AUTOUR LES ENSEMBLES FINIS, DÉNOMBRABLES ET INDÉNOMBRABLES

DM MPSI3 2024-2025 LYCÉE PIERRE DE FERMAT.
CORRECTION

Préliminaires

- Si X est un ensemble, on note $|X|$ son cardinal.

- On dit que deux ensembles X et Y sont *équipotents* s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$. On note cette relation $X \cong Y$

- On dit qu'un ensemble X de cardinal infini est *dénombrable* si il existe une bijection $\varphi : X \to \mathbb{N}$, et il est qualifié de *indénombrable* dans le cas échéant. On dit que X est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

- Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'enemble des parties de X. Pour tout $U \in \mathcal{P}(X)$, on note $\mathbf{1}_U : X \to \{0, 1\}$:

$$\mathbf{1}_U : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut ainsi définir le cardinal de U de la manière suivante, si X est au plus dénombrable:

$$|U| = \sum_{x \in X} \mathbf{1}_U(x) \leq +\infty$$

- On pose $\mathbb{N}$ l'enemble des nombre entiers naturels avec 0 y compris, $\mathbb{Z}$ l'enemble des entiers relatifs et $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, ...\}$ l'ensemble des nombre premiers ordonné. On définit $\mathbb{Q}$ à partir de ces deux ensembles:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} |\ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ a \wedge b = 1\}$$

- On pose $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{T}$ l'enemble des nombres transcendants:

$$\mathbb{T} = \{\alpha \in \mathbb{R} |\ \forall P \in \mathbb{Z}[X],\ P(\alpha) \neq 0\}$$

Les question marqués par (*) sont à être considéré plus difficile.

I. Autour de l'équipotence sur les ensembles finis

(1)
- **Réfléxivité:** Soit X fini, alors avec $\varphi = \mathrm{id}_X$, on a une bijection de X sur X, donc $X \cong X$. $\cong$ est refléxive.
- **Symétrique:** Soient X et Y deux ensembles finies tels que $X \cong Y$.
  Alors il existe une bijection $\varphi : X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$, elle admet une réciproque $\varphi^{-1} : Y \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$, nécessairement bijective. Donc $Y \cong X$.
  Par conséquent, $\cong$ est symétrique.

- **Transitivité:** Soient X, Y et Z tels que $X \cong Y$ et $Y \cong Z$.
  Alors il existe deux bijections : $\varphi_1 : X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ et $\varphi_2 : Y \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z$.
  On a alors $\varphi_2 \circ \varphi_1 : X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Z$ bijective. Donc $X \cong Z$. Par conséquent, $\cong$ est transitive.

$$\boxed{\text{Donc la relation binaire } (\cong) \text{ s'agit d'une relation d'équivalence sur les ensembles finis}}$$

(2) Soit $A, B \subset X$. Soit $x \in X$.
On a les équivalences :

$$\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbf{1}_B(x) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$$

car les indicatrices sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.
Le résultat étant vérifié pour tout $x \in X$, on a donc l'égalité des fonctions $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

Soit $x \in X$. On a les trois possibilités disjointes :
- ou bien $x \notin A \cup B$ et donc $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 0 = 0 + 0 - 0 = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$
- ou bien $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$, donc
  - ou bien $x \in A$ et $x \notin B$ et donc $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 0 - 0 = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$
  - ou bien $x \notin A$ et $x \in B$ et donc $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 0 + 1 - 0 = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$
- ou bien $x \in A \cap B$ et donc $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = 1 = 1 + 1 - 1 = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

Dans tous les cas $\mathbf{1}_{A\cup B}(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_{A\cap B}(x)$

$$\boxed{\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \text{ et } \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}}$$

(3) Soit X un ensemble fini. Soit $U \subset X$. Notons $Y = C_X(U)$, le complémentaire de U dans X.
C'est-à-dire $Y = \{x \in X \mid x \notin U\}$. On a $U \cap Y = \emptyset$ et $U \cup Y = X$.
Donc $\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{U\cup Y} = \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_{U\cap Y} = \mathbf{1}_U + \mathbf{1}_Y$ car $\mathbf{1}_{U\cap Y} = \mathbf{1}_\emptyset = 0$.
Puis on a vu en cours que

$$|X| = \sum_{x\in E} \mathbf{1}_X(x) = \sum_{x\in E} \Big(\mathbf{1}_U(x) + \mathbf{1}_V(x)\Big) = \sum_{x\in E} \mathbf{1}_U(x) + \sum_{x\in E} \mathbf{1}_Y(x) = |U| + |Y|$$

$$\boxed{\text{Si } U \subseteq X, \text{ alors } |X \backslash U| = |Y| = |X| - |U|.}$$

(4) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
On suppose qu'il existe une injection $\varphi : X \hookrightarrow Y$.
Notons $\psi : X \to \varphi(X)$, $x \mapsto \varphi(x)$.
Cette fonction est bien définie puisque nécessairement $\varphi(x) \in \varphi(X)$.
Par ailleurs, compte-tenu de la définition de $\varphi(X)$, ψ est surjective de X sur $\varphi(X)$.
Enfin si $\psi(x) = \psi(x')$, alors $\varphi(x) = \varphi(x')$ et donc $x = x'$ car φ est injective, donc ψ également.
Nous avons donc une bijection de X sur $f(X)$, donc $|X| = |f(X)|$.
Enfin, $f(X) \subset Y$. Donc d'après la question précédente : $|f(X)| \leqslant |Y|$.

$$\boxed{\text{S'il existe une injection } \varphi : X \hookrightarrow Y, \text{ alors } |X| \leq |Y|.}$$

(5) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
Supposons qu'il existe une surjection $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$.
Alors $f(X) = Y$ et donc $|Y| = |f(X)|$.
$f(X) = Y$ est fini, on peut supposer $f(X) = \{y_1, \dots y_r\}$ (où $r = |Y|$).
Pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, y_i admet (au moins) un antécédent dans X.
Donc il existe $x_i \in X$ tel que $f(x_i) = y_i$.
Nécessairement, pour $i \neq j$, $x_i \neq x_j$, sinon on aurait $y_i = f(x_i) = f(x_j) = y_j$.
Par conséquent $\{x_1, \dots x_r\} \in X$ et donc d'après (3) ; $r = |\{x_1, \dots x_r\}| \leqslant |X|$.

$$\boxed{\text{S'il existe une surjection } \varphi : X \twoheadrightarrow Y, \text{ alors } |X| \geq |Y|.}$$

(6) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
On suppose qu'il existe deux injections $\varphi_1 : X \hookrightarrow Y$ et $\varphi_2 : Y \hookrightarrow X$.
D'après la question (4), $|X| \leqslant |Y|$ et $|Y| \leqslant |X|$.
Donc $|X|$ et $|Y|$ sont en bijection avec le même ensemble $\mathbb{N}_{|X|}$. Ils sont en bijection.

$$\boxed{\text{S'il existe deux injections } \varphi_1 :\hookrightarrow Y \text{ et } \varphi_2 : Y \hookrightarrow X, \text{ alors } X \cong Y.}$$

(7) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
On suppose qu'il existe deux surjections $\varphi_1 : X \twoheadrightarrow Y$ et $\varphi_2 : Y \twoheadrightarrow X$, D'après la question (5), $|X| \leqslant |Y|$ et $|Y| \leqslant |X|$.
Donc $|X|$ et $|Y|$ sont en bijection avec le même ensemble $\mathbb{N}_{|X|}$. Ils sont en bijection.

$$\boxed{\text{S'il existe deux surjections } \varphi_1 : X \twoheadrightarrow Y \text{ et } \varphi_2 : Y \twoheadrightarrow X, \text{ alors } X \cong Y.}$$

II. Autour des ensembles dénombrables

Dans cette partie, X désigne un ensemble de cardinal infini.

(8) On suppose qu'il existe $\varphi : X \to \mathbb{N}$ injective.
ATTENTION φ n'est pas nécessairement bijective !
Exemple : φ pourrait être $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$.
Notons $M = \varphi(X) \subset \mathbb{N}$ et $\psi : X \to M$, $x \mapsto \varphi(x)$ est bijective (comme pour (4)).
M est un ensemble constitué d'entiers mais a priori avec des trous.
M est nécessairement infini (au sens de non fini), sinon on aurait un injection de $\mathbb{N}_{|M|}$ sur $\mathbb{N}$. Impossible.
Notons $\theta : M \to \mathbb{N}$, $m \mapsto |\{k \in M \mid k \leqslant m-1\}| = \sum_{k<m} \mathbf{1}_M(k)$.
$\theta(m)$ compte le nombre d'entiers de M strictement plus petit que m.
θ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$.
θ est injective : si $m \neq m' \in M$, supposons $m < m'$ (SPDG).
Alors $\{k \in M \mid k \leqslant m-1\} \subset \{k \in M \mid k \leqslant m'-1\}$, donc d'après (3) :
$\theta(m') - \theta(m) = |\{k \in M \mid m \leqslant k \leqslant m'-1\}| \geqslant 1$
car $m \in \{k \in M \mid m \leqslant k \leqslant m'-1\}$, non vide donc et ainsi $\theta(m') \neq \theta(m)$.
θ est surjective : supposons que $\theta(M) \neq \mathbb{N}$.
Donc $\{h \in \mathbb{N} | h \notin \theta(M)\}$ est non vide, et inclus dans $\mathbb{N}$. Il admet un plus petit élément h.
$h \neq 0$: en effet M est non vide et admet un plus petit élément mm. On a $\theta(m) = 0 \in \theta(M)$.
Ainsi, il existe $m_0 \in M$ tel que $\theta(m_0) = h-1$ avec $h \in \mathbb{N}$.
M est infini, $\{m \in M | m > m_0\} \subset \mathbb{N}$ est non vide : il admet un plus petit élément m_1.
Nécessairement $\theta(m_1) = \theta(m_0) + 1 = (h-1) + 1 = h$. Contradiction.
Ainsi $\theta(M) = \mathbb{N}$ et θ est surjective.
On a donc $\theta \circ \psi : X \to \mathbb{N}$ bijective, par composition de fonctions bijectives.

$$\boxed{\text{Ainsi } X \cong \mathbb{N}.}$$

(9) On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to X$ surjective.
Ainsi, pour tout $x \in X$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $x = \varphi(n_x)$.
On a donc une injection $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto n_x$.
(Elle est bien injective : si $\psi(x) = \psi(x')$, alors $n_x = n_{x'}$ et donc $x = \varphi(n_x) = \varphi(n_{x'}) = x'$.)
D'après la question précédente :

$$\boxed{X \cong \mathbb{N}.}$$

On souhaite montrer que $\mathbb{R} \ncong \mathbb{N}$.

(10) Dans un premier temps, on suppose que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \cong \mathbb{N}$.
On peut donc noter $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) = \{f_0, f_1, ...\}$.
Considérons $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ définit par : $\varphi(n) = 1 - f_n(n)$.
Comme $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi = f_h$.
Mais alors : $\varphi(h) = f_h(h)$ et $\varphi(h) = 1 - f_h(h)$. Impossible !
On a une contradiction

$$\boxed{\text{Nécessairement : } \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \ncong \mathbb{N}.}$$

(11) Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable.
Alors il existe une bijection et a fortiori un injection h de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{N}$.
Soit $\Omega : \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \times 10^{-k}$.
Ω est bien définie car la suite (on parle de série) : $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \times 10^{-k}\right)_n$ est convergente :

- c'est une suite croissante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} f(k) \times 10^{-k} - \sum_{k=0}^{n} f(k) \times 10^{-k} = f(n+1)10^{-(n+1)} \geqslant 0$

- c'est une suite majorée : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)\times 10^{-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 1\times 10^{-k} = \frac{1-10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} \leqslant \frac{10}{9}(=1,111111\dots 11)$.

  On a exploité la somme d'une suite géométrique de raison 10^{-1}.

  Et par ailleurs, Ω est clairement injective.

Par composition, $\Omega\circ h$ est un injection de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\{0,1\})$ sur $\mathbb{N}$ et donc, d'après (8), $\mathcal{F}(\mathbb{N},\{0,1\})$ est dénombrable.
Ceci est absurde d'après (10). Par conséquent :

$$\boxed{\mathbb{R}\text{ n'est pas dénombrable.}}$$

(12) Soit $X\subset\mathbb{R}$ dénombrable. Supposons que $Y=\mathbb{R}\backslash X$ est également dénombrable.
Il existe donc $\varphi_1:\mathbb{N}\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$ et $\varphi_2:\mathbb{N}\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$.
Soit $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $n\mapsto\begin{cases}\varphi_1(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ pair}\\ \varphi_2(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$
φ est surjective :
Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
ou bien $x\in X$ et donc $x=\varphi(2\varphi_1^{-1}(x))$,
ou bien $x\in Y$ et donc $x=\varphi(2\varphi_2^{-1}(x)-1)$.
dans tous les cas, x admet un antécédent par φ.
φ est injective :
Si $\varphi(x)=\varphi(x'):=t$, alors selon la parité de t, x et $x'\in X$ ou bien x et $x'\in Y$.
Dans le premier cas $\varphi_1(x/2)=\varphi_1(x'/2)$ donc $x=x'$ car φ_1 est injecitve.
Dans le second cas $\varphi_2(x+1/2)=\varphi_2(x'+1/2)$ donc $x=x'$ car φ_2 est injecitve.
Ainsi, φ est bijective et donc $\mathbb{R}$ est dénombrable. Absurde.

$$\boxed{\text{Si } X\subset\mathbb{R} \text{ est dénombrable, alors } \mathbb{R}\backslash X \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

Remarque D'après la question (9), la démonstration de la seule surjectivité de φ aurait été suffisante.

(13) Considérons $\varphi_{\mathbb{Z}}:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$:

$$\varphi_{\mathbb{Z}}:n\mapsto\begin{cases}\frac{n}{2} & (\geqslant 0) \quad \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{-1-n}{2} & (<0) \quad \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $y\in\mathbb{Z}$, alors si $y\geqslant 0$, alors $2y\in\mathbb{N}$, est pair donc : $\varphi_{\mathbb{Z}}(2y)=\frac{2y}{2}=y$ car $2y$
et si $y\leqslant -1$, alors $-1-2y\geqslant 2-1=1\in\mathbb{N}$, est impair donc : $\varphi(-1-2y)=\frac{-1-(-1-2y)}{2}=y$.
Donc $\varphi_{\mathbb{Z}}$ est surjective.
Soient $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ tel que $\varphi_{\mathbb{Z}}(x_1)=\varphi_{\mathbb{Z}}(x_2)=:t$.
Nécessairement ce nombre t est positif ou négatif.
Si $t\geqslant 0$, alors $t=\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{2}$ et donc $x_1=x_2$.
Si $t<0$, alors $t=\frac{-1-x_1}{2}=\frac{-1-x_2}{2}$ et donc $x_1=x_2$.
Donc $\varphi_{\mathbb{Z}}$ est injective.
Ainsi, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ et donc

$$\boxed{\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}}$$

Remarque : En fait, lors de la démonstration de la surjectivité, on a donné $\varphi_{\mathbb{Z}}^{-1}$.

(14) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ (fixé, mais aussi grand qu'on veut).
Considérons $(X_i)_{0\leq i\leq n}$ une collection d'ensembles dénombrables.
Notons, pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, $\varphi_i:X_i\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini (dénombrable).
Considérons p_1, p_2,… p_n, n nombre premiers distincts.
Soit $\Phi:X_0\times X_1\times\cdots\times X_n\to\mathbb{N}$, $x=(x_0,x_1,\dots x_n)\mapsto\displaystyle\prod_{k=0}^{n}p_k^{\varphi_k(x_k)}$.
Alors Φ est un injection de $X_0\times X_1\times\ldots\times X_n$ sur $\mathbb{N}$.
En effet par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, si $\Phi(x)=\Phi(x')$,
alors, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\varphi_k(x_k)=\varphi_k(x'_k)$,
Ainsi, par injection des φ_k : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $x_k=x'_k$.
Et par conséquent $x=x'$.
En appliquant le résultat de la question (8) :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^* \text{ et } (X_i)_{0\leq i\leq n} \text{ une collection d'ensembles dénombrables, } X_0\times X_1\times\ldots\times X_n \text{ est dénombrable.}}$$

(15) L'application $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(a,b)\mapsto \frac{a}{b}$ est clairement surjective.
$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables.
D'après la question précédente (avec $n=2$), $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est donc dénombrable.
Par composition, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Donc d'après (9)

$$\boxed{\mathbb{Q}\cong\mathbb{N}.}$$

III. Autour des nombres transcendants

On souhaite montrer dans cette partie que $\mathbb{T}\neq\emptyset$ et est indénombrable. On pose dans cette partie E un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles qui sont soit finis, soit dénombrables.

(16) En posant $B_0=A_0$ et pour tout $n\geq 0$:

$$B_{n+1}=A_{n+1}\backslash\left(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)$$

Notons, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: " $\bigcup_{k=0}^n A_k = \biguplus_{k=0}^n B_k$".
- $A_0=B_0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  On a donc, par définition : $B_{n+1}=A_{n+1}\backslash(\bigcup_{i=0}^n A_i)=A_{n+1}\backslash\biguplus_{k=0}^n B_k$.
  Donc : $A_{n+1}=B_{n+1}\bigcup(\biguplus_{k=0}^n B_k)$.
  Puis, si $x\in B_{n+1}$, nécessairement, $x\notin\biguplus_{k=0}^n B_k$,
  donc la réunion est disjointe : $A_{n+1}=B_{n+1}\biguplus(\biguplus_{k=0}^n B_k)$.
  Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Par théorème (non trivial) de convergence d'ensembles par réunion croissante :

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\biguplus_{n\in\mathbb{N}}B_n}$$

(17) On pose $X=\mathcal{F}(E,\mathbb{N})$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $X_n=\{f\in X,\ f_{|B_n}\text{ est injective}\}$. X est non vide.
Par exemple l'application constante $f:E\to\mathbb{N}$, $x\mapsto 1$ est élément de X.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $B_n\subset A_n$, par définition de construction de B_n.
A_n est fini ou dénombrable, il en est de même de B_n.
Ainsi, il existe une injection de B_n dans $\mathbb{N}$ (non surjective si B_n est fini), notée $\overline{f}$.
Le prolongement de $\overline{f}$ à E, obtenue en posant $f:E\to\mathbb{N}$, $x\mapsto\begin{cases}1 & \text{si } x\notin B_n\\ \overline{f}(x) & \text{si } x\in B_n\end{cases}$
vérifie $f_{|B_n}=\overline{f}$ injective. Donc $f\in X_n$.

$$\boxed{\text{Ainsi } X \text{ et } X_n \text{ sont non vides. Et il existe } \varphi_n : B_n\to\mathbb{N}(=\overline{f}) \text{ injective.}}$$

(18) On a déjà répondu à cette question :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ f_n : x\mapsto\begin{cases}\varphi_n(x)\text{ si } x\in B_n\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\quad\text{appartient à } X_n.}$$

(19) Considérons $g:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\to\mathbb{N}^2$, $x\mapsto(k,f_k(x))$ pour $x\in B_k$.
g est bien défini car pour tout $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\exists!k\in\mathbb{N}$ tel que $x\in B_k$ (question (16)).
Soient $x,x'\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ tels que $g(x)=g(x')$.
Alors nécessairement x,x' appartiennent au même B_k.
Et ensuite $\varphi_k(x)=\varphi_k(x')$ et donc $x=x'$ car φ_k est injective.

$$\boxed{\text{Donc } g:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\hookrightarrow\mathbb{N}^2.}$$

(20) On a vu que le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable avec (14) (et $n=2$).
Donc il existe un bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, elle est injective.
Par composition avec g de la question précédente, il existe une injection de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ dans $\mathbb{N}$.
Et ainsi, d'après (8) :

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\cong\mathbb{N}}$$

(21) Un nombre x qui n'est pas transcendant est dit algébrique,
et pour lui, il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$.
Finalement :
x est algébrique ssi $\exists P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $x \in P^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}$ (car x est réel).
$x \notin \mathbb{T}$ ssi $x \in \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]} \left(P^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}\right)$.

$$\boxed{\mathbb{R}\backslash\mathbb{T} = \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]} (\mathbb{R} \cap P^{-1}(\{0\}))}$$

(22) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \{P \in \mathbb{Z}[X] \text{ tel que } \deg P = n\}$ puis $A_n = \{\mathbb{R} \cap P^{-1}(0), P \in Z_n\}$.
Alors comme $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, on a :

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{T} = \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]} (\mathbb{R} \cap P^{-1}(\{0\})) = \bigcup_{P\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n} (\mathbb{R} \cap P^{-1}(\{0\})) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{P\in Z_n} (\mathbb{R} \cap P^{-1}(\{0\})) \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

C'est une sorte de sommation par paquets, ou plutôt une réunion par paquets. Il reste à montrer que chaque A_n est au plus dénombrable.
Fixons $n \in \mathbb{N}$.
$\chi_n : \mathbb{Z}^{n+1} \to Z_n$, $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est bijective.
Puis $\mathbb{Z}^{n+1}$ est dénombrable d'après (13) et (14). Donc Z_n est dénombrable.
Notons, pour P, polynôme de degré n, $\mathcal{Z}(P) = P^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}$, l'ensemble des zéros de P.
$|\mathcal{Z}(P)| \leqslant n$. On peut ranger par ordre croissant ces racines.
Pour tout $x \in A_n$, $\exists P \in Z_n$, $k \in \mathbb{N}_n$ tel que x est la $k$eme racine de P.
Soit : $\zeta : Z_n \times \mathbb{N}_n \mapsto A_n$, $(P, k) \mapsto \begin{cases} k\text{eme racinde de } P & \text{si } |\mathcal{Z}(P_n)| \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On notera que $0 \in A_n$, *c'est la racine de* X^n.
Alors d'après la remarque précédente, ζ est surjective.
Par composition, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur A_n.
Ainsi A_n est dénombrable d'après (9).
Par conséquent, en appliquant (20), $\mathbb{R}\backslash\mathbb{T}$ est dénombrable.
Et enfin, avec (12) :

$$\boxed{\mathbb{T} \text{ n'est pas dénombrable i.e. } \mathbb{T} \ncong \mathbb{N}.}$$