Devoir à la maison n°4

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice - Développement limité

1. Donner le développement limité (généralisé) d'ordre 5 au voisinage de 0 de coth : $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
2. Donner un équivalent de $f(x) = \ln\left(\dfrac{\arctan(x)}{\sin(x)}\right) + \dfrac{x^2}{6}\cos(x)$ pour $x \to 0$.
3. Montrer que la courbe représentative de $g : x \mapsto x\arctan(x) + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \times \exp(-x)$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$.
   On donnera l'équation de cette asymptote Δ est la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à Δ

Problème - Approximation uniforme par des polynômes

1. Quelques calculs préliminaires.
   Dans cette partie x est un nombre réel et n est un entier naturel, $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$
   (d) Déduire des questions précédentes que
   $$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$
2. Étude de $S(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme
   $$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
   (a) Majoration de $S(x)$: première méthode.
   On note
   — V, l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   — W, l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Et on pose $S_V(x) = \displaystyle\sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $S_W(x) = \displaystyle\sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
   i. Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   ii. Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$
   iii. Montrer que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$

(b) Majoration de $S(x)$: seconde méthode (Cauchy-Schwartz). On rappelle que pour tout $(a_0, a_1, \ldots a_n)$, $(b_0, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=0}^{n} b_k^2$$

A l'aide de la question 1.(d), en déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

3. Application à l'approximation uniforme.
Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, notée $B_n(f)$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

Le but de cette partie est d'étudier $\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)|$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

(a) Un exemple.
Si $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [0,1]$, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)|$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}$, montrer pour tout $x \in [0,1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(c) i. Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors
$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

ii. En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe un réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

iii. Étendre le résultat au cas où f est une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux).
C'est-à-dire : il existe $\sigma = (x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_m = 1)$ *tel que pour tout* $i \in \mathbb{N}_m$,
- $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ *soit de classe* $\mathcal{C}^1$,
- $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ *admet un* $\mathcal{C}^1$*-prolongement par continuité sur* $[x_{i-1}, x_i]$, *notée* $\overline{f_i}$.

iv. Que peut-on dire de $\sup_{x\in[0,1]} |B_n'(f)(x) - f'(x)|$?

(d) Soit $f : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}$, continue, $\mathcal{C}^1$.
Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe une polynôme P à coefficients réels tel que $\forall\ x \in [0,1]$, $f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r$.

(e) Comment étendre le résultat à une fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ quelconque ?