

Devoir à la maison n°4 CORRECTION

Exercice - Développement limité

1. On sait qu'au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7) \text{ et}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7)$$

$$\text{Donc } e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + o(x^7) \text{ et } e^x - e^{-x} = 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2520}x^7 + o(x^7).$$

Pour le dénominateur, on met la partie principale en facteur :

$$e^x - e^{-x} = 2x \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + o(x^6) \right),$$

$$\begin{aligned} \coth(x) &= \frac{1}{2x} \left(2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + o(x^6) \right) \left(1 - \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 \right] + \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 \right]^2 - \left[\frac{1}{6}x^2 \right]^3 + o(x^6) \right) \\ &= \frac{1}{2x} \left(2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + o(x^6) \right) \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{36} \right)x^4 + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{1}{360} - \frac{1}{216} \right)x^6 + o(x^6) \right) \\ &= \frac{1}{2x} \left(2 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{360}x^6 + o(x^6) \right) \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 - \frac{31}{15120}x^6 + o(x^6) \right) \\ &= \frac{1}{2x} \left(2 + \left(1 - \frac{1}{3} \right)x^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{7}{180} \right)x^4 + \left(-\frac{31}{7560} + \frac{7}{360} - \frac{1}{72} + \frac{1}{360} \right)x^6 + o(x^6) \right) \end{aligned}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + o(x^5)$$

2. Par intégration du DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, en 0, on a :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \text{ et } \sin = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).$$

$$\text{En factorisant par } x : \frac{\arctan x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)}.$$

On applique les propriétés du logarithme :

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\arctan(x)}{\sin(x)} \right) &= \ln \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + o(x^4) \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4) \right) \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}x^2 \right]^2 + o(x^4) - \left[-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6}x^2 \right]^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{20}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Puis $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{20}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{15}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{15}x^4$$

3. En $+\infty$, $\arctan(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. $\arctan(x) - \frac{\pi}{2} = \arg(1+ix) - \arg(i) = \arg \frac{1+ix}{i} = \arg(x-i) = \arctan \frac{-1}{x}$

$$\text{Donc } x \arctan x - \frac{\pi}{2} = x \left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{3} \frac{-1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = -1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Puis $e^{-x} \rightarrow 0$, pour $x \rightarrow +\infty$.

Et finalement, comme pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha e^{-x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) $\ln \left(\frac{x+1}{x} \right) \times \exp(-x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Donc

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\mathcal{C}_g \text{ admet pour asymptote } \Delta, \text{ d'équation } y = \frac{\pi}{2}x - 1. \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \Delta$$

Problème - Approximation uniforme par des polynômes

1. Quelques calculs préliminaires.

Dans cette partie x est un nombre réel et n est un entier naturel, $n \geq 1$.

(a) On applique la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1$$

(b) Notons que pour $1 \leq k \leq n$,

$$k \binom{n}{k} = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

Puis, on applique le binôme de Newton (la somme commence à 1, sinon on multiplie par 0) :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} = nx(x + (1-x))^{n-1} = nx$$

(c) Même idée : pour $2 \leq k \leq n$,

$$k(k-1) \binom{n}{k} = \frac{n!k(k-1)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

Puis, on applique le binôme de Newton (la somme commençant à 2, sinon on multiplie par 0) :

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1)x^2(x + (1-x))^{n-2}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

(d) On exploite la décomposition en combinaison linéaire :

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(x^2 - 2\frac{k}{n}x + \frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On exploite aussi le fait que $k^2 = k(k-1) + k$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \left(-\frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}\right) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}x^2 = \frac{-n + n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = \frac{x - x^2}{n} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

2. Étude de $S(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(a) Majoration de $S(x)$: première méthode.

i. Comme $k \in S_V$, on a la majoration $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in V} \frac{1}{\sqrt{n}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in V} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

En ajoutant des termes positifs :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in V} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{n}} (x + (1-x))^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par transitivité : $\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$

ii. $k \in W \iff \left| x - \frac{k}{n} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}} \implies \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 = \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 > \frac{1}{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|.$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} S_W(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in W} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \sum_{k \in W} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

d'après la question 1.(d). Et ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}}$$

iii. Soit $f : x \mapsto x(1-x) = x - x^2$, les variations de f sont classiques (polynôme) :

- f est croissante de $] -\infty, \frac{1}{2}]$ sur $] -\infty, \frac{1}{4}]$
- f est décroissante de $[\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$

Comme $f(0) = f(1) = 0$, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

Donc

$$\boxed{S(x) = S_V(x) + S_W(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4\sqrt{n}}}$$

(b) Majoration de $S(x)$: seconde méthode (Cauchy-Schwartz). On rappelle que pour tout $(a_0, a_1, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n a_k^2 \times \sum_{k=0}^n b_k^2$$

En prenant $a_k = \left| x - \frac{k}{n} \right| \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$ et $b_k = \sqrt{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$.

On trouve :

$$\begin{aligned} [S(x)]^2 &= \left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n a_k^2 \times \sum_{k=0}^n b_k^2 = \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= [S(x)]^2 \leq \frac{x(1-x)}{n} \times 1 \end{aligned}$$

On exploite un encadrement vu plus haut : pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Donc $[S(x)]^2 \leq \frac{1}{4n}$:

$$\boxed{S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

3. Application à l'approximation uniforme.

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein de f , notée $B_n(f)$ en posant pour tout $x \in [0, 1]$,

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

Le but de cette partie est d'étudier $\sup_{x \in [0, 1]} |B_n(f)(x) - f(x)|$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

Notons l'équivalence suivante (qui explique pourquoi on parle de majoration uniforme) :

$$(\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M) \iff \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq M$$

- (a) Dans ce cas, $f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}(k(k-1) + k)$, le calcul a été réalisé explicitement :

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{n^2}(n(n-1)x^2 + nx) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \times \sup_{x \in [0,1]} |x(1-x)| = \frac{1}{4n}$$

d'après quelques calculs faits plus tôt.

- (b) Soit $f \in \mathcal{C}$, comme pour tout x , $f(x) = f(x) \times 1 = \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$,
on a pour tout $x \in [0, 1]$, par linéarité de la sommation :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- (c) i. Supposons que f soit δ -lipschitzienne, donc

$$\forall x, x' \in [0, 1], |f(x) - f(x')| \leq \delta |x - x'|$$

Donc, par inégalité triangulaire pour commencer, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} |x^k| (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \delta \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \delta S(x) \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure (avec la réponse de la question 2.(b)) :

$$\text{si } f \text{ est } \delta\text{-lipschitzienne, alors } \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

- ii. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, alors f' est continue sur $[0, 1]$,
et donc, d'après la théorème de Weierstrass, il existe c tel que $\forall x \in [0, 1], f'(x) \leq c$.
Puis, on applique l'inégalité des accroissements finis et donc f est c -lipschitzienne.
Et d'après la question précédente :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

- iii. Supposons maintenant que f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,

Alors il existe $\sigma = (x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_m = 1)$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}_m$,

- $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$,
- $f|_{]x_{i-1}, x_i[}$ admet un $\mathcal{C}^1$ -prolongement par continuité sur $[x_{i-1}, x_i]$, notée $\overline{f}_i$.

On peut alors appliquer le résultat précédent à chaque $\overline{f}_i$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment).

Il existe donc, pour $i \in \mathbb{N}_m$, c_i tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |B_n(\overline{f}_i)(x) - \overline{f}_i(x)| \leq \frac{c_i}{\sqrt{n}}$

Et comme pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[, \overline{f}_i(x) = f|_{]x_{i-1}, x_i[}(x) = f(x)$, on a donc

$$\forall i \in \mathbb{N}_m, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{c_i}{\sqrt{n}} \leq \frac{\overbrace{c}^{\max(c_i)}}{\sqrt{n}}$$

Puis comme f est continue sur $[0, 1]$, on peut considérer également $x = x_i$:

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$$

iv. Considérons une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière (au moins dérivable). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
B'_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} kx^{k-1}(1-x)^{n-k}}_{=0 \text{ si } k=0} - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}}_{=0 \text{ si } k=n} \\
&= \sum_{k=1}^n n f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}}_{k \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}} - \sum_{k=0}^{n-1} n f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k}}_{(n-k) \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} = n \binom{n-1}{k}} \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \underbrace{n f\left(\frac{h+1}{n}\right) \binom{n-1}{h} x^h(1-x)^{n-1-h}}_{h=k-1 \Leftrightarrow k=h+1} - \sum_{h=0}^{n-1} \underbrace{n f\left(\frac{h}{n}\right) \binom{n-1}{h} x^h(1-x)^{n-1-h}}_{h=k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, f est continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, dérivable sur $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $t_k \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$ tel que

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f'(t_k) \times \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$

Donc $n \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = f'(t_k)$. Et $B'_n(f)(x)$ est presque égale à $B_{n-1}(f')(x)$.
Pour peu que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ (ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux - en exercice), f' est δ' -lipschitzienne :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f'(x) - f'(y)| \leq \delta' |x - y|$$

Et donc, par inégalité triangulaire :

$$|B'_n(f)(x) - f'(x)| \leq |B'_n(f)(x) - B_{n-1}(f')(x)| + |B_{n-1}(f')(x) - f'(x)|$$

D'après la questions précédentes : $\exists c'$ tel que $\forall x \in [0, 1], |B_{n-1}(f')(x) - f'(x)| \leq \frac{c'}{\sqrt{n-1}}$

De plus :

$$|B'_n(f)(x) - B_{n-1}(f')(x)| = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_k) - f'(x)| \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k} \leq \delta' \sum_{k=0}^{n-1} |t_k - x| \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k}$$

Or $t_k \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$, comme $\frac{k}{n-1} \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$
(en effet : $\frac{k}{n} \leq \frac{k}{n-1} \Leftrightarrow n-1 \leq n$ et $\frac{k}{n-1} \leq \frac{k+1}{n} \Leftrightarrow kn \leq kn + n - k - 1 \Leftrightarrow k \leq n-1$).
Donc

$$|t_k - x| = \left| t_k - \frac{k}{n-1} + \frac{k}{n-1} - x \right| \leq \left| t_k - \frac{k}{n-1} \right| + \left| \frac{k}{n-1} - x \right| \leq \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} + \left| \frac{k}{n-1} - x \right| = \frac{1}{n} + \left| \frac{k}{n-1} - x \right|$$

Et finalement (par linéarité) :

$$|B'_n(f)(x) - f'(x)| \leq \delta' \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k(1-x)^{n-1-k} + |B_{n-1}(f')(x) - f'(x)| \right) \leq \frac{\delta'}{n} + \frac{\delta' c'}{\sqrt{n-1}}$$

En additionnant, on a donc

$$\boxed{\exists C > 0 \text{ tel que } \sup_{x \in [0,1]} |B'_n(f)(x) - f'(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}}$$

(d) Soit $f : [0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}$, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Soit $r > 0$; avec les mêmes notations, on considère $c = \max_{i \in \mathbb{N}_m} (\sup \bar{f}_i)$ puis $N = \lfloor (\frac{c}{r})^2 \rfloor + 1$.

Puis $P = B_N(f)$, on a alors

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], |P(x) - f(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{N}} \leq r.}$$

(e) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On va appliquer la transformation affine :

$$x = (1 - t)a + tb = a + t(b - a) \iff t = \frac{x - a}{b - a}$$

qui permet de passer de $[a, b]$ à $[0, 1]$ et réciproquement.

Soient $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + (b - a)t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$,

$$\text{puis pour tout } n \in \mathbb{N} : B_n(\bar{f}) : t \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \bar{f}\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1 - t)^{n-k}.$$

Alors d'après la question précédente :

pour tout $r > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall t \in [0, 1]$, $|\bar{f}(t) - B_n(\bar{f})(t)| \leq \epsilon$.

On a donc pour tout $x \in [a, b]$ et $n \geq N$,

$$\left| \bar{f}\left(\frac{x - a}{b - a}\right) - B_n(\bar{f})\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \right| \leq \epsilon$$

Or $\bar{f}\left(\frac{x - a}{b - a}\right) = f(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} B_n(\bar{f})\left(\frac{x - a}{b - a}\right) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + (b - a)\frac{k}{n}\right) \left(\frac{x - a}{b - a}\right)^k \left(\frac{b - x}{b - a}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{(b - a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + (b - a)\frac{k}{n}\right) (x - a)^k (b - x)^{n-k} \end{aligned}$$

Avec $\check{B}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{(b - a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + (b - a)\frac{k}{n}\right) (x - a)^k (b - x)^{n-k}$ polynomiale :

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \check{B}(f)(x)| \leq \epsilon$