

CONCOURS BLANC

Sujet donné le lundi 16 juin 2025, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

EXERCICE - PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ (1h30 MAXIMUM)

Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}^d$ euclidien pour le produit scalaire canonique :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d), y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, la norme canonique associée.

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^d$ est convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad [x, y] := \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset A$$

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$, $\overline{B}(x, \eta) = \{u \in \mathbb{R}^d \mid \|u - x\| \leq \eta\}$, la boule fermée de centre x et de rayon η .

1. Soit C une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Pour cette question, on cherche à montrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

(a) On cherche dans cette question à montrer l'existence de y .

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \|x - z\|$.

i. Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$, $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \|z_1 - z_2\|$ (on dit que f est 1-lipschitzienne) et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

ii. Soit $Y \in C$, un vecteur quelconque. Montrer que $K = C \cap \overline{B}(x, \|x - Y\| + 1)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^d$.

iii. En déduire $\{\|x - z\|, z \in C\}$ admet une borne inférieure, atteinte en un certain $y \in C$.

(b) On cherche maintenant à montrer l'unicité de y .

i. Soient $y_1, y_2 \in C$. Justifier que $z = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$ puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 = \frac{1}{2} (4\|x - z\|^2 + \|y_2 - y_1\|^2).$$

ii. Montrer que si y_1 et $y_2 \in C$ vérifient $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$, alors $y_1 = y_2$.

On dit que l'unique vecteur $y \in C$ qui vérifie : $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ est le projeté de x sur C , noté $\text{proj}_C(x)$.

2. Montrer que $x = \text{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

3. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, montrer l'équivalence :

$$y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

Pour le sens direct, on pourra étudier le signe de $t \in [0, 1] \mapsto \|x - (tz + (1-t)y)\|^2 - \|x - y\|^2$.

4. Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2$$

et en déduire que proj_C est une application continue.

5. Déterminer explicitement proj_C dans les trois cas suivants :

$$(i) \ C = \mathbb{R}_+^d \quad (ii) \ C = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq 1\} \quad (iii) \ C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d y_i \leq 1\}$$

On pourra dessiner les convexes fermés C ci-dessus dans le cas $d = 2$ et conjecturer l'expression du projeté d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$ avant de prouver le résultat.

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa **structure euclidienne canonique** et de la **norme associée** $\|\cdot\|_2$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la notation $D((x, y), r)$ (respectivement $\overline{D}((x, y), r)$) désigne le **disque ouvert** de centre (x, y) et de rayon r (respectivement le **disque fermé** de centre (x, y) et de rayon r). En particulier la notation $D(O, 1)$ (respectivement $\overline{D}(O, 1)$ et $C(O, 1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le **cercle** de centre O et de rayon 1).
- On note Ω un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.
- Si f est une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$, $\partial_1 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ (respectivement $\partial_2 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$) est la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique. On dit que f est de classe C^2 sur Ω si f est de classe C^1 sur Ω avec $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ de classe C^1 sur Ω . Lorsque f est de classe C^2 sur Ω ,
 - $\partial_{1,1}^2 f$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (respectivement $\partial_{2,2}^2 f$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique,
 - $\partial_{2,1}^2 f$ ou $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ (respectivement $\partial_{1,2}^2 f$ ou $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable (respectivement par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable) dans la base canonique.
 On pourra utiliser le **théorème de Schwarz** qui établit que, lorsque f est de classe C^2 sur Ω ,

$$\partial_{2,1}^2 f = \partial_{1,2}^2 f \quad \text{sur } \Omega.$$

- Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert Ω , on rappelle que le **laplacien** de u est l'application

$$\Delta u = \partial_{1,1}^2 u + \partial_{2,2}^2 u$$

- Une application $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **harmonique** sur Ω si v est de classe C^2 sur Ω et vérifie

$$\Delta v(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

- On appelle **fonction polynomiale des deux variables x et y** sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus simplement polynôme de deux variables, ou encore polynôme quand il n'y a pas de confusion possible) toute application de la forme

$$P : (x, y) \mapsto \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j y^k$$

où n est un entier naturel fixé et les $(\alpha_{j,k})_{0 \leq j+k \leq n}$ sont des coefficients réels.

Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls ; son degré est par convention $-\infty$.

De plus, pour tout polynôme P non nul, le **degré** de P est l'entier naturel $\deg(P)$ défini par

$$\deg(P) = \max\{j+k \mid \alpha_{j,k} \neq 0, 0 \leq j+k \leq n\}$$

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à deux variables et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à m . On admettra dans tout le problème que $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\mathcal{P}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) en est un sous-espace vectoriel.

Enfin, un **polynôme est dit harmonique** s'il définit en plus une application harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Objectifs

Dans la partie I, on donne quelques propriétés simples des polynômes et des polynômes harmoniques.

La partie II étudie certaines applications harmoniques ; les résultats obtenus seront utilisés dans la partie III.

La partie III s'intéresse au problème de Dirichlet sur le disque unité.

I . Résultats préliminaires

I.1. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $P(x, y) = \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j y^k$ un polynôme de deux variables, tel que $P(x, y) = 0$ sur Ω .

- (a) i. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset \Omega$.
L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

ii. En considérant, pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, l'application $P_x : y \mapsto \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j \right) y^k$, montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j = 0$$

iii. En déduire que P est le polynôme nul.

(b) Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

I.2. Soit $m \in \mathbb{N}$.

(a) Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, est de dimension finie et montrer que sa dimension est $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

(b) Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

(c) Déterminer l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \mapsto x^2 + a + bx^2 + cy^2$ est un polynôme harmonique.

(d) i. Montrer que l'ensemble $\mathcal{PH}$ des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

ii. Justifier que la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$ induit un endomorphisme de $\mathcal{P}_m$ noté Δ_m .

iii. Pour tout $m \geq 2$, en étudiant le degré de $\Delta_m(P)$ lorsque $P \in \mathcal{P}_m$, montrer que $\dim(\ker(\Delta_m)) \geq 2m + 1$.

iv. Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{PH}$ des polynômes harmoniques ?

II . Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω . On définit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega_{x_0, y_0, \lambda} = \{\lambda(x, y) + (x_0, y_0) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

II.1. On prend $\Omega = D(O, 1)$ (uniquement dans cette question) l'intérieur du disque unité. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω , $\Omega_{-2, 0, 1}$ et $\Omega_{2, 1, 1/2}$.

II.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

(a) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application harmonique de classe C^2 telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^2 sur Ω . Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω .

(b) Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(c) Soit $g_{x_0, y_0, \lambda} : \Omega_{x_0, y_0, \lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ une application harmonique. Montrer que l'application $g : (x, y) \mapsto g_{x_0, y_0, \lambda}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$ est harmonique sur Ω .

II.3. (a) Montrer que les applications $h_1 : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ et $h_2 : (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$ sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Justifier que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ est un espace vectoriel et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il contient l'application

$$h : (x, y) \mapsto \frac{1 - ((x + \cos(t))^2 + (y + \sin(t))^2)}{x^2 + y^2}$$

II.4. **Un exemple fondamental**

Pour $(x, y) \in D(O, 1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x + iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$N(x, y, t) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2}$$

(a) Montrer, en utilisant la question II.2(c) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $N_t : (x, y) \mapsto N(x, y, t)$ est définie et harmonique sur $D(O, 1)$.

Dans la suite de cette partie, le couple (x, y) est fixé dans $D(O, 1)$.

(b) Montrer que $t \mapsto N(x, y, t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

(c) Soit $t \in [0, 2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β , indépendants de t et de z , tels que

$$N(x, y, t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

(d) i. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$. Montrer que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

ii. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N u^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

iii. Calculer explicitement $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ puis conclure en donnant la valeur de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}}$.

(e) En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1$.

III . Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(O, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur le cercle unité ce qui signifie que l'application $\widehat{f} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\overline{D}(0, 1)$, harmoniques sur $D(0, 1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(O, 1)$.

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f , consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

III.1. Exemples.

- (a) Déterminer presque sans calculs, dans chacun des cas suivants, une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à f .
 - i. $f(x, y) = xy$;
 - ii. $f(x, y) = x^4 - y^4$.
- (b) En utilisant le résultat de la question I.2(c), déterminer une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à $f(x, y) = x^2$.

On définit de plus, en reprenant les notations de la partie II, l'application

$$N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t)) dt \quad \text{sur } D(0, 1)$$

et l'application

$$u(x, y) = \begin{cases} N_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D(O, 1), \\ f(x, y) & \text{si } (x, y) \in C(O, 1), \end{cases} \quad \text{sur } \overline{D}(0, 1).$$

III.2. Étude de l'application N_f .

- (a) On admet (voir cours de seconde année sur les intégrales à paramètres) que N_f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(O, 1)$ et,

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \quad \partial_{i,j}^2 N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{i,j}^2 N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

En déduire que u est harmonique sur $D(O, 1)$.

- (b) Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0, 2\pi]$, $(x, y) \in D(O, 1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] \mid \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

- i. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

- ii. Montrer, en utilisant l'application f , l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La notation $\int_I \dots dt$ signifie $\int_a^b \dots dt$ si $I = [a, b]$ et $\int_a^b \dots dt + \int_c^d \dots dt$ si I est la réunion des segments disjoints $[a, b]$ et $[c, d]$.

- iii. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x, y, t)| \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

- iv. Déduire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- (c) Prouver que u est une application continue en tout point de $C(O, 1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

III.3. Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(O, 1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u_n \left| \begin{array}{ccc} \overline{D}(0, 1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & u(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

- (a) Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(O, 1)$.
 - i. En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ montrer que, dans ce cas, $\partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.
On admet que l'on prouve de même que $\partial_{2,2}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.
 - ii. En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(O, 1)$.
- (b) En déduire que, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u_n(x, y) \leq 1/n$.
- (c) Montrer que u est identiquement nulle sur $D(O, 1)$.

III.4. Prouver que, pour toute application continue $f : C(O, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

CONCOURS BLANC - Correction

EXERCICE - PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ (1h30 MAXIMUM)

Soit $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. On considère l'espace $\mathbb{R}^d$ euclidien pour le produit scalaire canonique :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d), y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, la norme canonique associée.

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^d$ est convexe si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad [x, y] := \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset A$$

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$, $\overline{B}(x, \eta) = \{u \in \mathbb{R}^d \mid \|u - x\| \leq \eta\}$, la boule fermée de centre x et de rayon η .

1. Soit C une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$.

Pour cette question, on cherche à montrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

(a) On cherche dans cette question à montrer l'existence de y .

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \|x - z\|$.

i. Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$, $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \|z_1 - z_2\|$. (on dit que f est 1-lipschitzienne) et en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

• D'après l'inégalité triangulaire sur la norme, pour tout $(z_1, z_2) \in (\mathbb{R}^d)^2$,

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \|x - z_1\| - \|x - z_2\| \right| \leq \|(x - z_1) - (x - z_2)\| = \|z_2 - z_1\| \quad \text{donc} \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leq \|z_1 - z_2\|$$

• f est alors continue en tout point $z_0 \in \mathbb{R}^d$ puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$: pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant $r = \varepsilon$,

$$\forall z \in B(z_0, r), \quad \|f(z) - f(z_0)\| \leq \|z - z_0\| < r = \varepsilon.$$

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

ii. Soit $Y \in C$, un vecteur quelconque. Montrer que $K = C \cap \overline{B}(x, \|x - Y\| + 1)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^d$.

— K est fermé en tant qu'intersection de fermés (une boule fermée est fermée et C est fermé par hypothèse).

— K est borné car toute boule est bornée ($\forall z \in B(a, r)$, $\|z\| = \|z - a + a\| \leq \|a\| + \|z - a\| \leq \|a\| + r$) donc l'intersection $C \cap \overline{B}(x, \|x - Y\| + 1)$ est a fortiori bornée.

donc K est un compact de $\mathbb{R}^d$.

iii. En déduire $\{\|x - z\|, z \in C\}$ admet une borne inférieure, atteinte en un certain $y \in C$.

• Montrons d'abord que $d = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ et $d' = \inf_{z \in K} \|x - z\|$ sont égaux (les bornes inf existent car on a des parties de $\mathbb{R}$ non vides (C est non vide par hypothèse et $Y \in K$) et minorées par 0) :

— $\forall z \in K$, comme $K \subset C$, $\|x - z\| \geq d$ donc par passage à la borne inf sur K , $d' \geq d$.

— Inversement, comme $Y \in C$ et $Y \in B_f(x, \|x - Y\| + 1)$, $Y \in K$ donc $d' \leq \|x - Y\|$. donc pour tout $z \in C$, soit $z \notin B_f(x, \|x - Y\| + 1)$ et $\|x - z\| > \|x - Y\| + 1 > d'$, soit $z \in B_f(x, \|x - Y\| + 1)$ et $\|x - z\| \geq d'$. Ainsi pour tout $z \in C$, $\|x - z\| \geq d'$ et par passage à la borne inf sur C , $d \geq d'$.

• On peut alors conclure en disant que la fonction f étant continue sur le compact K , elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier elle a un minimum/plus petit élément : il existe $y \in K (\subset C)$ tel que

$$f(y) = \|x - y\| = \min_{z \in K} f(z) = \inf_{z \in K} \|x - z\| = d' = d = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

(si un ensemble a un plus petit élément, c'est sa borne inf)

Ainsi, il existe $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|, z \in C\}$.

(b) On cherche maintenant à montrer l'unicité de y .

i. Soient $y_1, y_2 \in C$. Justifier que $z = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$ puis montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 = \frac{1}{2}(4\|x - z\|^2 + \|y_2 - y_1\|^2)$.

• Si $(y_1, y_2) \in C^2$, $z = \frac{y_1 + y_2}{2} \in C$ car c'est le milieu du segment $[y_1, y_2]$ qui est entièrement contenu dans C par convexité (appliquer la définition de $[y_1, y_2]$ pour $t = \frac{1}{2}$).

- En développant, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 &= \langle x - y_1, x - y_1 \rangle + \langle x - y_2, x - y_2 \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2\langle x, y_1 \rangle + \langle y_1, y_1 \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y_2 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle \\ &= 2\|x\|^2 - 2\langle x, y_1 \rangle - 2\langle x, y_2 \rangle + \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(4\|x - z\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2) &= \frac{1}{2}(4\langle x, x \rangle - 8\langle x, z \rangle + 4\langle z, z \rangle + \langle y_1, y_1 \rangle - 2\langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(4\langle x, x \rangle - 8\langle x, \frac{y_1 + y_2}{2} \rangle + 4\langle \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \rangle + \langle y_1, y_1 \rangle - 2\langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(4\|x\|^2 - 4\langle x, y_1 \rangle - 4\langle x, y_2 \rangle + \|y_1\|^2 + 2\langle y_1, y_2 \rangle + \|y_2\|^2 + \|y_1\|^2 - 2\langle y_1, y_2 \rangle + \|y_2\|^2) \\ &= 2\|x\|^2 - 2\langle x, y_1 \rangle - 2\langle x, y_2 \rangle + \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\end{aligned}$$

Ainsi, $z = \frac{y_1 + y_2}{2} \in C$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 = \frac{1}{2}(4\|x - z\|^2 + \|y_2 - y_1\|^2)$.

ii. Montrer que si y_1 et $y_2 \in C$ vérifient $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$, alors $y_1 = y_2$.

Soient y_1 et y_2 deux éléments de C tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Alors, avec la question précédente,

$$2d^2 = \frac{1}{2}(4\|x - z\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2) \text{ donc } d^2 = \|x - z\|^2 + \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2$$

Or, comme $z \in C$ d'après i), $\|x - z\|^2 \geq d^2$. Ainsi,

$$d^2 \geq d^2 + \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|^2 \text{ ce qui impose } \|y_1 - y_2\|^2 \leq 0 \text{ donc } y_1 = y_2.$$

Ainsi, il y a unicité de l'élément $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

On dit que l'unique vecteur $y \in C$ qui vérifie : $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ est le projeté de x sur C , noté $\text{proj}_C(x)$.

2. Montrer que $x = \text{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

- Si $x \in C$, $\inf_{z \in C} \|x - z\| = \min_{z \in C} \|x - z\| = 0$ car 0 appartient à l'ensemble des normes donc est son minimum et x est le seul élément $z \in C$ tel que $\|x - z\| = 0$ donc x est son propre projeté sur C .
- Inversement, si $x = \text{proj}_C(x)$, alors $x \in C$ car le projeté sur C est, par construction, un élément de C .

Ainsi, $x = \text{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

3. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, montrer l'équivalence :

$$y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$$

Pour le sens direct, on pourra étudier le signe de $t \in [0, 1] \mapsto \|x - (tz + (1 - t)y)\|^2 - \|x - y\|^2$.

- Supposons que $y \in C$ et pour tout $z \in C$, $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$,

$$\langle x - y, z - y \rangle = \langle x - y, z - x + x - y \rangle = \|x - y\|^2 + \langle x - y, z - x \rangle \leq 0$$

donc avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x - y\|^2 \leq \langle x - y, x - z \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|x - z\|$$

ce qui donne $\|x - y\| \leq \|x - z\|$ (même si $x = y$). Donc, comme $y \in C$, $\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$ et $y = \text{proj}_C(x)$.

- Inversement, soit y est le projeté de x sur C . Alors $y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$, tout $z \in C$, comme C est convexe, $(1 - t)y + tz \in C$ donc

$$\|x - ((1 - t)y + tz)\|^2 = \|x - y + t(y - z)\|^2 \geq d^2 = \|x - y\|^2$$

en développant et simplifiant, il vient

$$2t\langle x - y, y - z \rangle + t^2\|y - z\|^2 \geq 0$$

Si on avait $\langle x - y, y - z \rangle < 0$, pour t proche de 0^+ , la quantité de gauche serait équivalente à $t\langle x - y, y - z \rangle$ et serait donc négative ce qui est contradictoire donc $\langle x - y, y - z \rangle \geq 0$ i.e $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

Ainsi, $y = \text{proj}_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

4. Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2$$

et en déduire que proj_C est une application continue.

• En utilisant la question précédente avec $x = x_1$, $y = \text{proj}_C(x_1)$ et $z = \text{proj}_C(x_2)$, il vient

$$\langle x_1 - \text{proj}_C(x_1), \text{proj}_C(x_2) - \text{proj}_C(x_1) \rangle \leq 0$$

De même, avec $x = x_2$, $y = \text{proj}_C(x_2)$ et $z = \text{proj}_C(x_1)$,

$$\langle x_2 - \text{proj}_C(x_2), \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle \leq 0$$

En les ajoutant,

$$\langle x_1 - \text{proj}_C(x_1), \text{proj}_C(x_2) - \text{proj}_C(x_1) \rangle + \langle x_2 - \text{proj}_C(x_2), \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle \leq 0$$

ce qui, en regroupant par linéarité donne

$$\langle x_2 - \text{proj}_C(x_2) - x_1 + \text{proj}_C(x_1), \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle \leq 0$$

puis, par linéarité par rapport à la première variable,

$$\langle x_2 - x_1, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle + \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2 \leq 0$$

donc, en utilisant que $\langle x_2 - x_1, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle = -\langle x_1 - x_2, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle$,

$$\boxed{\langle x_1 - x_2, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle \geq \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2}$$

• Alors toujours avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x_1 - x_2, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle \leq |\langle x_1 - x_2, \text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2) \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|$$

d'où en reprenant l'inégalité précédente,

$$\|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|^2 \leq \|x_1 - x_2\| \|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\|$$

★ Si $\text{proj}_C(x_1) \neq \text{proj}_C(x_2)$, en simplifiant par $\|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\| > 0$, on obtient

$$\|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

★ Si $\text{proj}_C(x_1) = \text{proj}_C(x_2)$, l'inégalité ci-dessus reste vraie car le membre de gauche est nul tandis que celui de droite est toujours positif ou nul!

$$\boxed{\text{Ainsi, la projection sur } C \text{ est lipschitzienne donc continue sur } \mathbb{R}^d.}$$

5. Déterminer explicitement proj_C dans les trois cas suivants :

$$(i) C = \mathbb{R}_+^d \quad (ii) C = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq 1\} \quad (iii) C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d y_i \leq 1\}$$

On pourra dessiner les convexes fermés C ci-dessus dans le cas $d = 2$ et conjecturer l'expression du projeté d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$ avant de prouver le résultat.

• Supposons $C = [0, +\infty[^d$. Posons pour $x \in \mathbb{R}^d$, $y = (\max(x_i, 0))_{i \in [1, d]}$.

★ Par définition, $y \in C$ donc $\|x - y\| \in \{\|x - z\| \mid z \in C\}$.

★ De plus, pour tous $z \in C$ et $i \in [1, d]$, $|x_i - z_i| \geq |x_i - y_i|$ car

— soit $x_i \geq 0$ et $y_i = x_i$ donc $|x_i - z_i| \geq 0 = |x_i - y_i|$,

— soit $x_i < 0$ et comme $z_i \geq 0$, $x_i - z_i < 0$ donc $|x_i - z_i| = z_i - x_i \geq -x_i = |x_i| = |x_i - y_i|$ car $y_i = 0$.

Donc en sommant ces inégalités mises au carré (ce qui n'affecte pas leur sens car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$),

$$\|x - z\|^2 = \sum_{i=1}^d |x_i - z_i|^2 \geq \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2 = \|x - y\|^2$$

donc $\|x - y\|$ minore $\{\|x - z\| \mid z \in C\}$.

Par conséquent, $\|x - y\| = \min_{z \in C} \|x - z\|$ et donc $\boxed{\text{proj}_C(x) = y = (\max(x_i, 0))_{i \in [1, d]}}$.

• Supposons $C = \overline{B}(0_{\mathbb{R}^d}, 1)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

★ Si $x \in C$, $\text{proj}_C(x) = x$.

★ Sinon, prenons $y = \frac{x}{\|x\|}$. D'une part $y \in C$, — et d'autre part, on a, pour tout $z \in C$,

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \text{car} \quad \langle x - y, z \rangle \leq \langle x - y, y \rangle$$

En effet, par Cauchy-Schwarz, puisque $\|z\| \leq 1$ et $\|y\| = 1$,

$$\langle x - y, z \rangle \leq \|x - y\| \cdot \|z\| \leq \|x - y\| = \|x - y\| \cdot \|y\| = \langle x - y, y \rangle$$

car $x - y = (1 - \frac{1}{\|x\|})x$ et x sont positivement liés ($\|x\| > 1$ donc $1 - \frac{1}{\|x\|} > 0$).

Donc, par la caractérisation donnée par Q3, $\text{proj}_C(x) = y = \frac{x}{\|x\|}$.

Ainsi, si $\|x\| \leq 1$, $\text{proj}_C(x) = x$, sinon, $\text{proj}_C(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

• Supposons $C = \{z \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d z_i \leq 1\}$. On se persuade sur un dessin que pour $x \in \mathbb{R}^d$, si $x \notin C$, $y = \text{proj}_C(x)$ correspond

au projeté orthogonal de x sur l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^d z_i = 1$. Prenons $x \notin C$ et notons y son projeté orthogonal sur l'hyperplan dont un vecteur normal est $v = (1, \dots, 1)$. On sait qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x - y = tv$ donc pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $y_i = x_i - t$. De plus, y est dans l'hyperplan donc $\sum_{i=1}^d y_i = \sum_{i=1}^d x_i - dt = 1$ c'est-à-dire $t = \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^d x_i - 1)$. On en déduit alors l'expression de y

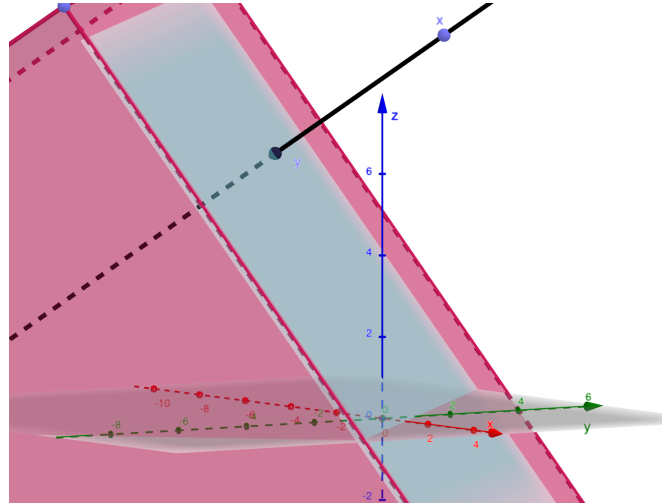
$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad y_i = x_i - \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^d x_i - 1)$$

Calculons alors pour $z \in C$,

$$\langle x - y, z - y \rangle = \langle tv, z - y \rangle = t \sum_{i=1}^d 1 \cdot (z_i - y_i) = t \left(\sum_{i=1}^d z_i - \sum_{i=1}^d y_i \right) = t \left(\sum_{i=1}^d z_i - 1 \right) \quad (\text{car } y \text{ est dans l'hyperplan})$$

or $t \geq 0$ (car $x \notin C$) et $\sum_{i=1}^d z_i \leq 1$ (car $z \in C$) donc $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$, ce qui par la caractérisation de la question 3, conclut.

Ainsi, si $\sum_{i=1}^d x_i \leq 1$, $\text{proj}_C(x) = x$ et sinon, $\text{proj}_C(x) = \left(x_i - \frac{1}{d}(\sum_{i=1}^d x_i - 1) \right)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$



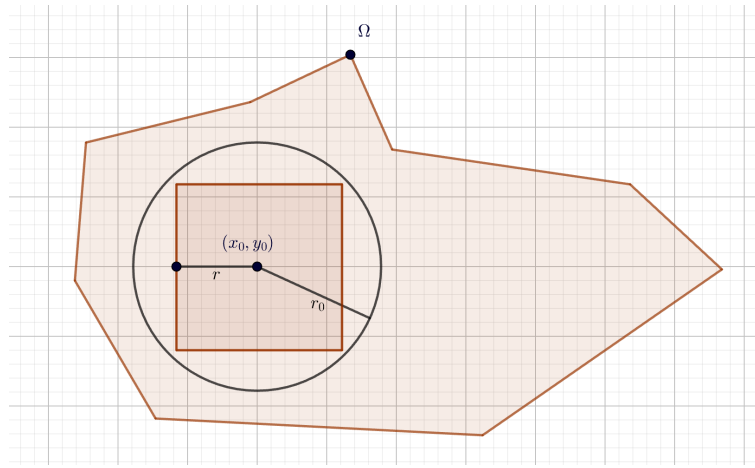
FONCTIONS HARMONIQUES ET PROBLÈME DE DIRICHLET

I . Résultats préliminaires

I.1. Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $P(x, y) = \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j y^k$ un polynôme de deux variables, tel que $P(x, y) = 0$ pour tout

$(x, y) \in \Omega$.

- (a) i. Soit $(x_0, y_0) \in \Omega$. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset \Omega$.
L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.



Comme Ω est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{B} = \overline{B}_2((x_0, y_0), r_0) \subset \Omega$. Il suffit donc de trouver $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset B$ (donc de faire rentrer un carré dans un disque). Un petit dessin dans le plan montre que pour un disque de rayon α , un carré de côté $\sqrt{2}\alpha$ convient donc $r = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$ convient. De manière plus analytique, pour ce r , si $(x, y) \in]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[$, $|x - x_0| < r$ et $|y - y_0| < r$ donc

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \sqrt{2}r = \sqrt{2}r = r_0$$

Donc $]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset \Omega$.

Ainsi, pour $r = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$, $]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[\subset \Omega$.

ii. En considérant, pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, l'application $P_x : y \mapsto \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j \right) y^k$, montrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j = 0$$

Soit $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. L'application P_x est une fonction polynomiale qui a une infinité de racines puisque pour tout $y \in]y_0 - r, y_0 + r[$, $P_x(y) = P(x, y) = 0$ (car on a $(x, y) \in \Omega$ d'après le i). Donc les coefficients de P_x sont nuls d'où

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j = 0$$

iii. En déduire que P est le polynôme nul.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \mapsto \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j+k \leq n}} \alpha_{j,k} x^j$ est une fonction polynomiale nulle sur tout l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ donc elle admet une infinité de racines donc tous les coefficients sont nuls si bien que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \mathbb{N} \text{ tel que } j + k \leq n, \alpha_{j,k} = 0$$

Ainsi, P est le polynôme nul.

(b) Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

Le résultat est faux si Ω n'est pas ouvert. Par exemple, $(x, y) \rightarrow x$ est une fonction polynomiale de deux variables qui s'annule sur tout $\Omega = \{0\} \times \mathbb{R}$ mais n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}^2$.

Le résultat est faux si Ω n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

I.2. Soit $m \in \mathbb{N}$.

(a) Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, est de dimension finie et montrer que sa dimension est $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Considérons la famille $((x, y) \rightarrow x^i y^j)_{(i,j) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2, i+j \leq m}$.

Elle est clairement génératrice de $\mathcal{P}_m$ par définition de cet ensemble.

Elle est aussi libre en utilisant la question I.1 avec $\Omega = \mathbb{R}^2$ donc c'est une base de $\mathcal{P}_m$ (base canonique).

$$\dim \mathcal{P}_m = \text{Card} \left\{ (i, j) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2, i + j \leq m \right\} = \text{Card} \bigcup_{k=0}^m \left\{ (i, k-i) \mid i \in \llbracket 0, k \rrbracket \right\} = \sum_{k=0}^m (k+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P}_m \text{ est de dimension finie et } \dim \mathcal{P}_m = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

(b) Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

★ $P_1 : (x, y) \rightarrow x$ est clairement un polynôme harmonique de degré 1 (les dérivées partielles d'ordre 2 sont nulles donc $\Delta P_1 = 0$).

★ $P_2 : (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$ est un polynôme harmonique de degré 2 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta(P_2)(x, y) = \partial_{1,1}^2 P_2(x, y) + \partial_{2,2}^2 P_2(x, y) = \partial_1((x, y) \mapsto 2x)(x, y) - \partial_2((x, y) \mapsto 2y)(x, y) = 2 - 2 = 0$$

$$\text{Ainsi, } x \text{ et } x^2 - y^2 \text{ sont des polynômes harmoniques de degrés 1 et 2 respectivement.}$$

(c) Déterminer l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y) \mapsto x^2 + a + bx^2 + cy^2$ est un polynôme harmonique.

$$\begin{aligned} (x, y) \mapsto x^2 + a + bx^2 + cy^2 \in \mathcal{PH} &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + a + bx^2 + cy^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + a + bx^2 + cy^2) = 0 \\ &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x + 2bx) + \frac{\partial}{\partial y}(2cy) = 0 \\ &\iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 + 2b + 2c = 0 \\ &\iff c = -(1 + b) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } (x, y) \mapsto x^2 + a + bx^2 + cy^2 \in \mathcal{PH} \iff (a, b, c) \in \{(s, t, -(1+t)) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(d) i. Montrer que l'ensemble $\mathcal{PH}$ des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

Le laplacien Δ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$ par linéarité des dérivées partielles

$$\text{donc son noyau, } \mathcal{PH} = \ker \Delta, \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{P}.$$

ii. Justifier que la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$ induit un endomorphisme de $\mathcal{P}_m$ noté Δ_m .

• Les dérivées partielles par rapport aux deux variables d'un polynôme de degré d est un polynôme de degré $\leq d-1$ car, par exemple,

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \partial_1 x^i y^j = \begin{cases} ix^{i-1} y^j & (\text{de degré } i+j-1) \text{ si } i > 0 \\ 0 & (\text{de degré } -\infty) \text{ si } i = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \partial_2 x^i y^j = \begin{cases} jx^i y^{j-1} & (\text{de degré } i+j-1) \text{ si } j > 0 \\ 0 & (\text{de degré } -\infty) \text{ si } j = 0 \end{cases}$$

• Donc par linéarité $\deg(\partial_1 P) \leq \deg P - 1$ et en l'appliquant deux fois pour chacune des deux variables, $\deg \Delta(P) \leq \deg P - 2$.

Par conséquent, $\Delta(\mathcal{P}_m) \subset \mathcal{P}_m$.

$$\text{Ainsi, } \Delta \text{ stabilise le sous-espace } \mathcal{P}_m \text{ donc sa restriction à } \mathcal{P}_m \text{ induit un endomorphisme de } \mathcal{P}_m.$$

iii. Pour tout $m \geq 2$, en étudiant le degré de $\Delta_m(P)$ lorsque $P \in \mathcal{P}_m$, montrer que $\dim(\ker(\Delta_m)) \geq 2m+1$.

En particulier pour $m \geq 2$, d'après l'estimation du degré de $\Delta(P)$ faite dans le calcul précédent, on a $\Delta_m(\mathcal{P}_m) \subset \mathcal{P}_{m-2}$ donc $\text{rg} \Delta_m \leq \dim \mathcal{P}_{m-2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Le théorème du rang donne alors

$$\dim \ker \Delta_m = \dim \mathcal{P}_m - \text{rg} \Delta_m \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{4m+2}{2} = 2m+1$$

$$\text{Pour tout } m \geq 2, \dim(\ker(\Delta_m)) \geq 2m+1.$$

iv. Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{PH}$ des polynômes harmoniques ?

Comme $\ker \Delta_m \subset \ker \Delta = \mathcal{PH}$, $\mathcal{PH}$ contient des sous-espaces vectoriels de dimension aussi grande qu'on veut donc est de dimension infinie.

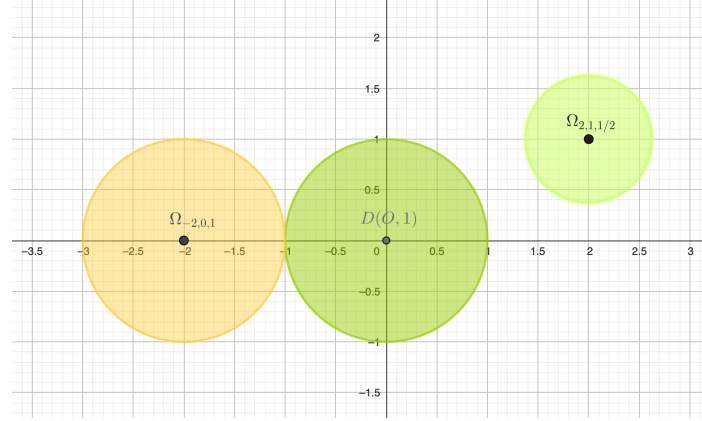
$$\text{Ainsi, } \mathcal{PH} \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension infinie.}$$

II . Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω . On définit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Omega_{x_0, y_0, \lambda} = \{\lambda(x, y) + (x_0, y_0) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

II.1. On prend $\Omega = D(O, 1)$ (uniquement dans cette question) l'intérieur du disque unité. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω , $\Omega_{-2, 0, 1}$ et $\Omega_{2, 1, 1/2}$.



II.2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

(a) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application harmonique de classe C^2 telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe C^2 sur Ω . Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω .

Ce résultat repose sur le lemme de Schwarz qui permet d'intervertir l'ordre des dérivations sur les fonctions de l'espace $E = C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:

$$\Delta(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_1(\partial_1 f)) + \partial_2(\partial_2(\partial_1 f)) = \partial_1(\partial_1(\partial_1 f)) + \partial_1(\partial_2(\partial_2 f)) = \partial_1(\partial_1^2 f) + \partial_1(\partial_2^2 f) = \partial_1(\Delta f) = \partial_1(0) = 0$$

Plus en détails, le lemme de Schwarz appliqué à f de classe C^2 donne

$$\partial_2(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_2 f)$$

donc en dérivant les deux membres par rapport à la seconde variable,

$$\partial_{2,2}^2(\partial_1 f) = \partial_2(\partial_1(\partial_2 f))$$

or le lemme de Schwarz appliqué à $\partial_2 f$ (autorisé car cette fonction est de classe C^2) donne $\partial_2(\partial_1(\partial_2 f)) = \partial_1(\partial_2(\partial_2 f)) = \partial_1(\partial_2^2 f)$ d'où $\partial_{2,2}^2(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_2^2 f)$ si bien que

$$\Delta(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_1(\partial_1 f)) + \partial_2^2(\partial_1 f) = \partial_1(\partial_1^2 f) + \partial_1(\partial_2^2 f) = \partial_1(\Delta f) = \partial_1(0) = 0$$

donc $\partial_1 f$ est harmonique.

On procède de même pour établir que $\partial_2 f$ est harmonique.

Les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω .

(b) Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Notons $\widehat{\Omega} = \Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ et ϕ l'application qui à (x, y) associe $(\lambda x + x_0, \lambda y + y_0)$ pour $\lambda \neq 0$.

• En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $(x, y) := x + iy$, en posant $z_0 = x_0 + iy_0$, l'application ϕ est $\begin{vmatrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z + z_0 \end{vmatrix}$, il s'agit de la composée $t_{z_0} \circ h_\lambda$ où t_{z_0} est la translation de vecteur z_0 et h_λ l'homothétie de rapport λ et de centre l'origine.

Ainsi, $\Omega_{x_0, y_0, \lambda} = \pi(\Omega)$ est l'image de Ω par $t_{z_0} \circ h_\lambda$.

• L'image d'une boule par ϕ est encore une boule car on a

$$z \in B(a, r) \iff \|a - z\| < r \iff \underbrace{\left\| (\lambda a + (x_0, y_0)) - (\lambda z + (x_0, y_0)) \right\|}_{\times |\lambda|} < |\lambda| r \iff \phi(z) \in B(\phi(a), |\lambda| r)$$

Ainsi, $\phi(B(a, r)) = B(\phi(a), |\lambda|r) = B'$: l'inclusion directe est évidente et inversement, si $z' \in B'$, comme ϕ est facilement bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il existe $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $z' = \phi(z)$ et donc $z' \in \phi(B(a, r))$ car $z \in B(a, r)$ d'après le sens retour de l'équivalence.

• Alors, si on prend $a' \in \widehat{\Omega}$, en considérant a son antécédent par ϕ , comme il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ car Ω est ouvert, $\phi(B(a, r)) = B(a', |\lambda|r) \subset \widehat{\Omega}$.

Ainsi, $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(c) Soit $g_{x_0, y_0, \lambda} : \Omega_{x_0, y_0, \lambda} \mapsto \mathbb{R}$ une application harmonique. Montrer que l'application $g : (x, y) \mapsto g_{x_0, y_0, \lambda}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$ est harmonique sur Ω .

• En reprenant les notations ci-dessus, $g = g_{x_0, y_0, \lambda} \circ \phi$ donc ϕ étant trivialement de classe $\mathcal{C}^2$ car ses applications coordonnées sont toutes les deux des polynômes en (x, y) , g est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition.

• De plus, pour tout $(x, y) \in \widehat{\Omega}$, par la règle de la chaîne, comme $g(x, y) = g_{x_0, y_0, \lambda}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial x}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0)) + 0 \cdot \frac{\partial g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial y}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0)) = \lambda \frac{\partial g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial x}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \lambda \left(\lambda \frac{\partial^2 g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial x^2}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0)) + 0 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial y} \right) \right)(\lambda(x, y) + (x_0, y_0)) \right) = \lambda^2 \frac{\partial^2 g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial x^2}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$$

De même,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \lambda^2 \frac{\partial^2 g_{x_0, y_0, \lambda}}{\partial y^2}(\lambda(x, y) + (x_0, y_0))$$

Donc $\Delta(g)(x, y) = \lambda^2 \Delta(g_{x_0, y_0, \lambda})(\phi(x, y)) = \lambda^2 \cdot 0 = 0$ car $g_{x_0, y_0, \lambda}$ est harmonique.

Ainsi, g est harmonique sur Ω .

II.3. (a) Montrer que les applications

$$h_1 : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad h_2 : (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$$

sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

★ Les fonctions proposées sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par composée, quotient, etc de fonctions $\mathcal{C}^2$.

★ On calcule, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Donc } \Delta(h_1)(x, y) = \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

★ D'après II.2(a), $h_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial h_1}{\partial x}$ est aussi harmonique.

Ainsi, h_1 et h_2 sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Justifier que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ est un espace vectoriel et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il contient l'application

$$h : (x, y) \mapsto \frac{1 - ((x + \cos(t))^2 + (y + \sin(t))^2)}{x^2 + y^2}$$

• $E = \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ est un espace vectoriel par linéarité des opérateurs de dérivées partielles et donc du laplacien ($E = \ker \Delta$).

• On a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$h(x, y) = \frac{1 - (x^2 + 2x \cos t + \cos^2 t + y^2 + 2y \sin t + \sin^2 t)}{x^2 + y^2} = \frac{-x^2 - y^2 - 2x \cos t - 2y \sin t}{x^2 + y^2} = -1 - 2 \cos t \frac{x}{x^2 + y^2} - 2 \sin t \frac{y}{x^2 + y^2}$$

On a vu que $(x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$ appartient à E , il en est de même pour $(x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$ et pour la fonction constante de valeur -1 donc, comme E est un espace vectoriel, $h \in E$.

Ainsi $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ est un espace vectoriel et h lui appartient pour tout $t \in \mathbb{R}$.

II.4. Un exemple fondamental

Pour $(x, y) \in D(O, 1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x + iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$N(x, y, t) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2}$$

- (a) Montrer, en utilisant la question II.2(c) que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$N_t : (x, y) \mapsto N(x, y, t)$$

est définie et harmonique sur $D(O, 1)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Posons } \phi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - \cos t, y - \sin t) = (x, y) - (\cos t, \sin t) \end{array} \right. \simeq \mathbb{C} = z - e^{it}$$

• Alors $N_t = h \circ \phi$ est bien définie sur $D(O, 1)$ car $\widehat{D(O, 1)} = \phi(D(O, 1)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ puisque (x, y) étant de norme < 1 , il ne peut être sur le cercle unité donc $\phi(x, y) = |z - e^{it}| \neq 0$.

• D'après la question II.2(b) appliquée pour $(\Omega, x_0, y_0, \lambda) \leftarrow (D(O, 1), -\cos t, -\sin t, 1)$, $\widehat{D(O, 1)} = \phi(D(O, 1))$ est un ouvert. Sachant que h est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d'après la question II.3(b), alors sa restriction à l'ouvert $\widehat{D(O, 1)}$ (qui est inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d'après le point précédent) est harmonique sur $\widehat{D(O, 1)}$.

La question II.2(c) appliquée pour $(\Omega, x_0, y_0, \lambda) \leftarrow (D(O, 1), \cos t, \sin t, 1)$, $g_{x_0, y_0, \lambda} \leftarrow h$ (autorisé car h est harmonique sur $\widehat{D(O, 1)}$ qui joue le rôle de $\Omega_{x_0, y_0, \lambda}$), on obtient que $N_t = h \circ \phi$ est harmonique sur $D(O, 1)$.

Ainsi, pour tout t réel, N_t est définie et harmonique sur $D(O, 1)$.

Dans la suite de cette partie, le couple (x, y) est fixé dans $D(O, 1)$.

- (b) Montrer que $t \mapsto N(x, y, t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

x et y sont fixés dans $D(O, 1)$ donc $N(x, y, t)$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ d'après la question précédente.

De plus, $t \mapsto N(x, y, t)$ est le quotient de deux fonctions continues en la variable t , le dénominateur ne s'annulant pas,

donc $t \mapsto N(x, y, t)$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

- (c) Soit $t \in [0, 2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β , indépendants de t et de z , tels que

$$N(x, y, t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

On a, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, en réduisant au même dénominateur,

$$\begin{aligned} -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}} &= \frac{-(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it}) + \alpha(1 - \bar{z}e^{it}) + \beta(1 - ze^{-it})}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} \\ &= \frac{-1 - z\bar{z} + ze^{-it} + \bar{z}e^{it} + \alpha(1 - \bar{z}e^{it}) + \beta(1 - ze^{-it})}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} \\ &= \frac{1 - |z|^2 + (ze^{-it} - 1) + (\bar{z}e^{it} - 1) + \alpha(1 - \bar{z}e^{it}) + \beta(1 - ze^{-it})}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} \\ &= \frac{1 - |z|^2 + (\alpha - 1)(1 - \bar{z}e^{it}) + (\beta - 1)(1 - ze^{-it})}{(1 - ze^{-it})(1 - \bar{z}e^{it})} \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = \beta = 1$, on a exactement la formule voulue.

Ainsi, pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, $N(x, y, t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}$.

- (d) i. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$. Montrer que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

Soit $u \in \mathbb{C}$ de module < 1 . En reconnaissant la suite géométrique de raison $ue^{it} \neq 1$ car $|ue^{it}| = |u| < 1$, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right| = \left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \frac{1 - (ue^{it})^{N+1}}{1 - ue^{it}} \right| = \left| \frac{u^{N+1} e^{i(N+1)t}}{1 - ue^{it}} \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{|1 - ue^{it}|} \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

car $|1 - ue^{it}| \geq 1 - |ue^{it}| = 1 - |u|$ par inégalité triangulaire.

Ainsi, $\forall t \in [0, 2\pi], \forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$.

ii. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N u^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N u^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right) dt \right| \quad (\text{linéarité de } \int) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{1 - ue^{it}} - \sum_{k=0}^N u^k e^{ikt} \right| dt \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|} dt \quad (\text{inégalité précédente}) \\ &\leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall N \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N u^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}.}$$

iii. Calculer explicitement $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ puis conclure en donnant la valeur de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}}$.

On a facilement en fonction de k

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2k\pi} - e^{i0}}{ik} = 0 \text{ si } k \neq 0, \\ \left[1 \right]_0^{2\pi} = 2\pi \text{ si } k = 0, \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 2\pi \delta_{k,0}.}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N u^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} u^0 \cdot 2\pi = 1$$

On a donc, en reprenant la majoration de la question II.4((d))ii,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - 1 \right| \leq \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|}$$

si bien qu'en faisant tendre N vers $+\infty$, comme $|u| < 1$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|u|^{N+1}}{1 - |u|} = 0$ donc le théorème de passage à la limite dans

une inégalité permet de conclure, puisque le membre de droite est constant, que $\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} - 1 \right| \leq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ue^{it}} = 1.}$$

(e) En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1$.

En reprenant la décomposition de la question II.4(c), avec $z = x + iy$ qui est de module < 1 comme $\bar{z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-1 + \frac{1}{1 - ze^{-it}} + \frac{1}{1 - \bar{z}e^{it}} \right) dt = -1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ze^{-it}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}}$$

or la formule prouvée en II.4((d))iii donne pour $u \leftarrow \bar{z}$ (autorisé car $|\bar{z}| = |z| < 1$) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}} = 1$, et en remarquant qu'on obtient une formule identique à celle prouvée en II.4((d))iii avec $-t$ à la place de t par la même démonstration, on a également $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ze^{-it}} = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1.}$$

Remarque : un autre argument pour le calcul de $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ze^{-it}}$ sachant que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}}$ consiste à rappeler que, le conjugué de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est égal à l'intégrale du conjugué de la fonction :

$$\overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - ze^{-it}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\frac{dt}{1 - ze^{-it}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}} \quad \text{donc } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \bar{z}e^{it}} = \bar{1} = 1$$

III . Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(O, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur le cercle unité ce qui signifie que l'application $\widehat{f} \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\overline{D}(0, 1)$, harmoniques sur $D(0, 1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(O, 1)$.

Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f , consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

III.1. Exemples.

- (a) Déterminer presque sans calculs, dans chacun des cas suivants, une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à f .

- i. $f(x, y) = xy$;
- ii. $f(x, y) = x^4 - y^4$.

- i. Si $f(x, y) = xy$, alors f est de classe C^2 sur le disque unité ouvert (car c'est une fonction polynomiale) et, de plus,

$$\Delta(f)(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xy) = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 + 0$$

donc c'est une fonction polynomiale harmonique,

donc cette fonction $(x, y) \mapsto xy$ est elle-même une solution du problème de Dirichlet sur le disque unité.

- ii. Si $f(x, y) = x^4 - y^4$, alors $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ donc f est la fonction nulle en restriction au cercle unité.

Une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à f est donc un polynôme harmonique qui s'annule sur le cercle unité, or justement, $x^2 + y^2$ est un polynôme harmonique qui est constant égal à 1 sur $C(O, 1)$, donc $x^2 + y^2 - 1$ est un polynôme harmonique qui coïncide avec f sur le cercle unité,

donc la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est une solution du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à f .

- (b) En utilisant le résultat de la question I.2(c), déterminer une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à $f(x, y) = x^2$.

D'après le résultat de la question I.2(c), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto x^2 + a + bx^2 - (1 + b)y^2 \in \mathcal{PH}$$

donc ce sera une solution du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à $f(x, y) = x^2$ si elle coïncide avec $(x, y) \mapsto x^2$ sur le cercle unité, c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = x^2 + a + bx^2 - (1 + b)y^2 \quad (\star)$$

Or, sous la condition $x^2 + y^2 = 1$,

$$x^2 = x^2 + a + bx^2 - (1 + b)y^2 \iff 0 = a + bx^2 - (1 + b)(1 - x^2) \iff 0 = (a - 1 - b) + (2b + 1)x^2$$

Il est alors immédiat ou presque de voir que pour $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$, la condition $(\star)$ est satisfaite.

Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)$ est une solution polynomiale du problème de Dirichlet sur le disque unité associé à $f(x, y) = x^2$.

On définit de plus, en reprenant les notations de la partie II, l'application

$$N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t)) dt \quad \text{sur } D(0, 1)$$

et l'application

$$u(x, y) = \begin{cases} N_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D(O, 1), \\ f(x, y) & \text{si } (x, y) \in C(O, 1), \end{cases} \quad \text{sur } \overline{D}(0, 1).$$

III.2. Étude de l'application N_f .

- (a) On admet (voir cours de seconde année sur les intégrales à paramètres) que N_f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(O, 1)$ et,

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \quad \partial_{i,j}^2 N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_{i,j}^2 N(x, y, t) f(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

En déduire que u est harmonique sur $D(O, 1)$.

Pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u(x, y) = N_f(x, y)$, donc u est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(O, 1)$.

Puis, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, par linéarité de l'intégration :

$$(\partial_{1,1}^2 u + \partial_{2,2}^2 u)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_{1,1}^2 N + \partial_{2,2}^2 N)(x, y, t) \times f(\cos t, \sin t) dt$$

Or on a vu plus haut que N_t est harmonique sur $D(O, 1)$, en tout $t \in \mathbb{R}$. Et donc, sur $D(O, 1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R} : (\partial_{1,1}^2 N + \partial_{2,2}^2 N)(x, y, t) = (\partial_{1,1}^2 N_t + \partial_{2,2}^2 N_t)(x, y) = 0$$

Par conséquent

$$(\partial_{1,1}^2 u + \partial_{2,2}^2 u)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Ainsi, u est harmonique sur $D(O, 1)$.

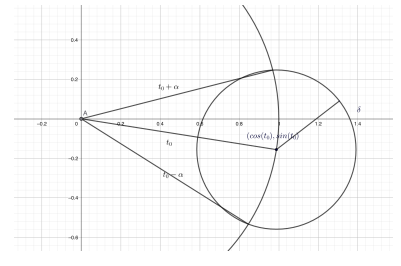
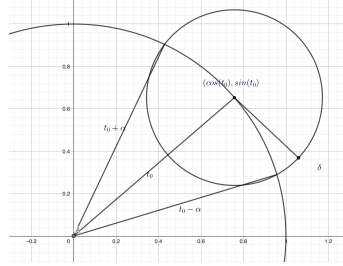
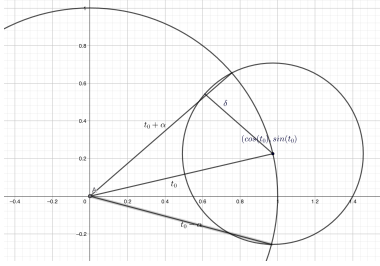
(b) Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0, 2\pi]$, $(x, y) \in D(O, 1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] \mid \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

i. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.

La condition $\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta$ signifie que $M(\cos t, \sin t)$ se trouve sur le cercle $C(O, 1)$ et dans le disque fermé $\overline{D}((\cos t_0, \sin t_0), \delta)$.



Les illustrations suivantes expliquent les situations étudiées ensuite. Deux cas selon la position par rapport à 2π On peut résoudre de manière topologique, à coup de voisinage ou de manière algébrique avec une expression fermée de δ . Nous choisissons ici la méthode algébrique. On se souvient de la formule :

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}} \right) = 2i \sin \frac{a-b}{2} \times e^{i\frac{a+b}{2}} = 2i \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} - 2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$$

En prenant parties réelles et imaginaires : $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}$ et $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$. Ainsi, il vient

$$\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2^2 = (\cos t - \cos t_0)^2 + (\sin t - \sin t_0)^2 = 4 \sin^2 \frac{t-t_0}{2} \left(\sin^2 \frac{a+b}{2} + \cos^2 \frac{a+b}{2} \right) = 4 \sin^2 \frac{t-t_0}{2}$$

On trouve donc très explicitement :

$$\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 = 2 \left| \sin \frac{t-t_0}{2} \right|$$

Par la suite, on considère $\delta < 2$, sinon, trivialement tout le cercle convient, i.e. $I_0^\delta = [0, 2\pi]$. Et donc (puisque $t - t_0 \leq 2\pi$) :

$$\begin{aligned} \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta &\iff -\frac{\delta}{2} \leq \sin \frac{t-t_0}{2} \leq \frac{\delta}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arcsin -\frac{\delta}{2} + 2k\pi \leq \frac{t-t_0}{2} \leq \arcsin \frac{\delta}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } t \in [t_0 - \alpha + 2k\pi, t_0 + \alpha + 2k\pi] \text{ où } \alpha = 2 \arcsin \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Par ailleurs, t et $t_0 \in [0, 2\pi]$, il y a donc trois possibilités (avec $\alpha = 2 \arcsin \frac{\delta}{2} \in [-\pi, \pi]$ car $\delta \in]0, 2[$) :

- ou bien $t_0 - \alpha < 0$ et alors nécessairement $t_0 + \alpha < 2\pi$,
dans ce cas $I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta\} = [0, t_0 + \alpha] \cup [t_0 - \alpha + 2\pi, 2\pi]$ (figure 1)
- ou bien $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset [0, 2\pi]$, i.e. $t_0 - \alpha \geq 0$ et $t_0 + \alpha \leq 2\pi$,
dans ce cas $I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta\} = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ (figure 2)
- ou bien $t_0 + \alpha > 2\pi$ et alors nécessairement $t_0 - \alpha > 0$,
dans ce cas $I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi] \mid \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta\} = [0, t_0 + \alpha - 2\pi] \cup [t_0 - \alpha, 2\pi]$ (figure 3)

I_0^δ est bien un intervalle ou la réunion de deux intervalles disjoints.

ii. Montrer, en utilisant l'application f , l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La notation $\int_I \dots dt$ signifie $\int_a^b \dots dt$ si $I = [a, b]$ et $\int_a^b \dots dt + \int_c^d \dots dt$ si I est la réunion des segments disjoints $[a, b]$ et $[c, d]$.

L'application f est continue sur le cercle unité, donc en particulier en $(\cos t_0, \sin t_0)$, ce qui signifie $\hat{f}$ est continue en t_0 . Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $|\hat{f}(t) - \hat{f}(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$.

Et donc, pour tout $t \in I_0^\delta$:

$$\|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta \implies |\hat{f}(t) - \hat{f}(t_0)| = |f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

On a alors par majoration de l'intégrant :

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \int_{I_0^\delta} |N(x, y, t)| |f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)| dt$$

Et donc, puisque $N \geq 0$:

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) \frac{\varepsilon}{4\pi} dt \leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt}_{I_0^\delta \subset [0, 2\pi]}$$

En exploitant la dernière question de la partie précédente : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1$;

Il existe $\delta > 0$ tel que $\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

iii. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x, y, t)| \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

Soit $\delta > 0$.

Soit $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$ et on suppose que $\|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \frac{\delta}{2}$.

Il s'agit très visiblement ici de majorer $|N|$ par minoration du dénominateur égale à $\|(x, y) - (\cos t, \sin t)\|_2^2$.

On a l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 &\leq \|(\cos t, \sin t) - (x, y)\|_2 + \|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \\ \|(x, y) - (\cos t, \sin t)\|_2 &\geq \underbrace{\|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2}_{\geq \delta \text{ car } t \notin I_0^\delta} - \underbrace{\|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2}_{\leq \frac{\delta}{2}} \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Donc, en élevant au carré

$$(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 = \|(x, y) - (\cos t, \sin t)\|_2^2 \geq \frac{\delta^2}{4}$$

On trouve donc , puisque $x^2 + y^2 \leq 1$:

$$|N(x, y, t)| = \left| \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\|(x, y) - (\cos t, \sin t)\|_2^2} \right| \leq 4 \frac{1 - x^2 - y^2}{\delta^2}$$

iv. Dédire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0))) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La fonction $\hat{f}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, segment donc compact,

donc $f(C(O, 1)) = \hat{f}([0, 2\pi])$ est borné. Notons $M = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |\hat{f}(t)| = \sup_{M \in C(O, 1)} |f(M)|$.

On a ensuite pour tout $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta \subset [0, 2\pi]$ avec $\|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \frac{\delta}{2}$:

$$|N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))| \leq |N(x, y, t)| \underbrace{(|\hat{f}(t)| + |\hat{f}(t_0)|)}_{\leq 2M} \leq 2M |N(x, y, t)| = 2M \times N(x, y, t) \leq 8M \frac{1 - x^2 - y^2}{\delta^2}$$

où l'on a exploité la réponse de la question précédente et la positivité de N .
Par ailleurs, puisque l'intégrant est une fonction positive, on a également :

$$\begin{aligned} \left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| &\leq \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} |N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))| dt \\ &\leq \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} 8M \frac{1-x^2-y^2}{\delta^2} dt \quad \text{or } [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta \subset [0, 2\pi] \\ &\leq \int_0^{2\pi} 8M \frac{1-x^2-y^2}{\delta^2} dt = \frac{16\pi M}{\delta^2} (1-x^2-y^2) \end{aligned}$$

Le couple (x, y) est dans le disque, mais peut être choisi proche du couple $(\cos t_0, \sin t_0)$ dont la norme vaut 1.
Précisément comme $\|\cdot\|_2^2$ est continue au voisinage de $(\cos t_0, \sin t_0)$,
il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \eta \implies \left| \underbrace{\|(x, y)\|^2 - \|(\cos t_0, \sin t_0)\|^2}_{=x^2+y^2-1} \right| \leq \frac{\delta^2}{32\pi M} \varepsilon$$

En se restreignant à la boule ouverte $D(O, 1)$, mais en gardant la condition $\|(x, y) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \eta$, on obtient :

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \frac{16\pi M}{\delta^2} \frac{\delta^2}{32\pi M} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$$

(c) Prouver que u est une application continue en tout point de $C(O, 1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

Soit $(\cos t_0, \sin t_0) \in C(O, 1)$. On cherche à montrer la continuité de u en $(\cos t_0, \sin t_0) \in C(O, 1)$.

On restreint l'étude de $u(x, y)$ pour (x, y) sur un voisinage de $(\cos t_0, \sin t_0)$ intersecté avec le disque ouvert $D(O, 1)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

2. Il existe alors $\delta > 0$ et I_0^δ tel que $\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

3. Il existe alors $\eta > 0$ tel que si $(x, y) \in D((\cos t_0, \sin t_0), \eta) \cap D(O, 1)$,

$$\left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors pour $(x, y) \in D((\cos t_0, \sin t_0), \eta) \cap D(O, 1)$ (on a donc $(x, y) \notin C(O, 1)$) :

$$u(x, y) - u(\cos t_0, \sin t_0) = N_f(x, y) - f(\cos t_0, \sin t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) f(\cos t, \sin t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) f(\cos t_0, \sin t_0) dt$$

$$\text{car on a vu en fin de partie précédente, que } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(x, y, t) dt = 1.$$

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| &= \left| \int_{[0, 2\pi]} \underbrace{N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))}_{:= S(x, y, t, t_0)} dt \right| \\ &= \begin{cases} \left| \int_0^a S(x, y, t, t_0) dt + \int_a^b S(x, y, t, t_0) dt + \int_b^{2\pi} S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [a, b] \\ \left| \int_0^c S(x, y, t, t_0) dt + \int_c^d S(x, y, t, t_0) dt + \int_d^{2\pi} S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [0, c] \cup [d, 2\pi] \\ \left| \int_0^a S(x, y, t, t_0) dt + \int_b^{2\pi} S(x, y, t, t_0) dt \right| + \left| \int_a^b S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [a, b] \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} S(x, y, t, t_0) dt \right| = \left| \int_{I_0^\delta} S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [a, b] \\ \left| \int_0^c S(x, y, t, t_0) dt + \int_d^{2\pi} S(x, y, t, t_0) dt \right| + \left| \int_c^d S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [0, c] \cup [d, 2\pi] \\ \left| \int_{I_0^\delta} S(x, y, t, t_0) dt \right| = \left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} S(x, y, t, t_0) dt \right| & \text{si } I_0^\delta = [a, b] \end{cases} \\ &\leq \left| \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t) (f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)) dt \right| \\ |u(x, y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Mais le couple (x, y) peut également être sur le cercle $C(O, 1)$, on a alors, par continuité de f sur $C(O, 1)$ (hypothèse de l'énoncé) :

$\exists \eta' > 0$ tel que $(x, y) \in B((\cos t_0, \sin t_0), \eta') \cap C(O, 1) : |u(x, y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| = |f(x, y) - f(\cos t_0, \sin t_0)| \leq \varepsilon$.
donc, en rapprochant les deux résultats précédents,

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in \overline{D}(O, 1), \quad (x, y) \in B((\cos t_0, \sin t_0), \min(\eta, \eta')) \Rightarrow |u(x, y) - u(\cos t_0, \sin t_0)| \leq \varepsilon$$

Autrement écrit : u , définie sur $\overline{D}(O, 1)$, est continue en tout élément $(\cos t_0, \sin t_0)$ de $C(O, 1)$.

Comme u est continue également sur $D(O, 1)$,

u est continue sur $\overline{D}(O, 1)$ et est solution du problème de Dirichlet associé à f .

III.3. Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(O, 1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application

$$u_n \left| \begin{array}{ll} \overline{D}(O, 1) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto u(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

(a) Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(O, 1)$.

- i. En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ montrer que, dans ce cas, $\partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.
On admet que l'on prouve de même que $\partial_{2,2}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.

Puisque u_n admet un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(O, 1)$ (ouvert),

Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in B((\tilde{x}, \tilde{y}), \eta)$, alors $(x, y) \in D(O, 1)$ et $u_n(x, y) \leq u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Comme pour la question I.1(a)ii, il existe $\eta' > 0$ tel $\forall x \in]\tilde{x} - \eta', \tilde{x} + \eta'[$, $(x, \tilde{y}) \in B((\tilde{x}, \tilde{y}), \eta)$.

Ainsi, $\theta : x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$ admet un extremum (maximum) local en $\tilde{x}$, point intérieur de son domaine de définition (car $\tilde{x} \in]\tilde{x} - \eta', \tilde{x} + \eta'[$),

or θ est dérivable en $\tilde{x}$ car de classe $\mathcal{C}^2$ sur (au moins) $]\tilde{x} - \eta', \tilde{x} + \eta'[$,
donc $\theta'(\tilde{x}) = 0$.

Par ailleurs, puisque θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]\tilde{x} - \eta', \tilde{x} + \eta'[$, la formule de Taylor-Young donne le développement limité à l'ordre 2 suivant au voisinage de $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \theta(x) &=_{x \rightarrow \tilde{x}} \theta(\tilde{x}) + (x - \tilde{x})\theta'(\tilde{x}) + \frac{(x - \tilde{x})^2}{2}\theta''(\tilde{x}) + o((x - \tilde{x})^2) \\ &=_{x \rightarrow \tilde{x}} \theta(\tilde{x}) + \frac{(x - \tilde{x})^2}{2}\theta''(\tilde{x}) + o((x - \tilde{x})^2) \end{aligned}$$

Si $\theta''(\tilde{x}) > 0$, alors le développement limité ci-dessus donne

$$\theta(x) - \theta(\tilde{x}) \underset{x \rightarrow \tilde{x}}{\sim} \frac{(x - \tilde{x})^2}{2}\theta''(\tilde{x})$$

or deux fonctions équivalentes au voisinage de $\tilde{x}$ ont le même signe au voisinage de $\tilde{x}$, donc $\theta(x) - \theta(\tilde{x}) > 0$ sur un voisinage de $\tilde{x}$ (privé de $\tilde{x}$) donc θ admet en $\tilde{x}$ un minimum local strict ce qui contredit le fait que θ admet en $\tilde{x}$ un maximum local.

Ainsi $\theta''(\tilde{x}) \leq 0$.

Enfin, $\theta''(\tilde{x}) = \partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$ par définition des dérivées partielles.

Donc $\partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$

Avec la même stratégie ($x \leftrightarrow y$), on trouve de même $\partial_{2,2}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.

- ii. En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(O, 1)$.

En conservant la même hypothèse d'existence d'un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y})$ pour u_n , on a, d'après la question précédente,

$$\partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) + \partial_{2,2}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$$

Or, par ailleurs (par linéarité de la dérivation partielle) :

$$\partial_{1,1}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) + \partial_{2,2}^2 u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \partial_{1,1}^2 u(\tilde{x}, \tilde{y}) + \partial_{2,2}^2 u(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{2}{n}(1 + 1) = \underbrace{(\Delta u)(\tilde{x}, \tilde{y})}_{=0} + \frac{4}{n} = \frac{4}{n} > 0$$

ce qui est une contradiction :

par conséquent, u_n n'admet pas de maximum local sur $D(O, 1)$.

(b) En déduire que, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u_n(x, y) \leq 1/n$.

u_n est continue sur le compact $\overline{D(O, 1)}$ (fermé et borné d'un espace vectoriel de dimension finie), elle admet donc un maximum global en un point $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{D(O, 1)}$.

Pour tout $(x, y) \in D(O, 1) \subset \overline{D(O, 1)}$, $u_n(x, y) \leq u_n(\tilde{x}, \tilde{y})$.

D'après la question précédente, ce maximum n'est pas situé dans la boule ouverte $D(O, 1)$ (sinon ce serait un maximum local en un point intérieur et donc en contradiction avec la question précédente). Ainsi $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in C(O, 1)$.

Alors, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u_n(x, y) \leq u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \underbrace{u(\tilde{x}, \tilde{y})}_{=f(\tilde{x}, \tilde{y})=0} + \frac{1}{n} \underbrace{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}_{=1} = \frac{1}{n}$.

(c) Montrer que u est identiquement nulle sur $D(O, 1)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u_n(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{n} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\geq 0} \leq \frac{1}{n}$ donc $u(x, y) \leq \frac{1}{n}$.

Cette majoration étant vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en passant à la limite dans l'inégalité lorsque $n \rightarrow +\infty$, $u(x, y) \leq 0$.

Le raisonnement que l'on vient de faire à partir d'un maximum hypothétique de u_n donnerait une conclusion comparable mais inversé

à partir du minimum hypothétique de $v_m : (x, y) \mapsto u(x, y) - \frac{1}{m}(x^2 + y^2)$, on aurait $v_m(x, y) \geq -\frac{1}{m}$.

Et alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x, y) \in D(O, 1)$, $u(x, y) \geq -\frac{1}{m}$ et donc $u(x, y) \geq 0$.

(On peut aussi prendre le maximum hypothétique de $(x, y) \mapsto -u(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2)$.)

Par double inégalité : u est identiquement nulle sur $D(O, 1)$.

III.4. Prouver que, pour toute application continue $f : C(O, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

En conclusion de cette partie III, étant donné une fonction f continue sur le cercle unité,

la question III.2 a permis de construire et donc de démontrer l'existence d'une fonction u de classe C^2 sur $D(O, 1)$, harmonique sur $D(O, 1)$, continue sur $\overline{D(O, 1)}$ et telle que $u|_{C(O, 1)} = f$,

la question III.3 a permis de montrer, que la fonction identiquement nulle est la seule solution de ce problème avec $f = 0$, et donc par linéarité, il n'y a qu'au plus une seule solution au problème recherchée pour la fonction f .

Ainsi le problème est « bijectif ».

En conclusion, pour toute f continue sur $C(O, 1)$, $\mathcal{D}_f$ admet un et un seul élément, qui peut être donné par la formule avec N_f .
