
UNE STRATÉGIE GÉNÉRALE POUR MONTRER L'IRRATIONALITÉ D'UN RÉEL ET LES INÉGALITÉS FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

DM MPSI3 2024-2025 LYCÉE PIERRE DE FERMAT
CORRECTION

Préliminaires

- Dans tout le sujet, $c > 0$ est un réel.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On note $\mathcal{P}_c = \{Q \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } Q^{(k)}(c) \in \mathbb{Z}\}$ (ici, l'exposant en k signifie la k -ième dérivée).
- On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, c]$ est de *Niven* si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi'_{k+1} = \varphi_k$ et si $\varphi_k(0) \in \mathbb{Z}$ et $\varphi_k(c) \in \mathbb{Z}$.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, c]$ si elle est dérivable une infinité de fois sur $[0, c]$ avec $f^{(n)}$ continue sur $[0, c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- f est dite *Nivéniennne* s'il existe une suite de Niven $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\varphi_0 = f$ et si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, c]$.
- On dit que $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. UNE STRATÉGIE GÉNÉRALE POUR MONTRER L'IRRATIONALITÉ D'UN ÉLÉMENT DE $\mathbb{R}$

- (1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{|a|^n}{n!}$. Notons que $u_n \geq 0$

Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$, ainsi $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ (positivité de u_n et u_{n+1}).

Par récurrence immédiate : pour tout $n \geq N$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-N}}u_N$.

Or $\left(\frac{1}{2^{n-N}}u_N\right)_{n \geq N}$ converge vers 0, donc par encadrement (u_n) converge et $\lim u_n = 0$.

pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$.

- (2) Soit f, g deux applications continues sur $[0, c]$. Il existe M_1 et $M_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0, c] : |f(t)| \leq M_1$ et $|g(t)| \leq M_2$ (Théorème de Weierstrass).

On a alors, pour tout $t \in [0, c] : |f(t)| \frac{|g(t)^n|}{n!} \leq M_1 \frac{M_2^n}{n!}$.

Ainsi :

$$\left| \int_0^c f(t) \frac{g(t)^n}{n!} dt \right| \leq \int_0^c |f(t)| \times \frac{|g(t)^n|}{n!} dt \leq c M_1 \frac{M_2^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'après la question précédente.

Ainsi

$\left(\int_0^c f(t) \frac{g(t)^n}{n!} dt \right)_n$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \frac{g(t)^n}{n!} dt = 0$

- (3) Soit $P \in \mathcal{P}_c$ tel que $P(0) = P(c) = 0$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{P^n}{n!}$.

On a donc $T_0 = 0$ et $T'_{n+1} = \frac{(n+1)P'P^n}{(n+1)!} = P'T_n$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: " $T_n \in \mathcal{P}_c$ ".

- Par hypothèse, $T_0 = P \in \mathcal{P}_c$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$,

– si $k \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} T_{n+1}^{(k)} &= (T'_{n+1})^{(k-1)} = (P'T_n)^{(k-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} T_n^{(i)} P^{(k-i+1)} \end{aligned} \quad \text{Formule de Leibniz}$$

Or $P \in \mathcal{P}_c$, ainsi que T_n d'après $\mathcal{P}_n$.

$$\text{Ainsi, } T_{n+1}^{(k)}(c) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} T_n^{(i)}(c) P^{(k-i+1)}(c) \in \mathbb{Z},$$

comme somme de produits d'entiers puisque $P \in \mathcal{P}_c$.

Pour les mêmes raisons : $T_{n+1}^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$

– Si $k = 0$, on a $T_{n+1}^{(k)}(c) = T_{n+1}(c) = \frac{P^n(c)}{n!} = 0$ car $P(c) = 0$ et de même $T_{n+1}^{(0)}(0) = 0$.

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$.

(4) On suppose dans cette question que $c \in \mathbb{Q}$.

Considérons $Q : x \mapsto cx - x^2 = x(c - x)$, polynôme de degré deux. $Q(0) = 0 = Q(c)$.

Pour tout $x \in]0, c[$, $x > 0$ et $c - x > 0$, donc $Q(x) > 0$.

Il existe $Q \in \mathcal{P}_c$ de degré 2 tel que $Q(c) = Q(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, c[$, $Q(x) > 0$.

(5) On suppose que c n'est pas rationnel. Soit $P \in \mathcal{P}_c$. Notons $d = \deg P$, alors on peut supposer $P : x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k$ avec $a_d \neq 0$.

Et donc P est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^{(d)}(x) = a_d d! = P^{(d)}(0) \in \mathbb{Z}$.

alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P^{(d-1)}(x) = (d-1)!a_{d-1} + d!a_d x$ et donc $P^{(d-1)}(0) = (d-1)!a_{d-1} \in \mathbb{Z}$.

On a alors $P^{(d-1)}(c) = (d-1)!a_{d-1} + d!a_d c \in \mathbb{Z}$, donc il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $(d-1)!a_{d-1} + d!a_d c = h$.

Et par conséquent : $c = \frac{h - P^{(d-1)}(0)}{P^{(d)}(0)} \in \mathbb{Q}$. Impossible.

Si $c \notin \mathbb{Q}$, $\mathcal{P}_c = \emptyset$.

On montrera maintenant l'irrationalité de certains éléments de $\mathbb{R}$.

(6) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$ (récurrence immédiate).

Il faut et il suffit donc que $\exp(c) \in \mathbb{Z}$ (car $\exp 0 = 1 \in \mathbb{Z}$).

Avec $c = \ln k$, $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, on a : la fonction exponentielle soit Nivénienne sur $[0, c]$.

(7) Soit f une application Nivénienne sur $[0, c]$. Soit $Q \in \mathcal{P}_c$.

Alors Q est une application polynomiale, de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut noter $d = \deg Q$.

f est Nivénienne, donc il existe $(\varphi_k)_k$ tel que $f = \varphi_0$.

Posons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_i : \int_0^c f(t)Q(t)dt = \sum_{h=0}^i (-1)^h \left[\varphi_{h+1}(t)Q^{(h)}(t) \right]_0^c + (-1)^{i+1} \int_0^c \varphi_{i+1}(t)Q^{(i+1)}(t)dt$.

- Comme $f = \varphi_0$ est primitive de φ_1 et que Q est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer une IPP.

$$\int_0^c f(t)Q(t)dt = [\varphi_1(t)Q(t)]_0^c - \int_0^c \varphi_1(t)Q'(t)dt$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_i$ est vraie.

$$\text{Donc } \int_0^c f(t)Q(t)dt = \sum_{h=0}^i (-1)^h \left[\varphi_{h+1}(t)Q^{(h)}(t) \right]_0^c + (-1)^{i+1} \int_0^c \varphi_{i+1}(t)Q^{(i+1)}(t)dt.$$

On peut faire de nouveau une IPP ($u = Q^{(i+1)}$ et $v' = \varphi_{i+1}$) :

$$\int_0^c f(t)Q(t)dt = \sum_{h=0}^i (-1)^h \left[\varphi_{h+1}(t)Q^{(h)}(t) \right]_0^c + (-1)^{i+1} \left[\left[\varphi_{i+2}(t)Q^{(i+1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^c \varphi_{i+2}(t)Q^{(i+2)}(t)dt \right]$$

$$\int_0^c f(t)Q(t)dt = \sum_{h=0}^{i+1} (-1)^h \left[\varphi_{h+1}(t)Q^{(h)}(t) \right]_0^c + (-1)^{i+2} \int_0^c \varphi_{i+2}(t)Q^{(i+2)}(t)dt$$

Ainsi $\mathcal{P}_{i+1}$ est également vraie.

Le résultat est en particulier vraie pour $i = d$, on trouve alors, puisque $Q^{(d+1)} = 0$:

$$\int_0^c f(t)Q(t)dt = \sum_{h=0}^d (-1)^h \left[\varphi_{h+1}(t)Q^{(h)}(t) \right]_0^c + (-1)^{i+1} \int_0^c \varphi_{i+1}(t) \underbrace{Q^{(i+1)}(t)}_{=0} dt = \sum_{h=0}^d (-1)^h \left(\varphi_{h+1}(c)Q^{(h)}(c) - \varphi_{h+1}(0)Q^{(h)}(0) \right)$$

Or $Q \in \mathcal{P}_c$ et $(\varphi_k)_k$ est de Niven, donc pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\varphi_{h+1}(c)Q^{(h)}(c) \in \mathbb{Z}$ et $\varphi_{h+1}(0)Q^{(h)}(0) \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent :

$$\boxed{\int_0^c f(t)Q(t) dt \in \mathbb{Z}}$$

(8) Soit f une fonction Nivénienne sur $[0, c]$ à valeurs positives.

En déduire le théorème de Niven-Parks: si $c > 0$ est rationnel, alors la seule fonction Nivénienne $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives est la fonction nulle.

(9) En déduire l'irrationalité de π , e et $\log(|r|)$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$, $r \neq 1$.

2. ETUDE ÉLÉMENTAIRE DE FONCTIONS CONVEXES DANS $\mathbb{R}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si, pour tout $u, v \in I$ et pour tout $x \in [u, v]$, on a:

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

(10) $y = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$ est l'équation d'une droite, celle qui passe par les point $U = (u, f(u))$ et $V = (v, f(v))$ (il suffit de faire le calcul).

On a donc, pour tout $x \in [u, v]$, $f(x)$ situé sous ce segment de droite (qu'on appelle une corde).

Ainsi, géométriquement, cette inégalité signifie que pour la partie entre u et v , la courbe se trouve sous la corde.

(si besoin faire un dessin).

(11) On suppose que f est deux fois dérivable sur I . Montrer que si $f''(x) \geq 0$ pour tout x dans I , alors f est convexe.

(12) On suppose que f est toujours deux fois dérivable sur I . On note $T_a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a \in I$. Montrer l'équivalence:

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x \in I, T_a(x) \leq f(x)$$

On pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On pose aussi $I = [a, b]$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe.

(13) Montrer que l'application $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $\lambda \mapsto (1 - \lambda)a + \lambda b$ réalise une bijection, en déduire que tout élément de I peut s'écrire sous la forme $(1 - \lambda)a + \lambda b$, avec $\lambda \in [0, 1]$

(14) En déduire de ce qui précède que f est convexe sur I si et seulement si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$

(15) (*) Finalement, établir la fameuse inégalité de **Jensen**: pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Cette inégalité est fondamentale à l'analyse, et nous aide à démontrer des résultats complètement non triviaux. L'un d'entre eux est le fameux inégalité de **Young**. Pour le démontrer, il faut d'abord remarquer que toutes ces inégalités sont valables pour des fonctions concaves sur I , mais dans l'autre sens.

(16) On note $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ le logarithme népérien, l'application réciproque de l'exponentielle $\exp$. Montrer que $\log$ est concave sur son ensemble de définition.

(17) En déduire, avec l'inégalité de **Jensen**, l'inégalité de **Young**, ie pour tout p, q conjugué, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

On aurait pu néanmoins déduire cette inégalité d'une manière classique:

- (18) On fixe $y \in \mathbb{R}_+$, et on pose $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Montrer que ϕ est convexe sur son ensemble de définition, trouver son minimum et en déduire l'inégalité de **Young**.

3. CAUCHY, HOLDER, MINKOWSKI

Avec ce qu'on vient de faire, on pourra établir les inégalités de **Holder** et puis **Minkowski**, ce dernier justifiant la nature des p -normes ($\|\cdot\|_p$) sur les espaces vectoriels. Avant cela, nous allons démontrer l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** pour les sommes, un cas particulier de l'inégalité de **Holder**:

- (19) Soient $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On considère l'application:

$$P : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + x b_k)^2$$

Justifier que P est un polynôme. En raisonnant sur les racines de P , en déduire l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

On énoncera maintenant l'inégalité de **Holder**, plus général que celui de **Cauchy**.

- (20) On se place dans les mêmes conditions que pour l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**. Soit p, q conjugués. On souhaite montrer que:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Montrer que l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** est un cas particulier de celui ci.

- (21) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on a:

$$|a_k b_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} |a_k|^p + \frac{1}{q \lambda^q} |b_k|^q$$

- (22) En déduire qu'on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=1}^n (|a_k|^p) + \frac{1}{q \lambda^q} \sum_{k=1}^n (|b_k|^q)$$

- (23) En étudiant l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ défini ci dessous, conclure avec l'inégalité de **Holder**.

$$\varphi : \lambda \mapsto \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=1}^n (|a_k|^p) + \frac{1}{q \lambda^q} \sum_{k=1}^n (|b_k|^q)$$

Cette démonstration étant laborieuse et pas très élégante, elle à été bien simplifiée. On aurait pu suivre le trajectoire suivant:

- (24) Avec l'inégalité de **Young**, montrer que:

$$\frac{|a_k b_k|}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|a_k|^p}{p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)} + \frac{|b_k|^q}{q \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)}$$

- (25) En déduire l'inégalité de **Holder**.

On peut finalement aboutir sur l'inégalité de **Minkowski**: soit $p > 0$ conjugués, $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on a:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Cela se fait en une question:

- (26) En appliquant l'inégalité de **Holder** deux fois, montrer l'inégalité:

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p + \sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)$$

Et en déduire l'inégalité de **Minkowski**.

Bonus: Inégalité Arithmetico-Géométrique. On démontre ici l'inégalité arithmetico géométrique d'une manière très simple.

(27) En exploitant la fonction log, montrer l'inégalité arithmetico géométrique: pour tout suite de réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

$$\left(\prod_{k=1}^n (|a_k|) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$$