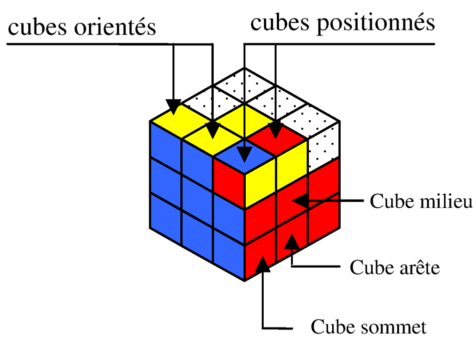
Rubik's Cube

TD travaillé essentiellement avec les données des sites
`http://trucsmaths.free.fr/rubik_groupe.htm#structure.`
`http://eljjdx.canalblog.com/archives/2010/08/29/19973123.html`
`http://mp.cpgedupuydelome.fr/document.php?doc=Article%20-%20Résoudre%20le%20Rubik.txt`

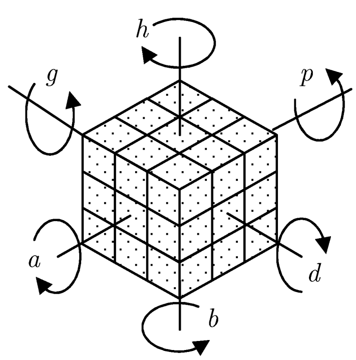
Le cube hongrois (ou **Rubik's Cube**) est un jeu bien connu qui consiste par une série de mouvements à retrouver le cube parfaitement coloré.
Il existe une liste (finie) de mouvement possible. On remarquera qu'aucune ne peut permettre de changer le positionnement relatif des cubes du centre. D'une certaine façon, les couleurs centrales sont fixées (classiquement : le rouge en face du orange, le blanc face au jaune et le bleu face au vert).
Résoudre le **Rubik's Cube**, c'est d'une certaine façon placer les autres cubes (cubes-arrêtes et cubes-sommets) aux bons endroits, en fonction des cubes-centres.
Nous noterons que l'ensemble des mouvements formes un groupe « qui agit »sur les faces du **Rubik's Cube**.
On note G le groupe du Rubik's Cube

Nous avons besoin de notations :

— concernant le cube :
Il y a trois types de cubes-faces : les cubes milieu qui sont considérés fixes, les cubes arrêtes et les cubes sommets.
On dit qu'un cube-face est positionné si il se trouve à « sa »place (bien orientés ou non).
On dit qu'un cube-face est orienté si il se trouve à « sa »place et qu'il est bien orienté (cela se voit en fonction des cube-milieu ! *Il faut bien comprendre cela*)



— concernant le groupe des mouvements :
On note respectivement pour les faces avant, postérieure, gauche, droite, haut et bas : a, p, g, d, h et b, la manipulation qui consiste en un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre de la face.
a^{-1}, p^{-1}, g^{-1}, d^{-1}, h^{-1} et b^{-1} ou indifféremment a', p', g', d', h' et b', la manipulation qui consiste en un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de la face.
a^2, p^2, g^2, d^2, h^2 et b^2, sont des manipulations qui consiste en un demi-tour de la face.



1 Codage

▷ Exercice 1.1. Exemple de codage
Comment agit sur le cube la transformation

$$S = a^2h^2p^2gd'ad^2b'h'dp^2gh^2dp^2dpad^2h$$

appelée SUPERFLIP ou CENTRE ?
On attend une réponse expérimentale.

2 Etude du groupe G

▷ Exercice 2.1. G comme un sous-groupe de S_{24}

1. Quel est le cardinal de S_{24} ? Sans le calcul explicitement (juste en produit de nombres premiers), montrer que Card(G) divise Card(S_{24}).
2. On sait que a, p, g, d, h et b engendrent G.
   On note pour cela $G =< a, p, g, d, h, b >$ *(notation parfois vue également pour les sous-espaces vectoriels engendrés)* On code les éléments du cube de la façon suivante :

			1	2	3						
			4	h	5						
			6	7	8						
9	10	11	17	18	19	25	26	27	33	34	35
12	g	13	20	a	21	28	d	29	36	p	37
14	15	16	22	23	24	30	31	32	38	39	40
			41	42	43						
			44	b	45						
			46	47	48						

   Décomposer les transformations a, p, g, d, h et b en produit de cycles décrits avec les éléments du cube codé comme précédemment.
3. Montrer que $G =< a, p, g, d, h >$
4. On a mieux, on a $G =< m_{991}, m_{992} >$ où $m_{991} = hpghg'h'p'$ et $m_{992} = d^2agb'd'$.
   Comment le démontrer ?

▷ Exercice 2.2. Autour du cardinal de G

1. Calculer le cardinal de G.
   On doit trouver $G = 43252003274489856000$
2. Ecrire le cardinal de G comme produit de facteurs premiers. Quel est le plus grand facteur premier de G.
3. On note $t \in G$ (elle même composée des éléments a, p, h...).
   Quelle est la plus grande taille d'orbite possible pour une facette C : $\{t^k \cdot C, k \in \mathbb{N}\}$? Quel est le rapport avec la question précédente ?

▷ Exercice 2.3. Sous-groupe.
On note :

— F_A, l'ensemble (des facettes) des cubes-arêtes.
— F_S l'ensemble (des facettes) des cubes-sommets.
— H_A le groupe des manipulations du RUBIK'S CUBE qui n'affecte que les cubes-arêtes, c'est-à-dire *le stabilisateur de l'ensemble* F_S :

$$H_A = \text{Stab}(F_S) = \{s \in G \mid \forall\ f_S \in F_S, s \cdot f_S = f_S\}$$

— H_S le groupe des manipulations du RUBIK'S CUBE qui n'affecte que les cubes-sommets , c'est-à-dire *le stabilisateur de l'ensemble* F_A :

$$H_S = \text{Stab}(F_A) = \{s \in G \mid \forall\ f_A \in F_A, s \cdot f_A = f_A\}$$

1. Quel est le cardinal de F_A ? Celui de F_S ?

2. Quel est le cardinal de H_A ? Celui de H_S ?
3. Quelle relation entre $\mathrm{Card}(G)$, $\mathrm{Card}(H_S)$ et $\mathrm{Card}(H_A)$?
   Sauriez-vous expliquer pourquoi ?

▷ **Exercice 2.4. Ordre**
L'ordre d'un élément d'un groupe (ici un mouvement) est le nombre de fois qu'il faut effectuer le mouvement pour revenir à la position initiale.
En termes de théorie des groupes, l'ordre d'un élément x d'un groupe est le plus petit entier n tel que x^n soit l'élément neutre.

1. Montrer que tout élément de G admet un ordre (quelle est l'hypothèse principale qui explique ceci ?).
2. Quel est l'ordre de a, l'ordre de d, l'ordre de a^2d^2 ? Quel est l'ordre de ad ?
3. Donner des exemple d'éléments de G d'ordre 2, puis 3, 4, 5 et 6 respectivement.
4. Montrer que si $s \in G$ est d'ordre m, alors $m|\mathrm{Card}G$. (Lagrange)
   En déduire les ordres possibles premiers des éléments de G.
5. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de G ?

Il y a des éléments d'ordres grands, par exemples : 99, 105, 231, 315, 1260.

6. On appelle mouvement de Butler l'élément $B = da^2p^{-1}hp^{-1}$.
   (a) Au bout de 15 Butler, que se passe-t-il pour les les 8 CS ? Et au bout de 45 Butler ?
   (b) Après 14 mouvements de Butler, que se passe-t-il pour les les 12 CA ? Et au bout de 28 Butler ?
   (c) En conclure la valeur de l'ordre du mouvement de Butler.

   On admet que c'est le mouvement de G d'ordre le plus grand.

3 Quelques sous-groupes privilégiés

▷ **Exercice 3.1. Application restreinte sur $S_8 \times S_{12}$**
On note $\Phi : G \to S_8 \times S_{12}$, $\sigma \mapsto (\sigma_{C_S}, \sigma_{C_A})$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(\Phi) = \{(\sigma, \sigma') \in S_8 \times S_{12} \mid \epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')\}$
2. Peut-on transformer le cube en faisant uniquement une permutation de deux cubes-arrêtes ?

▷ **Exercice 3.2. Groupe dérivé ou ensemble des commutateurs**
On note pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$, puis $G' =< [\sigma, \sigma'], \sigma, \sigma' \in G >$.
L'ensemble G' est un sous-groupe de G qui s'appelle *sous-groupe dérivée de* G.

1. Montrer que $G' = \{g \in G \mid \epsilon(g_{|F_S}) = \epsilon(g_{|F_A}) = 1\}$
2. En déduire le cardinal de G'.

▷ **Exercice 3.3. Centre de G**
Le centre d'un groupe est l'ensemble des éléments du groupe qui commutent avec tous les autres. Le centre d'un groupe G est noté $Z(G)$. Ce n'est pas forcément un groupe.

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall\ h \in G, hg = gh\} = \{g \in G \mid \forall\ h \in G, hgh^{-1} = g\}$$

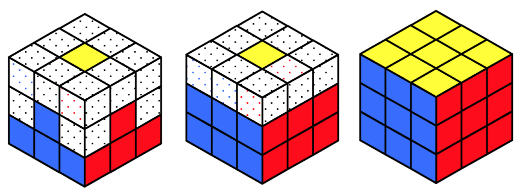
i.e $Z(G)$ est l'ensemble des éléments g qui sont leur propre conjugué.

1. On note $m_{490} = dgaphbdgapha2(MR)a2h'(MR)2p2(MR)'p2h(MR)2b$
   avec $MR =$ « middle right quarter turn »=quart de tour de la tranche de droite (celle qui coupe verticalement la face avant).
   Montrer que pour tout $h \in G$, $h \circ m_{490} = m_{490} \circ h$.
2. Montrer que $Z(G) = \{\mathrm{id}, m_{490}\}$

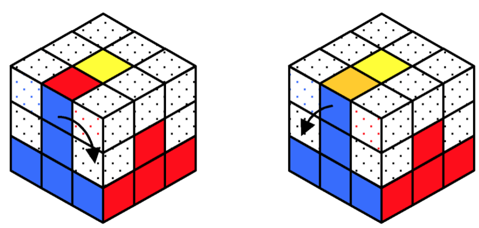
4 Vers une résolution

▷ Exercice 4.1. (Une) Méthode de résolution du Rubik's Cube
Le méthode classique consiste à agir par couronnes successives. Pour comprendre le principe, il faut se concentrer sur les commutateurs.

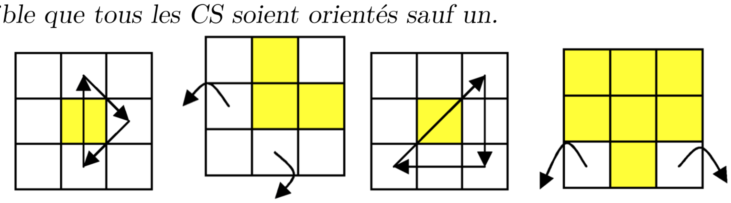
1. On suppose que $s, t \in G$, et qu'il existe C_1 et C_2 deux sous-ensemble de cube-face telles que :
   — $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
   — $C_1 \cup C_2 = C$, l'ensemble des cube-faces,
   — $s : C_1 \to C_1$ et $s_{|C_1}$ est une transposition (des éléments i et j, par exemple ; les autres sont invariants). $s_{|C_2}$ est quelconque
   — $t : C_2 \to C_2$ et $t_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, $\mathrm{t}_{|C_1}$ est quelconque
   Quel est l'effet de la transformation : $st^{-1}s^{-1}t$ sur C ?
2. On note C_3, la manipulation : $h'g'b'dbd'ghg'db'd'bg$.
   Montrer que $C_3 = st^{-1}s^{-1}t$ où s et t, à déterminer, vérifient les hypothèses de la question précédente.
   En déduire l'action de C_3 sur le cube.
3. Une stratégie pour résoudre le Rubik's cube consiste à résoudre le cube par couronnes successives :

   — On réalise la première couronne comme on peut
   — On réalise la seconde couronne avec les combinaisons $C_0 = aha'h'd'h'dh$ ou $\overline{C_0} = a'h'ahghg'h'$, selon la figure suivante

   — On réalise la troisième couronne
      — On positionne les quatre CA en exploitant la combinaison : $C_1 = h'a'd'hdhd'h'da$
      — On oriente les quatre CA en exploitant la combinaison : $C_2 = hahd'h^2gh'g'{h'}^2dh'a'$.
        A noter : il est impossible que tous les CA soient orientés sauf un.
      — On positionne les quatre CS en exploitant la combinaison $C_3 = h'g'b'dbd'ghg'db'd'bg$ (vue plus haut)
        A noter : il est impossible que tous ceux-ci soient positionnés sauf deux.
      — On oriente les quatre CS en exploitant la combinaison : $C_4 = hdb'd^2ada'h'ad'a'{d'}^2bd'$ *A noter : il est impossible que tous les CS soient orientés sauf un.*

4. Montrer que toutes ses transformations sont de la forme $hg^{-1}h^{-1}g$.
5. Application : résoudre votre Rubik's cube.

▷ Exercice 4.2. Nombre de Dieu
On appelle *nombre de Dieu*, le nombre minimal de coups nécessaires pour résoudre toute Rubik's Cube.

$$\mathcal{ND} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \forall\, g \in G, \exists\, a_1, a_2, \dots a_k \in \{a, p, h, b, d, g\} \mid g = \prod_{i=1}^{k} a_i\right\}$$

. (******) Montrer que $\mathcal{ND} = 20$.

Correction des exercices

Un petit peu de théorie (compléments : maths-adulte : `ttps://www.youtube.com/watc`?v=KMjeKHb7b2Q).

Définition - Action d'un groupe G sur un ensemble X
On considère un ensemble X quelconque (!) et $(G, *)$ un groupe.
On dit que G agit sur X (ou qu'on a une action du groupe G sur X), si il existe une application externe $\cdot : G \times X \to X$ telle que

— $\forall\, x \in X$, $e_G \cdot x = x$
— $\forall\, x \in X$, $\forall\, g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x$.

Comme chaque élément $g \in G$ admet un inverse, l'application : $X \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$, $x \mapsto g \cdot x$ est une bijection.
Et donc il y a une bijection Φ entre G et une partie de $\mathfrak{S}_X$, l'ensemble des permutations de X.
En fait Φ est même un morphisme injectif de $(G, *)$ sur $(\mathfrak{S}_X, \circ)$ (de qui donne le théorème de Cayley)

Cette définition simple (voire simpliste) demande peu d'hypothèses et donc a de nombreuses applications.
Parfois les actions de groupes G sur X permettent de mieux connaître X, parfois de mieux connaître G.
Dans la suite, nous considérons le groupe G du Rubik's Cub.

Nous le faisons agir, *tantôt* sur l'ensemble des 48 facettes ($\underbrace{54}_{6\times 9}-6$ facettes) - *exercice 2.1 par exemple*,
tantôt sur l'ensemble F_S ensembles de cubes-sommets, F_A l'ensemble des cube-arêtes
ou leur produit cartésien - *exercice 2.3. par exemple.*
Dans tous les cas, il s'agit de mieux connaître le groupe G
en visualisant différentes de ses actions sur différents ensembles.

Très souvent, pour étudier les actions de groupes, on commence par étudier les orbites et les stabilisateurs des éléments x de X.

Définition - Orbite et stabilisateur
On considère un ensemble X et un groupe $(G, *)$ agissant sur X.
Soit $x \in X$.

— On appelle orbite de x sous l'action de G l'ensemble $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$.
On notera que $\mathcal{O}(x) \subset X$.
— On appelle stabilisateur de x l'ensemble $\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.
On notera que $\text{Stab}(x) < G$ (sous-groupe).

On montre, si G est fini que, pour tout $x \in X$, $\text{card}(G) = \text{card}(\mathcal{O}(x)) \times \text{card}(\text{Stab}(x)$ (Formule des classes).
Elle conduit à l'équation des classes et la formule de Bernside.

On dit que l'action est :

— <u>transitive</u> si $\mathcal{O}(x) = X$: i.e. $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.
— <u>simplement transitive</u> si $\forall\, x, y \in X$, $\exists\, !g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.
— <u>libre</u> si pour tout $x \in X$, $\text{Stab}(x) = \{e\}$, (i.e. Φ est injective).
— <u>fidèle</u> si $\{g \in G \mid \forall\, x \in X, g \cdot x = x\} = \{e\}$ ou encore $\bigcap_{x \in X} \text{Stab}(x) = \{e\}$. Une action libre est donc fidèle.

Démonstration .
Pour démontrer le résultat du le théorème (formule des classes), on considère la relation d'équivalence sur G :
$g_1 \mathcal{R} g_2 : g_1^{-1} g_2 \in \text{Stab}(x)$ ou encore $g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot x = x \Leftrightarrow g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$.
(En fait, c'est toujours la même relation : celle du groupe distingué, celle du théorème de Lagrange,
celle de la congruence modulo H, puisque $\text{Stab}(x) < G$.)
Il s'agit bien d'une relation d'équivalence (celle de l'identification des images pour l'action $\cdot$).
La classe d'équivalence de e est l'ensemble $\{g \in G \mid g \cdot x = e \cdot x = x\}$, c'est donc exactement $\text{Stab}(x)$.
Soit $g' \in G$, la classe de g' est exactement

$$\{g \in G \mid (g')^{-1} g \cdot x = x\} = \{g \in G \mid (g')^{-1} g \in \text{Stab}(x)\} = \{g \in G \mid \exists\, h \in \text{Stab}_x \mid g = (g')^{-1} h\} = g' \cdot \text{Stab}_x$$

(avec = et non simplement inclusion, par inverse dans G).
Chaque classe est donc composée de $\text{card}(\text{Stab}(x))$ éléments.
Enfin, il y a $\text{card}(\mathcal{O}(x))$ classes différentes : on passe de l'une à l'autre par les $(g_i)_{i \in \mathbb{N}_p}$ tels que $\mathcal{O}_x = \{g_1 \cdot x, g_2 \cdot x, \dots g_p \cdot x\}$.
Bilan : G est décomposée en exactement $\text{card}(\mathcal{O}(x))$ classes d'équivalence, chacune composée de $\text{card}(\text{Stab}(x))$ éléments. □

Nous l'avons dit, dans la résolution ici, nous voyons agir G sur les ensembles C, F_S et F_A.
Mais toutes les transformations ne sont pas possibles : c'est-à-dire que l'action de G sur l'ensemble des 8 faces de F_S n'est pas directement en bijection avec le groupe S_8. Il faut être plus précis et cherché les invariance de ces actions de groupes, c'est classique (également) en mathématiques.
Mais la première action est celle sur l'ensemble des cubes possibles et d'ailleurs, on peut confondre un élément de g avec le cube transformé, obtenu après avoir appliqué la transformation g au Rubik's Cube résolu. Le résoudre consisterait donc bien à appliquer g^{-1}. C'est pourquoi les transformations a, p, g, d, h et $b (\in G)$ sont présentées à partir du Rubik's Cube résolu.
L'exercice 2.2. nous donne une bijection (description) afin de dénombrer G. Elle exprime le fait que

$$G \quad \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \quad \frac{S_8 \times \{0,1,2\}^7 \times S_{12} \times \{0,1\}^{11}}{\mathcal{R}}$$

En fait, il faudrait plutôt la bijection qui conserve la structure. Comme G est un groupe, il faudrait donner à l'ensemble de droite une structure de groupe, pour cela on exploite la notion de produit semi-directe de deux groupes...

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

Comme le montre la photo, le superflip a laissé tous les cubes de côté à leur place, mais à l'envers.
Précisément, les cubes-arêtes sont inversés ; alors que les cubes-sommets sont exactement à leur position et orientés comme il faut.

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. $\text{card}(S_{24}) = 24!$.
   Le Rubik's cube possède 8 cubes-sommets, 12 cubes-arêtes et 6 cubes-centres. A priori, il a donc 26 cubes à bouger.
   Notons C_S, C_A et C_C l'ensemble des cubes-sommets, l'ensemble des cubes-arêtes, l'ensemble des cubes-sommets et l'ensemble des cubes-centres respectivement.
   En fait, une opération de G permutent les éléments de C_S en éléments de C_S (avec peut-être un changement d'orientation), les éléments de C_A en éléments de C_A (avec peut-être un changement d'orientation) et les éléments de C_C en éléments de C_C.
   En fait nous allons considérer comme fixe l'axe Rouge-Orange (par exemple), il n'y a donc plus que 24 cubes à déplacer.
   A chacun des 24 places, on associe un numéro de 1 à 24 et chaque mouvement (ou combinaison de mouvement) de G correspond donc à un déplacement des 24 places (en fait plutôt des cubes qui occupaient ces places).
   G est clairement un groupe. Il est évident que toutes les permutations ne sont pas possibles (exemple : placer un cube arrête en place d'un cube sommet), donc G n'est pas S_{24}. On peut noter également, qu'ici seule la position de (mini-)cubes compte vraiment, il n'est pas nécessaire de s'intéresser à leur orientation (elle est donnée par le déplacement globale des 24 cubes caractéristiques).

$$\boxed{G \text{ est un sous-groupe de } S_{24}.}$$

Plus exactement, il est en bijection avec un sous-groupe de S_{24} (il faut bien évidemment numéroter les faces ici pour obtenir cette bijection).
D'après le théorème de Lagrange, le cardinal de tout sous-groupe h divise le cardinal du groupe H (s'il est fini), donc

$$\boxed{\mathrm{card}(G)|\mathrm{card}S_{24} = 24!}$$

En fait, dans cette question, nous avons fait agir G sur $F_A \times F_S \times C_4 \equiv \mathbb{N}_{24}$ (F_A et F_S définis en 2.3.).

2. Avec les notations données ici :
— $a = (18\ 21\ 23\ 20)(17\ 19\ 24\ 22)(7\ 28\ 42\ 13)(6\ 25\ 43\ 16)(8\ 30\ 41\ 11)$
— $b = (42\ 45\ 47\ 44)(23\ 31\ 39\ 15)(41\ 43\ 48\ 46)(14\ 22\ 30\ 38)(16\ 24\ 32\ 40)$
— $g = (10\ 13\ 15\ 12)(4\ 20\ 44\ 37)(11\ 16\ 14\ 9)(1\ 17\ 41\ 40)(6\ 22\ 46\ 35)$
— $d = (26\ 29\ 31\ 28)(5\ 36\ 45\ 21)(27\ 32\ 30\ 25)(33\ 48\ 24\ 8)(3\ 38\ 43\ 19)$
— $h = (2\ 5\ 7\ 4)(34\ 26\ 18\ 10)(3\ 8\ 6\ 1)(27\ 19\ 11\ 35)(33\ 25\ 17\ 9)$
— $p = (34\ 37\ 39\ 36)(2\ 12\ 47\ 29)(35\ 40\ 38\ 33)(1\ 14\ 48\ 27)(9\ 46\ 32\ 3)$
En fait, dans cette question, nous avons fait agir G sur l'ensemble des 48 faces qui ne sont pas des centres.
3. Il suffit de montrer que b peut-être engendré à partir des autres permutations, dans ce cas b n'est plus nécessaire dans la description de G.
C'est une question pour les amateurs (voire les professionnels du Rubik). En notant $P = dg'a2p2dg'$, on trouve $b = PhP$.
P est donc la manipulation qui permet de passer en haut la face de b, sans bouger les autres cubes (et sans utiliser b).
4. Cela signifie que G est un groupe d'ordre au plus 2.
En fait G n'est pas d'ordre 1 (comment le démontrer ?). Donc G est d'ordre 2.

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1. Considérons les déplacement des mini-cubes. On reprend les notations C_A, C_S définis plus haut.
On va considérer comme fixés les éléments de C_C. Cela est légitime, car après chaque mouvement de G, il est toujours possible de repositionner le cube (dans sa totalité) avec une orientation fixée : par exemple le centre rouge face à nous, le bleu à droite, le jaune au-dessus, orange derrière, vert à gauche et blanc en dessous (cf photo).
G déplace les C_A sur des C_A et les C_S sur des C_S, mais cela n'est pas suffisant pour caractériser avec exactitude les éléments g de G. Il faut également tenir compte des orientations des 12 cubes de C_A (2 possibilités par cube) et des 8 cubes de C_S (3 possibilités par cube).

Pour les 12 cubes arêtes.
Nous allons donc repérer (arbitrairement) pour chaque cube arête une facette de référence notée +.
Arbitrairement, nous assignons le + aux facettes rouges et orange (face et dos du Rubik's Cube), et le − est faces jaunes et blanches (dessus et dessous du Rubik's Cube).
Très concrètement, en reprenant les notations de l'exercice 2.1, les cubes arêtes orientés sont donc :
(7,18+) (jaune-rouge) - (13,20+) (bleue-rouge) - (23+,42) (rouge-blanche) - (21+,28) (rouge-verte) - (26+,5) (verte-jaune) - (31+,45) (verte-blanche) - (29,36+) (verte, orange) - (34+,2) (orange-jaune) - (37+,12) (orange-bleue) - (39+,47) (orange-blanche) - (10+,4) (bleue-jaune) - (15+,44) (bleue-blanche).
(la face rouge est centrée en a, la face orange en p, la jaune en h et la blanche en b).
Lorsqu'on applique un transformation au Rubik's Cube, les cubes arêtes sont déplacés sur une autre position de cube arête (les centres sont fixes - où remis en place par une rotation globale).
Chaque cube arête dans sa nouvelle position a deux orientations possibles. On associera à chacun de ces cubes arêtes la valeur 0 si la face repérée (+) de ce cube se trouve sur la face repérée (+) du cube résolu et la valeur 1 sinon.
Par exemple si $(13, 20)$ *se trouve en position* $(31, 45)$*, alors on associe* 0 *si on a précisément* 13 *sur* 45 *et* 20+ *sur* 31+...
Ainsi, concernant les cubes arêtes, une transformation exécute une permutation des 12 cubes ET génère une série de 12 nombres 0 ou 1.
Notons que pour chacune des 6 transformations h, g, a, d, p, b, la somme des 12 nombres garde sa parité.
Pour le démontrer, nous allons étudier deux transformation p (rotation sur la face orange) et d (rotation de la face verte), par exemple.
• Après p, les cubes arêtes (7,18+) (jaune-rouge) - (13,20+) (bleue-rouge) - (23+,42) (rouge-blanche) - (21+,28) (rouge-verte) - (26+,5) (verte-jaune) - (31+,45) (verte-blanche) - (10+,4) (bleue-jaune) - (15+,44) (bleue-blanche) ne bougent pas.
En revanche les quatre autres cubes tournent mais les facettes oranges restent sur des positions orange :

(36+,29) (verte, orange) $\longmapsto$ (34+,2) (orange-jaune) $\longmapsto$ (37+,12) (orange-bleue) $\longmapsto$ (39+,47) (orange-blanche) .
Les position + sont inchangées à chaque fois et donc la somme des 12 nombres 0 ou 1 vaut ici 0.
• Après d, les cubes arêtes (7,18+) (jaune-rouge) - (13,20+) (bleue-rouge) - (23+,42) (rouge-blanche) - (10+,4) (bleue-jaune) - (15+,44) (bleue-blanche) - (34+,2) (orange-jaune) - (37+,12) (orange-bleue) - (39+,47) (orange-blanche) ne bougent pas
En revanche les quatre autres cubes tournent :
(21+,28) (rouge-verte) $\longmapsto^{+1}$ (5,26+) (jaune-verte) $\longmapsto^{+1}$ (36+,29) (orange,verte) $\longmapsto^{+1}$ (45,31+) (blanche-verte) $\longmapsto^{+1}$ (21+,28) (rouge-verte).
Cette fois-ci, les position + sont changées à chaque fois et donc la somme des 12 nombres vaut ici 4.
En exercice, on peut vérifier que a agit comme p sur la somme des douze nombres (0), g agit comme d (4) et h et b agissent de la même façon : 2.
En conclusion : l'action des éléments de G sur C_A est égale au produit cartésien d'une permutation de S_{12} et de la liste de 12 nombres pris (avec répétition) dans $\{0, 1\}$ et dont la somme est paire. Cela explique le calcul de dénombrement qui suivra.

Pour les 8 cubes sommets.
Nous allons de même repérer (arbitrairement) pour chaque cube sommet une facette de référence que l'on note +.
Arbitrairement, nous assignons le + aux facettes rouges et orange (face et dos du Rubik's Cube).
Très concrètement, en reprenant les notations de l'exercice 2.1, les cubes arêtes orientés sont donc :
(17+,6,11) (rouge-jaune-bleue), (3,27, 33+) (jaune-verte-orange) ...
Lorsqu'on applique une trandformation au Rubik's Cube, les cubes sommets sont déplacés sur une autre position de cube sommet (les centres sont fixes - où remis en place par une rotation globale).
Chaque cube sommet dans sa nouvelle position a trois orientations possibles. On associera à chacun de ces cubes arêtes la valeur 0 si la face repérée (+) de ce cube se trouve sur la face repérée (+) du cube résolu; la valeur 1 si il faut faire une rotation de $\dfrac{\pi}{3}$ pour placer les + l'un sur l'autre et la valeur 2 si il faut faire une rotation de $\dfrac{2\pi}{3}$ (*on peut associe raisonner sur la permutation du triplet*).
Par exemple si $(17+, 6, 11)$ *se trouve en position* $(24+, 43, 30)$*, alors on associe* 0*, s'il se trouve en* $(43, 30, 24+)$ *on associe* 1 *et s'il se trouve en* $(30, 24+, 43)$ *on associe* 2*...*
Ainsi, concernant les cubes sommets, une transformation exécute une permutation des 8 cubes ET génère une série de 8 nombres 0, 1 ou 2.
Notons maintenant que pour chacune des 6 transformations de base h, g, a, d, p, b, la somme des 12 nombres garde sa congruence modulo 3.
C'est évident, pour les transformations p et a (qui laisse les orange et rouge invariant). Pour étudier les autres transformations, nous allons nous contenter de l'étude de la seule transformation d (rotation de la face verte).
• Après d, les cubes arêtes (17+,6,11) (rouge-jaune-bleue) - (22+,16,41) (rouge-bleue-blanche) - (35+,9,1) (rouge-bleue-jaune) - (40+,46,14) (orange-blanche-bleue) ne bougent pas
En revanche les quatre autres cubes tournent :
(19+,25,8) (rouge-verte-jaune) $\longmapsto^{+1}$ (3,27, 33+) (jaune-verte-orange) $\longmapsto^{+2}$ (38+, 32,48) (orange-verte-blanche)$\longmapsto^{+1}$ (43, 30,24+) (blanche-verte-rouge) $\longmapsto^{+2}$ (19+,25,8) (rouge-verte-jaune).
Cette fois-ci, les position + sont changées à chaque fois et donc la somme des 8 nombres vaut ici 6.
En conclusion : l'action des éléments de G sur C_S est égale au produit cartésien d'une permutation de S_8 et de la liste de 8 nombres pris (avec répétition) dans $\{0, 1, 2\}$ et dont la somme est nulle modulo 3. Cela explique le calcul de dénombrement qui suivra.

Bilan pour le dénombrement :
- pour les 8 cubes sommets :
  - chacun de ces 8 cubes peut occupé l'une des 8 positions : 8! possibilités
  - PUIS pour 7 des 8 cubes positionnés, chacun à 3 orientations différentes (la dernière est imposée) : 3^7 possibilités
- pour les 12 cubes arêtes :
  - chacun de ces 12 cubes peut occupé l'une des 12 positions : 12! possibilités
  - PUIS pour 11 des 12 cubes positionnés, chacun à 2 orientations différentes (la dernière est imposée) : 2^{11} possibilités
- pour les 6 cubes centres :
  - on les considère fixe : 1 possibilités

En réalité, les amateurs savent que tout n'est pas possible, Pour tous les cubes placés n'importe comment sauf 2, ces deux derniers sont imposés.

Il y a donc deux fois moins de permutations que celle comptées ici :

$$\boxed{\text{Card}G = 12!8!3^7 2^{10} = 11x7^2x5^3x3^{14}x2^{27} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000}$$

L'exercice 3.1. explique pourquoi il faut diviser par 2 en raisonnant sur les signatures des transformations.

2. $\text{Card}G = 11 \times 7^2 \times 5^3 \times 3^{14} \times 2^{27}$.

$$\boxed{\text{Le plus grand des facteurs premiers de } G \text{ est donc } 11.}$$

3. $\{t^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de G donc assurément (Théorème de Lagrange), son cardinal (ordre de t) divise le cardinal de G.
Si l'on raisonne sur le produit en nombres premiers, on trouve que l'ordre de t est de la forme $11^a 7^b 5^c 3^d 2^e$ avec $a \leqslant 1$, $b \leqslant 2$, $c \leqslant 3$, $d \leqslant 14$ et $e \leqslant 27$.
Le mouvement étudié en exercice 2.4. (Butler) est d'ordre $1260 = 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^2$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

1. Chacun des 12 cubes arêtes a 2 facettes. Chacun des 8 cubes arêtes a 3 facettes.

$$\boxed{\text{Card}F_A = 2 \times 12 = 24 \text{ et } \text{Card}F_A = 3 \times 8 = 24.}$$

2. H_A agit que sur les 12 arêtes, directement. Chaque facette d'un sommet-arête a deux possibilités une fois la position du cube acquise.
Toutefois, 11 arêtes placées imposent le positionnement des face (et également la distribution des faces) comme cela a été montré dans l'exercice 2.2. avec la parité de la somme.
De même H_G agit sur les 8 sommets. Pour conserver la congruence modulo 3 de la somme des transformations sur les sommets, l'orientation de la dernière facette est imposée celles des 7 autres (cf. exercice 2.2.).

$$\boxed{\text{Card}H_A = 12! \times 2^{11} = 980\,995\,276\,800 \text{ et } \text{Card}H_S = 8! \times 3^7 = 88\,179\,840}$$

3. On a donc

$$\boxed{\text{Card}(G) = \frac{1}{2}\text{Card}(H_S) \times \text{Card}(H_A)}$$

Seule la moitié des permutations $(\sigma_1, \sigma_2) \in H_A \times H_2$ peuvent engendre G, car les permutations de G ont une signature paire.

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

1. Voir le cours. G est un groupe fini, le lemme des tiroirs assure qu'il existe $k_2 > k_1$ tel que $\sigma^{k_2} = \sigma^{k_1}$.
Puis σ est inversible, donc $\sigma^{k_2 - k_1} = \text{id}$ avec $k_2 - k_1 \in \mathbb{N}^*$.

2.

$$\boxed{\text{ordre}(a) = \text{ordre}(d) = 4.}$$

Suivons le parcours des facettes 26 et 29 :

$$a^2d^2 \cdot 26 = a^2 \cdot 31 = 31 \text{ de même } a^2d^2 \cdot 31 = 26 \Longrightarrow 2|\text{ordre}(a^2d^2)$$

$$a^2d^2 \cdot 29 = a^2 \cdot 28 = 13 \text{ puis } a^2d^2 \cdot 13 = a^2 \cdot 13 = 28 \text{ enfin } a^2d^2 \cdot 28 = a^2 \cdot 29 = 29 \Longrightarrow 3|\text{ordre}(a^2d^2)$$

$$\boxed{\text{En fait, } a^2d^2 \text{ est un élément d'ordre } 6.}$$

Pour les plus courageux, on peut montrer que

$$ad = (3, 38, 16, 6, 25, 27, 32, 41, 11, 8, 33, 48, 22, 17, 19)(5, 36, 45, 23, 20, 18, 21)(7, 28, 26, 29, 31, 42, 13)(24, 30, 43)$$

$$\boxed{ad \text{ est d'ordre } 105 = 7 \times 5 \times 3.}$$

3. Au bout de 15 Butler :

$$\boxed{\text{les CS sont à leur place, mais pas forcément bien orientés. Ils sont en place et bien orientés au bout de 45 Butler.}}$$

4. Après 14 mouvements de Butler :

$$\boxed{\text{les CA sont à leur place, mais pas forcément bien orientés. Il faut 28 Butler pour les ranger tous correctement.}}$$

5. L'ordre du mouvement de Butler est donc le plus petit nombre qui réunissent les conditions sur les CS et les CA.
   C'est le PPCM de 45 et de 28, soit

$$\boxed{\text{L'ordre du mouvement de Butler est 1260.}}$$

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

En fait, il y a une coquille dans l'énoncé, il s'agit plutôt de $\Phi : G \to S_8 \times S_{12}$, $\sigma \mapsto (\sigma_{C_S}, \sigma_{C_A})$, sinon, on a deux ensembles qui possède 16 et 24 éléments respectivement...

1. On notera que Φ est bien définie puisque pour chaque permutation σ de G, les cubes-arêtes restent en position de cube-arêtes et de même pour les cubes-sommets (cf. Exercice 2.2.).
   Soit $\sigma \in G$. Si l'on décompose σ en produit de cycles,
   on trouve nécessairement des cycles concernant les cubes-arêtes uniquement
   et des cycles concernant des cubes-sommets. En les associant ensemble :
   Ainsi $\sigma = \sigma_{C_S} \circ \sigma_{C_A}$. Notons $\Phi_1 : \sigma \mapsto \sigma_{C_S}$ et $\Phi_2 : \sigma \mapsto \sigma_{C_A}$ $(\Phi = (\Phi_1, \Phi_2))$.
   Notons qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes.
   En effet si $\sigma \circ \sigma' = (\sigma_{C_S} \circ \sigma_{C_A}) \circ (\sigma'_{C_S}, \sigma'_{C_A})$
   et puisque σ_{C_A} et σ'_{C_S} commutent (supports disjoints). Alors :

$$\sigma \circ \sigma' = \underbrace{(\sigma_{C_S} \circ \sigma'_{C_S})}_{\Phi_1(\sigma\sigma')} \circ \underbrace{(\sigma_{C_A} \circ \sigma'_{C_A})}_{\Phi_2(\sigma\sigma')}$$

   Ensuite, montrons que $\epsilon(\sigma) = 1$ car $\epsilon(\sigma_{C_S}) = \epsilon(\sigma_{C_A})$.
   Si l'on considère une manipulation élémentaire : une rotation d'une face a, p, g, d, h ou b) ;
   elle se décompose en l'association d'un 4-cycles des cubes-arêtes de signature -1,
   et d'un 4-cycles des cubes-sommets, de signature -1.
   Nous avons vu dans l'exercice 2.2. l'exemple de d :
   $\Phi_1(d) = \big((19, 25, 8), (3, 27, 33), (38, 32, 48), (43, 30, 24)\big)$ et $\Phi_2(d) = \big((21, 28), (5, 26), (36, 29), (45, 31)\big)$
   (On ne confondra pas ici l'action sur les cubes-arêtes et cubes-sommet de l'action sur les facettes...
   L'orientation ne joue aucun rôle)
   Ainsi, toute manipulation élémentaire σ a une signature égale à $1 = (-1) \times (-1)$ et $\epsilon(\sigma_{F_S}) = \epsilon(\sigma_{F_A})$.
   Par morphisme de σ, cela s'étend à toute manipulation qui est un produit de manipulation élémentaire.

   Réciproquement, considérons un couple $(\sigma, \sigma') \in S_8 \times S_{12}$ tel que $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$.
   Là il s'agit de résoudre le Rubiks cube explicitement. Je laisse la réponse aux amateurs...
   Sous leur contrôle, on peut affirmer qu'étant donné une permutation des sommets et une permutation des arêtes compatibles (i.e. $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')$),
   alors, on peut toujours trouver une transformation (ici sous forme d'algorithme) telle que $\tau = \sigma \circ \sigma'$.

$$\boxed{\Phi \text{ est un morphisme de groupes et } \mathrm{Im}(\Phi) \equiv \{(\sigma, \sigma') \in S_8 \times S_{12} \mid \epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma')\}.}$$

2. Une permutation de deux cubes-arêtes conduit à une transformation σ de signature égale à 1.

$$\boxed{\text{Il est est donc impossible de transformer le cube en faisant uniquement une permutation de deux cubes-arrêtes.}}$$

   (C'est la même chose pour deux cubes-sommets).

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

On ne démontre pas ici qu'il s'agit bien d'un sous-groupe, mais cela donne un exercice intéressant de révision sur les groupes.
Dans l'exercice 4.1., on exploite toute une série de commutateurs...

1. Dans un premier temps, notons une propriété importante du groupe dérivée d'un sous-groupe de S_n.
   Soit $g = [\sigma, \sigma'] \in G'$. Par morphisme de groupes :

$$\epsilon(g) = \epsilon\left(\sigma\sigma'\sigma^{-1}{\sigma'}^{-1}\right) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1})\epsilon(\sigma')\epsilon({\sigma'}^{-1}) = \epsilon(\sigma\sigma^{-1})\epsilon(\sigma'{\sigma'}^{-1}) = 1$$

Soit $g = [\sigma_1, \sigma_2] \in G'$. Avec les notations évidentes :

$$g = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = \cdots = \underbrace{\sigma_{1|F_S}\sigma_{2|F_S}{\sigma_1^{-1}}_{|F_S}{\sigma_2^{-1}}_{|F_S}}_{g_{|F_S}}\underbrace{\sigma_{1|F_A}\sigma_{2|F_A}{\sigma_1^{-1}}_{|F_A}{\sigma_2^{-1}}_{|F_A}}_{g_{|F_A}}$$

puisque $\sigma_{i|F_S}$ et $\sigma_{j|F_A}$ commutent (supports disjoints).
Et donc $g_{|F_S} = [\sigma_{1|F_S}\sigma_{2|F_S}]$ ainsi que $g_{|F_A} = [\sigma_{1|F_A}\sigma_{2|F_A}]$.
Et selon la première remarque : $\epsilon(g_{|F_S}) = 1$ et $\epsilon(g_{|F_A}) = 1$.
Ainsi $G' \subset \{g \in G \mid \epsilon(g_{|F_S}) = \epsilon(g_{|F_A}) = 1\}$.
Il reste à étudier la réciproque...

▷ Corrigé de l'exercice 3.3
Une stratégie : exploiter le produit semi-direct.
A écrire (cf - document n°1 de la bibliographie introduction)

▷ Corrigé de l'exercice 4.1
Pour éviter toute confusion, on note t et s les transformations génériques h et g de l'énoncé.

1. Notons d'abord que comme s et t sont bijectives et conservent C_1 ou C_2 respectivement, alors elles conservent également C_2 et C_1 respectivement. Il en est de même de s^{-1} et t^{-1}.
   1– Si $x \in C_2$. $s \cdot x \in C_2$ (car $s_{|C_1} : C_1 \to C_1$ bijective, donc $s_{|C_2} : C_2 \to C_2$),
   donc $t^{-1} \cdot (s \cdot x) = s \cdot x$ car $t^{-1}_{|C_2}$ (comme $t_{|C_2}$) est égale à l'identité de C_2.
   Puis pour la transformation complète : $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1}s \cdot x = t \cdot x = x$ car $t_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$.
   2– Si $x \in C_1 \setminus \{i, j\}$, alors $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1}t^{-1} \cdot x$ car $s = (i\, j)$
   a) Dans le cas où $t^{-1} \cdot x \notin \{i, j\}$, $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1} \cdot (t^{-1} \cdot x) = tt^{-1} \cdot x$ car $t^{-1} \cdot x \notin \{i, j\}$
   et donc $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = x$
   b) Dans le cas où $t^{-1} \cdot x \in \{i, j\}$ i.e. $x = t \cdot i$ ou $x = t \cdot j$
   (à noter que cela nécessite que $t(\{i, j\}) \neq \{i, j\}$ - ce n'est pas nécessairement possible.)
   $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1}t^{-1} \cdot x = \begin{cases} t \cdot j & \text{si } x = t \cdot i \quad \text{car } s^{-1} \cdot i = j \quad \text{(i)} \\ t \cdot i & \text{si } x = t \cdot j \quad \text{car } s^{-1} \cdot j = i \quad \text{(ii)} \end{cases}$
   3– Si $x = i$, alors $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1}t^{-1} \cdot j$ car $s = (i\, j)$
   a) Si $t^{-1} \cdot j \notin \{i, j\}$, alors $s^{-1}(t^{-1} \cdot j) = t^{-1} \cdot j$ et donc $ts^{-1}t^{-1}s \cdot i = tt^{-1} \cdot j = j$.
   b) Si $t^{-1} \cdot j \in \{i, j\}$, i.e. $j \in \{t \cdot i, t \cdot j\}$,
   alors $ts^{-1}t^{-1}s \cdot i = s^{-1}(t^{-1} \cdot j) = \begin{cases} ts^{-1} \cdot i = t \cdot j & \text{si } j = t \cdot i \quad \text{(i)} \\ ts^{-1} \cdot j = t \cdot i & \text{si } j = t \cdot j \quad \text{(ii)} \end{cases}$
   4– Si $x = j$, alors $ts^{-1}t^{-1}s \cdot x = ts^{-1}t^{-1} \cdot i$ car $s = (i\, j)$
   a) Si $t^{-1} \cdot i \notin \{i, j\}$, alors $s^{-1}(t^{-1} \cdot i) = t^{-1} \cdot i$ et donc $ts^{-1}t^{-1}s \cdot j = tt^{-1} \cdot i = i$.
   b) Si $t^{-1} \cdot i \in \{i, j\}$, i.e. $i \in \{t \cdot i, t \cdot j\}$,
   alors $ts^{-1}t^{-1}s \cdot j = s^{-1}(t^{-1} \cdot i) = \begin{cases} ts^{-1} \cdot i = t \cdot j & \text{si } i = t \cdot i \quad \text{(i)} \\ ts^{-1} \cdot j = t \cdot i & \text{si } i = t \cdot j \quad \text{(ii)} \end{cases}$
   En bilan, les résultats dépendent des valeurs prises par $t \cdot i$ et $t \cdot j$. (On note $B = ts^{-1}t^{-1}s$)
   - Si $t \cdot i = j$ et $t \cdot j = i$:
     on a $B \cdot i = t \cdot j = i$ (cas 3.b(i)), $B \cdot j = t \cdot i = j$ (cas 4.b)(ii)) et si $x \notin \{i, j\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)).
     et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a : $B = \mathrm{id}$.
   - Si $t \cdot i = j$ et $t \cdot j = k \neq i$ donc $t^{-1} \cdot i \notin \{i, j\}$:
     $B \cdot i = t \cdot j = k$ (cas 3.b)(i)) ; $B \cdot j = i$ (cas 4.a)) ;
     si $x \notin \{i, j, k\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)), $B \cdot k = t \cdot i = j$ (cas 2.b))
     et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a donc $B = (i\, k\, j) = (j \;\; i \;\; t \cdot j)$.
   - Si $t \cdot j = i$ et $t \cdot i = h \neq j$ donc $t^{-1} \cdot j \notin \{i, j\}$:
     $B \cdot i = j$ (cas 3.a) ; $B \cdot j = t \cdot i = h$ (cas 4.b)(ii)) ;
     si $x \notin \{i, j, h\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)), $B \cdot h = t \cdot j = i$ (cas 2.b))
     et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a donc $B = (i\, j\, h) = (i \;\; j \;\; t \cdot i)$.
   - Si $t \cdot i = i$ et $t \cdot j = j$:
     on a $B \cdot i = t \cdot i = i$ (cas 3.b(ii)), $B \cdot j = t \cdot j = i$ (cas 4.b)(i)) et si $x \notin \{i, j\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)).
     et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a : $B = \mathrm{id}$.

- Si $t \cdot i = i$ et $t \cdot j = k \neq j$ donc $t^{-1} \cdot j \notin \{i, j\}$:
  $B \cdot i = j$ (cas 3.a)) ; $B \cdot j = t \cdot j = k$ (cas 4.b)(i)) ;
  si $x \notin \{i, j, k\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)), $B \cdot k = t \cdot i = i$ (cas 2.b)(ii))
  et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a donc $B = (i\, j\, k) = (i \;\; j \;\; t \cdot j)$.
- Si $t \cdot j = j$ et $t \cdot i = h \neq i$ donc $t^{-1} \cdot i \notin \{i, j\}$:
  $B \cdot i = t \cdot i = h$ (cas 3.b(ii)) ; $B \cdot j = i$ (cas 4.a)) ;
  si $x \notin \{i, j, h\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)), $B \cdot h = t \cdot j = j$ (cas 2.b)(i))
  et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a donc $B = (i\, h\, j) = (j \;\; i \;\; t \cdot i)$.
- Si $t \cdot i = h$ et $t \cdot j = k$ avec $\{h, k\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ donc $t^{-1} \cdot i, t^{-1} \cdot j \notin \{i, j\}$:
  $B \cdot i = j$ (cas 3.a)) ; $B \cdot j = i$ (cas 4.a)) ; si $x \notin \{i, j, h, k\}$, $B \cdot x = x$ (cas 2.a)) ;
  $B \cdot h = t \cdot j = k$ (cas 2.b)(i)) et $B \cdot k = t \cdot i = h$ (cas 2.b)(ii))
  et comme $B_{|C_2} = \mathrm{id}_{|C_2}$, on a donc $B = (i\, j)(h\, k) = (i\, j)(t \cdot i \;\; t \cdot j)$.

2. On cherche donc s, t (plutôt cette notation) tels que $C_3 = ts^{-1}t^{-1}s$.
   On peut prendre : $t = h'$ et $s = g'db'd'bg$, on a bien $C_3 = ts^{-1}t^{-1}s$.
   On a alors $t = h'$ laisse les deux couronnes du dessous invariantes. On peut donc prendre C_2 dans ces deux couronnes.
   Il faut regarder comment $s = g'db'd'bg$ agit sur le complémentaire C_1, comme transposition.
   Effectuons s sur le Rubik's Cube et regardons comment la couronne du haut (potentiel C_1) à évoluer.
   
   
   
   
   On constate qu'il y a bien eu une permutation des deux cubes : $i =$(Rouge-Vert-Blanc) avec le cube : $j =$(Rouge-Jaune-Bleu). Les autres cubes de C_1 (couronne du haut) n'ont pas évolué. (D'autres cubes de C_2 se sont échangés...).
   Pour savoir maintenant comment la transformation $B = tst^{-1}s^{-1}$ agit sur le cube, on regarde les images de $t \cdot i = h \cdot i$ et $t \cdot j = h \cdot j$. Or ici, on a $h \cdot j = i$ et $h \cdot i = k$, un autre cube arête.
   Ainsi, on se trouve dans la troisième situation étudiée à la question précédente et donc $B = (i \;\; j \;\; h \cdot i)$.

   C_3 est donc un cycle de taille 3 sur des cubes arêtes d'une même face (confirmé par la question suivante.

3. Pas de question ici...
4. En considérant les notations de cette question, il vient :
   — Pour C_1 : $s = h'$ et $t = d'h'da$.
   — Pour C_2 : $s = h$ et $t = g'h'^2dh'a'$.
   — Pour C_4 : $s = h'$ et $t = ad'a'd'^2bd'$.
   C_0 ne semble pas de la forme envisagé.
   On pratique le même genre d'étude que pour la question 2, qui s'est concentrée sur C_3.
5. Have fun !

▷ Corrigé de l'exercice 4.2

Voir article !