# UNE STRATÉGIE GÉNÉRALE POUR MONTRER L'IRRATIONALITÉ D'UN RÉEL ET LES INÉGALITÉS FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

DM MPSI3 2024-2025 LYCÉE PIERRE DE FERMAT
A FAIRE À DEUX. A RENDRE POUR LE 7 FÉVRIER

## Préliminaires

- Dans tout le sujet, $c > 0$ est un réel.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On note $\mathcal{P}_c = \{Q \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } Q^{(k)}(c) \in \mathbb{Z}\}$ (ici, l'exposant en $k$ signifie la $k$-ième dérivée).
- On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,c]$ est de *Niven* si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi'_{k+1} = \varphi_k$ et si $\varphi_k(0) \in \mathbb{Z}$ et $\varphi_k(c) \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,c]$ si elle est dérivable une infinité de fois sur $[0,c]$ avec $f^{(n)}$ continue sur $[0,c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $f$ est dite *Nivénienne* s'il existe une suite de Niven $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\varphi_0 = f$ et si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,c]$.
- On dit que $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

## 1. Une stratégie générale pour montrer l'irrationalité d'un élément de $\mathbb{R}$

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$.

(2) Soit $f, g$ deux applications continues sur $[0,c]$. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^c f(t)\frac{g(t)^n}{n!}\, dt = 0$$

(3) Soit $P \in \mathcal{P}_c$ tel que $P(0) = P(c) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$.

(4) On suppose dans cette question que $c \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{P}_c$ de degré 2 tel que $Q(c) = Q(0) = 0$ et pour tout $x \in ]0, c[$, $Q(x) > 0$.

(5) On suppose que $c$ n'est pas rationnel. Déterminer $\mathcal{P}_c$.

On montrera maintenant l'irrationalité de certains éléments de $\mathbb{R}$.

(6) Trouver $c > 0$ tel que la fonction exponentielle soit Nivénienne sur $[0,c]$.

(7) Soit $f$ une application Nivénienne sur $[0,c]$. Montrer que pour tout $Q \in \mathcal{P}_c$:

$$\int_0^c f(t)Q(t)\, dt \in \mathbb{Z}$$

(8) En dédure le théorème de Niven-Parks: si $c > 0$ est rationnel, alors la seule fonction Nivénienne $f : [0,c] \to \mathbb{R}$ à valeurs positives est la fonction nulle.

(9) En déduire l'irrationalité de $\pi$, $e$ et $\log(|r|)$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$, $r \neq 1$.

## 2. Etude élémentaire de fonctions convexes dans $\mathbb{R}$

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est convexe sur $I$ si, pour tout $u, v \in I$ et pour tout $x \in [u, v]$, on a:

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

(10) Interpréter la propriété de la convexité d'une fonction géométriquement.

(11) On suppose que $f$ est deux fois dérivable sur $I$. Montrer que si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x$ dans $I$, alors $f$ est convexe.

(12) On suppose que $f$ est toujours deux fois dérivable sur $I$. On note $T_a : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a \in I$. Montrer l'équivalence:

$$f \text{ convexe sur I} \iff \forall x \in I, T_a(x) \leq f(x)$$

On pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On pose aussi $I = [a, b]$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe.

(13) Montrer que l'application $\varphi : [0, 1] \to [a, b], \lambda \mapsto (1 - \lambda)a + \lambda b$ réalise une bijection, en déduire que tout élément de $I$ peut s'écrire sous la forme $(1 - \lambda)a + \lambda b$, avec $\lambda \in [0, 1]$

(14) En déduire de ce qui précède que $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$

(15) (*) Finalement, établir la fameuse inégalité de **Jensen**: pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, pour tout $(x_1, ...x_n) \in I^n$, on a:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Cette inégalité est fondamentale à l'analyse, et nous aide à démontrer des résultats complétements non trivaux. L'un dentre eux est le fameux inégalité de **Young**. Pour le démontrer, il faut d'abord remarquer que toute ces inégalités sont valables pour des fonctions concaves sur $I$, mais dans l'autre sens.

(16) On note $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ le logarithme népérien, l'application réciproque de l'exponentielle exp. Montrer que log est concave sur son ensemble de définition.

(17) En déduire, avec l'inégalité de **Jensen**, l'inégalité de **Young**, ie pour tout $p, q$ conjugué, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

On aurait pu néanmoins déduire cette inégalité d'une manière classique:

(18) On fixe $y \in \mathbb{R}_+$, et on pose $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Montrer que $\phi$ est convexe sur son ensemble de définition, trouver son minimum et en déduire l'inégalité de **Young**.

## 3. Cauchy, Holder, Minkowski

Avec ce qu'on vient de faire, on pourra établir les inégalités de **Holder** et puis **Minkowski**, ce dernier justifiant la nature des $p$-normes ($\|\cdot\|_p$) sur les espaces vectoriels. Avant cela, nous allons démontrer l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** pour les sommes, un cas particulier de l'inégalité de **Holder**:

(19) Soient $((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On considère l'application:

$$P : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(a_k + xb_k)^2$$

Justifier que $P$ est un polynôme. En raisonnant sur les racines de $P$, en déduire l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

On énoncera maintenant l'inégalité de **Holder**, plus général que celui de **Cauchy**.

(20) On se place dans les mêmes conditions que pour l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**. Soit $p, q$ conjugués. On souhaite montrer que:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Montrer que l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** est un cas particulier de celui ci.

(21) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, on a:

$$|a_k b_k| \leq \frac{\lambda^p}{p}|a_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q}|b_k|^q$$

(22) En déduire qu'on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{\lambda^p}{p}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p) + \frac{1}{q\lambda^q}\sum_{k=1}^{n}(|b_k|^q)$$

(23) En étudiant l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ défini ci dessous, conclure avec l'inégalité de **Holder**.

$$\varphi : \lambda \mapsto \frac{\lambda^p}{p}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p) + \frac{1}{q\lambda^q}\sum_{k=1}^{n}(|b_k|^q)$$

Cette démonstration étant laborieuse et pas très élégante, elle à été bien simplifié. On aurait pu suivre le trajectoire suivant:

(24) Avec l'inégalité de **Young**, montrer que:

$$\frac{|a_k b_k|}{\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|a_k|^p}{p\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)} + \frac{|b_k|^q}{q\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)}$$

(25) En déduire l'inégalité de **Holder**.

On peut finalement aboutir sur l'inégalité de **Minkowski**: soit $p > 0$ conjugués, $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors on a:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cela se fait en une question:

(26) En appliquant l'inégalité de **Holder** deux fois, montrer l'inégalité:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)$$

Et en déduire l'inégalité de **Minkowski**.

**Bonus: Inégalité Arithmetico-Géométrique.** On démontre ici l'**inégalite arithmetico géometrique** d'une manière très simple.

(27) En exploitant la fonction log, montrer **l'inégalité arithmetico géometrique**: pour tout suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(|a_k|)\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$