AUTOUR LES ENSEMBLES FINIS, DÉNOMBRABLES ET INDÉNOMBRABLES

DM MPSI3 2024-2025 LYCÉE PIERRE DE FERMAT
A FAIRE À DEUX. A RENDRE POUR LE 11 OCTOBRE

Préliminaires

- Si X est un ensemble, on note $|X|$ son cardinal.

- On dit que deux ensembles X et Y sont *équipotents* s'il existe une bijection $\varphi : X \to Y$. On note cette relation $X \cong Y$

- On dit qu'un ensemble X de cardinal infini est *dénombrable* si il existe une bijection $\varphi : X \to \mathbb{N}$, et il est qualifié de *indénombrable* dans le cas échéant. On dit que X est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

- Soit X un ensemble. On note $\mathcal{P}(X)$ l'enemble des parties de X. Pour tout $U \in \mathcal{P}(X)$, on note $\mathbf{1}_U : X \to \{0, 1\}$:

$$\mathbf{1}_U : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut ainsi définir le cardinal de U de la manière suivante, si X est au plus dénombrable:

$$|U| = \sum_{x \in X} \mathbf{1}_U(x) \leq +\infty$$

- On pose $\mathbb{N}$ l'enemble des nombre entiers naturels avec 0 y compris, $\mathbb{Z}$ l'enemble des entiers relatifs et $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, ...\}$ l'ensemble des nombre premiers ordonné. On définit $\mathbb{Q}$ à partir de ces deux ensembles:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | \ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ a \wedge b = 1\}$$

- On pose $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et $\mathbb{T}$ l'enemble des nombres transcendants:

$$\mathbb{T} = \{\alpha \in \mathbb{R} | \ \forall P \in \mathbb{Z}[X], \ P(\alpha) \neq 0\}$$

Les question marqués par (*) sont à être considéré plus difficile.

I. Autour de l'équipotence sur les ensembles finis

(1) Montrer que la relation binaire $(\cong)$ s'agit d'une relation d'équivalence sur les ensembles finis, c'estt à dire qui vérifie les propriétés suivantes :
  - **Réfléxivité:** Pour tout ensemble fini X, $X \cong X$
  - **Symétrique:** Pour tout couple d'ensembles finis (X, Y), $X \cong Y \Longrightarrow Y \cong X$
  - **Transitivité:** Pour tout (X, Y, Z) triplet d'ensembles finis, si $X \cong Y$ et $Y \cong Z$ alors $X \cong Z$

(2) Soit X un ensemble, $(A, B) \in \mathcal{P}(X)^2$. Montrer que $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$

(3) Soit X un ensemble fini. Montrer que si $U \subseteq X$, alors $|X \backslash U| = |X| - |U|$.

(4) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
Montrer que s'il existe une injection $\varphi : X \to Y$, alors $|X| \leq |Y|$.

(5) (*) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
Montrer que s'il existe une surjection $\varphi : X \to Y$, alors $|X| \geq |Y|$.

(6) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
Montrer que s'il existe deux injections $\varphi_1 : X \to Y$ et $\varphi_2 : Y \to X$, alors $X \cong Y$.

(7) Soient X et Y deux ensembles de cardinaux finis.
Montrer que s'il existe deux surjections $\varphi_1 : X \to Y$ et $\varphi_2 : Y \to X$, alors $X \cong Y$.

II. Autour des ensembles dénombrables

Dans cette partie, X désigne un ensemble de cardinal infini.

(8) On suppose qu'il existe $\varphi : X \to \mathbb{N}$ injective. Montrer alors que $X \cong \mathbb{N}$

(9) On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to X$ surjective. Montrer alors que $X \cong \mathbb{N}$.

On souhaite montrer que $\mathbb{R} \ncong \mathbb{N}$.

(10) Dans un premier temps, on suppose que $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \cong \mathbb{N}$. On peut donc noter $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\}) = \{f_0, f_1, ...\}$. En considérant $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ définit part:

$$\varphi(n) = 1 - f_n(n)$$

Aboutir à une contradiction.

(11) En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(12) Montrer alors que si $X \subset \mathbb{R}$ est dénombrable, alors $\mathbb{R} \backslash X$ n'est pas dénombrable.

(13) Montrer que $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ en considérant l'application $\varphi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$:

$$\varphi_{\mathbb{Z}} : n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{1-n}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

(14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_i)_{0 \leq i \leq n}$ une collection d'ensembles dénombrables, et notons φ_i une bijection de $X_i \to \mathbb{N}$ associé à X_i pour $0 \leq i \leq n$. En exploitant l'unicité de la décomposition des entiers naturels en produit de nombres premiers, montrer que le produit cartésien $X_0 \times X_1 \times ... \times X_n$ est dénombrable.

(15) En déduire que $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$

III. Autour des nombres transcendants

On souhaite montrer dans cette partie que $\mathbb{T} \neq \varnothing$ et est indénombrable. On pose dans cette partie E un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles qui sont soit finie, soit dénombrables.

(16) En posant $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 0$:

$$B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)$$

Montrer que l'union à gauche:

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

est disjoint.

(17) On pose $X = \mathcal{F}(E, \mathbb{N})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \{f \in X,\ f_{|B_n} \text{ est injective}\}$. Montrer que ces deux ensembles sont non vides, et justifier qu'il existe $\varphi_n : B_n \to \mathbb{N}$ injective.

(18) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \varphi_n(x) \text{ si } x \in B_n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

appartient à X_n.

(19) En déduire que $g : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \mathbb{N}^2$:

$$g : x \mapsto (k, f_k(x)) \text{ pour } x \in B_k$$

Réalise une injection.

(20) En déduire que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cong \mathbb{N}$$

(21) Montrer que:

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{T} = \bigcup_{P\in\mathbb{Z}[X]} (\mathbb{R} \cap P^{-1}(\{0\}))$$

(22) Conclure que $\mathbb{T} \ncong \mathbb{N}$.