}_{2p+1}(t)|=|B_{2p+1}(t-\lfloor t\rfloor)|\leqslant M_{p+1}$$

Ainsi, pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\left|\frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\right|\leqslant\frac{M_{p+1}}{(2p+1)!}|f^{(2p+1)}(t)|$.

Donc pour tout $x>1$, $\int_1^x\left|\frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_1^x\frac{M_{p+1}}{(2p+1)!}|f^{(2p+1)}(t)|\mathrm{d}t,$

Et comme $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{M_{p+1}}{(2p+1)!}|f^{(2p+1)}(t)|\mathrm{d}t$ est croissante,

pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \left|\frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{\to+\infty} \frac{M_{p+1}}{(2p+1)!}|f^{(2p+1)}(t)|\mathrm{d}t$

Ainsi, l'application $t \mapsto \dfrac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)$ est intégrable et la propriété 2 admise dans l'énoncé permet d'affirmer :

$\displaystyle\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$ admet une limite pour $x \to +\infty$, notée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)$

$$\boxed{\forall\, p \geqslant q,\ C_p \text{ existe bien.}}$$

• Comparaison de C_p à C_{p+1}.

$$C_{p+1} - C_p = -\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(1) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Or d'après la formule d'Euler-MacLaurin : en p et $p+1$, pour tout n :

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(1)+f(n)}{2} = \sum_{\ell=1}^p \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n) - f^{(2\ell-1)}(1)\right) + r_{2p+1,n} = \sum_{\ell=1}^{p+1} \frac{b_{2\ell}}{(2\ell)!}\left(f^{(2\ell-1)}(n) - f^{(2\ell-1)}(1)\right) + r_{2p+3,n}$$

Donc en soustrayant les deux derniers termes :

$$\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(1) = \frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(n) + r_{2p+3,n} - r_{2p+1,n}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{p+1} - C_p = -\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(n) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n} - \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t + r_{2p+1,n}$$

Ce résultat est en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\epsilon > 0$.

— Par hypothèse, $f^{(2p+1)}(n) \to 0$, donc $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall\ n \geqslant N_1$, $\left|\dfrac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(n)\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{3}$.

— Nous avons vu que $t \mapsto \dfrac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)$ était intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
et par ailleurs, pour tout $x > n$,

$$\begin{aligned}\left|\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n}\right| &= \left|\int_n^x \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^x \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_n^{\to+\infty} \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t - \int_1^n \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ (la majoration est vraie pour tout x) :

$$\left|\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n}\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t - \int_1^n \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t$$

Enfin, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t = \int_1^{\to+\infty} \left|\frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\right|\mathrm{d}t$, par intégrabilité,

On en déduit, qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $\left|\displaystyle\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n}\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{3}$

— Pour exactement des raisons comparables :

il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_3$, $\left|\displaystyle\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+1,n}\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{3}$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N = \max(N_1, N_2, N_3)$,

$$\begin{aligned}|C_{p+1} - C_p| &= \left|-\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(n) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n} - \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t + r_{2p+1,n}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{b_{2p+2}}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(n)\right| + \left|\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+3,n}\right| + \left|\int_1^x \frac{\tilde{B}_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}f^{(2p+2)}(t)\mathrm{d}t - r_{2p+2,n}\right| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

La majoration globale ne dépend plus de n : pour tout $\epsilon > 0$, $|C_{p+1} - C_p| \leqslant \epsilon$, donc $C_{p+1} = C_p$

$$\boxed{(C_p)_{p\geqslant q} \text{ est constante, donc } \forall\ p \geqslant q, C_p = C_q}$$

On note à présent $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k)$ la valeur de C_p, où $p \geqslant q$.

(b) Déterminer $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1$ ainsi que $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k$ et $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2$.

Pour cette question, il nous faut trouver le q minimal pour chaque somme, afin de réduire le nombre de calcul.

- Cas de $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1$.

$f : t \mapsto 1$. Donc $f^{(2p+1)} = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc on peut considérer $q = 0$, directement.
On a alors

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1 = C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{\to+\infty} \tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \Big[t\Big]_0^1 + \int_1^{\to+\infty} 0\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$$

- Cas de $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k$.

$f : t \mapsto x$. Donc $f^{(2p+1)}(x) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et donc on peut considérer $q = 1$, directement.
On a alors

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k = C_1 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{b_2}{2!}f^{(1)}(1) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_3}{3!}(t)f^{(3)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{\frac{1}{6}}{2} \times 1 + \int_1^{\to+\infty} 0\mathrm{d}t = -\frac{1}{12}$$

(on a $b_2 = B_2(0)$, le calcul de B_2 a été fait en question III.1.(a).)

- Cas de $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2$.

$f : t \mapsto x^2$. Donc $f^{(3)} = 0$ et $f^{(2p+1)} = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc on peut considérer $q = 1$, directement.
On a alors

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1 = C_1 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{b_2}{2!}f^{(1)}(1) + \int_1^{\to+\infty} \frac{\tilde{B}_3}{3!}(t)f^{(3)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \frac{\frac{1}{6}}{2} \times 2 + \int_1^{\to+\infty} 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} 1 = \frac{-1}{2} \qquad \sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k = \frac{-1}{12} \qquad \sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} k^2 = 0}$$

(c) On suppose dans cette question que $q = 0$ et que la suite $(f(n))$ converge vers 0.
Montrer que $\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)$.
Qu'obtient-on si $\int_0^{\to+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe ?

Dans le cas où $q = 0$, on a directement avec $\tilde{B}_1 =$

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{\to+\infty} \tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

La formule d'Euler-McLaurin au rang $p = 0$ (question 1.(e)) donne :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + r_{1,n} = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(n)}{2} + r_{1,n}$$

Donc

$$\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t - \frac{f(n)}{2} - r_{1,n} + \int_1^{\to+\infty} \tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

Or pour les mêmes raisons qu'en question (a) :

$$\frac{f(n)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et } r_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{\to+\infty} \tilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)}$$

Et donc si $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite pour $n \to +\infty$, alors :

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} f(k) \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \sum_{k\geqslant 1}^{\mathcal{R}} f(k) + \int_0^{\to\infty} f(t)\mathrm{d}t}$$
