Relations & Constructions de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Cette activité sera corrigée le mardi 26 novembre 2024.

1 Préordre et conséquences

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble pré-ordonné, i.e. $\preceq$ est un préordre i.e. réflexif et transitif.
Exemple de $(u_n) \preceq (v_n)$ ssi à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$.

▷ **Exercice 1.1.**

On note, pour tout $a, b \in E$, $a \equiv b$ si et seulement si $a \preceq b$ et $b \preceq a$.

1. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur E
2. Montrer que pour l'égalité définie par $\equiv$, alors $\preceq$ est une relation d'ordre.

▷ **Exercice 1.2.**

1. Montrer que la relation : « $(u_n) \preceq (v_n)$ ssi $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée »est une relation de préordre.
2. Quelle est la relation d'équivalence qui en découle.

C'est cette relation d'équivalence/ordre qu'on exploite particulièrement en informatique lorsque l'on compare la complexité (l'efficacité) des programmes.

2 Construction de $\mathbb{C}$ (version Cauchy)

On suppose que $\mathbb{R}$ est bien construit (cf. partie suivante).
On définit alors sur l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, la relation : $P \equiv Q[R]$ $R|P - Q$ (i.e. $\exists\ S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times S = P - Q$). On note $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à n.

▷ **Exercice 2.1.**

Relation d'équivalence. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme fixé quelconque

1. Montrer que $\cdot \equiv \cdot[R]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $A \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg A < \deg R$ tel que $P \equiv A[R]$.
   A s'appelle le représentant principal de la classe d'équivalence $\{A + RS, S \in \mathbb{R}[X]\}$.

▷ **Exercice 2.2.**

1. Montrer que l'addition $+$ est compatible sur les classes d'équivalences :
   $P_1 \equiv P_2[R]$ et $Q_1 \equiv Q_2[R] \quad \Longrightarrow P_1 + Q_1 \equiv P_2 + Q_2[R]$
2. Montrer que l'addition $\times$ est compatible sur les classes d'équivalences :
   $P_1 \equiv P_2[R]$ et $Q_1 \equiv Q_2[R] \quad \Longrightarrow P_1 \times Q_1 \equiv P_2 \times Q_2[R]$

▷ **Exercice 2.3.**

Montrer que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est en bijection avec $\left(\dfrac{\mathbb{R}[X]}{\cdot \equiv \cdot[X^2+1]}, +, \times\right)$

3 Construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind

Le principe des coupures permet de compléter $\mathbb{Q}$ en « bouchant les (petits) trous », en gardant la relation d'ordre.
On doit l'idée à Richard Dedekind en 1858.
On rappelle que $\mathbb{Q}$ est muni d'une relation d'ordre totale que l'on note $\leqslant_{\mathbb{Q}}$.
Exemple : le nombre $\sqrt{2}$ est celui qui fait la frontière entre $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 <_{\mathbb{Q}} 2 \text{ ou } x < 0\}$ et $\{x\mathbb{Q} \mid x^2 \geqslant_{\mathbb{Q}} 2\}$.

Définition de coupure puis de $\mathbb{R}$:
Une coupure $t = (T_-|T_+)$ est la donnée de deux sous-ensembles T_- et T_+ de $\mathbb{Q}$ tels que :

— $T_- \neq \emptyset$, $T_+ \neq \emptyset$, $Q = T_- \uplus T_+$
— Si $a \in T_-$, alors $b <_{\mathbb{Q}} a \Rightarrow b \in T_-$, et si $c \in T_+$, alors $c <_{\mathbb{Q}} d \Rightarrow d \in T_+$

— Il n'existe pas d'éléments m de T_- tels que $T_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant_{\mathbb{Q}} m\}$.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. On dit que t est un nombre réel et que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

La notion de coupure a été reprise pour étendre des corps, non complet, et muni d'une relation d'ordre totale (par exemple : les nombres surréels de C*ONWAY).*

3.1 Manipulation. Section commençante ouverte

Nous allons alléger la définition ici

▷ **Exercice 3.1.**

1. On note $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, l'ensemble des sous-ensembles A de $\mathbb{Q}$ vérifiant :
   — $a \in A$ et $b <_{\mathbb{Q}} a \Longrightarrow b \in A$
   — il n'existe pas de $m \in \mathbb{Q}$ tel que $A = \{x \in Q \mid x \leqslant_Q m\}$.
   On appelle ces parties de $\mathbb{Q}$ des sections commençantes ouvertes de $\mathbb{Q}$.
   Montrer que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, $t \mapsto T_-$ est une bijection.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in T_-$ et $c \in T_+$, $a \leqslant_{\mathbb{Q}} c$
3. Montrer que $\Psi_t : (T_-, T_+) \to \mathbb{Q}_+^*$, $(a, c) \mapsto c - a$ est surjective.
   Est-elle injective ?
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'on peut associer naturellement une (unique) coupure de $\mathbb{R}$ à r.
   On note x_r, ce nombre réel « égale »à r.

3.2 Extensions des opérations de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$

▷ **Exercice 3.2.**

Addition et relation d'ordre.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On note $T_-(x)$ et $T_-(y)$ les sections ouvertes commençantes de $\mathbb{Q}$ qui définissent x et y respectivement.
   On note $T = \{a + b, a \in T_-(x), b \in T_-(y)\}$. Montrer que T est une section ouverte commençante de $\mathbb{Q}$.

   On note $x + y$, la coupure associée (i.e. $x + y = (T, \mathbb{Q} \setminus T)$).
   Comment montrer que $+$ est commutatif, associatif et vérifie : $x_{r +_{\mathbb{Q}} r'} = x_r + x_{r'}$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$.
2. Comment définir l'élément neutre de l'addition et l'opposé de tout nombre $x \in \mathbb{R}$?
3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que $x \leqslant y$ si et seulement si $T_-(x) \subset T_-(y)$.
   La relation d'ordre (admis) ainsi définie est-elle totale ?

   On notera $x < y$ si $x \leqslant y$ et $x \neq y$.
4. Montrer que si $x \leqslant y$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, $x + z \leqslant y + z$.
   Soient $r, r' \in \mathbb{Q}$. Montrer que $r \leqslant_{\mathbb{Q}} r'$ si et seulement si $x_r \leqslant x_{r'}$
5. Montrer que $x \leqslant y$ ssi il existe $s \geqslant 0$ tel que $y = x + s$.

▷ **Exercice 3.3.**

1. Soient $t, u > 0$. Montrer que $V = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ ou } \exists\, t \in T_- \cap \mathbb{R}_+, u \in U_- \cap \mathbb{R}_+ \text{ tel que } a = t \times u\}$ est une section commençante ouverte.
   On note $v = t \times u$ la coupure associée (i.e. $v = (V | \mathbb{Q} \setminus V)$).
2. Comment définir la multiplication de deux réels, non nécessairement positif ?

   On admet (ensuite) que la multiplication est associative, commutative et possède l'élément neutre 1.
   On admet aussi qu'il s'agit d'une extension de la multiplication sur $\mathbb{Q}$.

3.3 Topologie

▷ **Exercice 3.4.**

1. Montrer que la fonction partie entière est bien définie sur $\mathbb{R}$, i.e. : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n + 1$ (on devrait noter x_n au lieu de n).
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e. : $\forall\, (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$ tel que $A \leqslant n \times a$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (avec $x < y$), $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ tel que $x \leqslant q \leqslant y$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$.
   En déduire la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 3.5.** Montrer que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

4 Construction de $\mathbb{R}$ par les suites bissecantes

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est muni d'une relation d'ordre totale que l'on note $\leqslant_{\mathbb{Q}}$.

Définition d'une paire de suites bissecantes de rationnels :
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de rationnels.
On dit que le couple $\big((a_n),(b_n)\big)$ forme un couple de suites (de rationnels) bissecantes si :

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a_n et $b_n \in \mathbb{Q}$ (suites de rationnels)
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$
   La suite (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et (b_n) majore (a_n)
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

4.1 Premier exemple

▷ **Exercice 4.1.**
On crée les suites suivantes par récurrence avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que a_n et b_n sont définies,
et on note $c = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
si $c^2 > 2$, i.e. $a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n > 8$, on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c$
si $c^2 \leqslant_{\mathbb{Q}} 2$ i.e. $a_n^2 + b_n^2 + 2a_nb_n \leqslant_{\mathbb{Q}} 8$, on prend $a_{n+1} = c$ et $b_{n+1} = b_n$.
Montrer que $\big((a_n),(b_n)\big)$ forment un couple de suites rationnels bissecantes.
Qu'en pensez-vous ?

4.2 Petits lemmes et quotientage

▷ **Exercice 4.2.**

1. Soit $\big((a_n),(b_n)\big)$ un couple de suites bissecantes.
   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$
2. Considérons quatre suites de rationnels (a_n), (c_n), (d_n) et (f_n) telles que (a_n) est croissante, (f_n) décroissante et $\big((c_n),(d_n)\big)$ un couple de bissecantes.
   On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$ et $c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$,
   montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} f_n$
3. On considère deux couples de suites bissecantes $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big))$. On dit que $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((c_n),(d_n)\big))$ si
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n \text{ et } a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$$
   Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
   On dira par la suite que $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big))$ définissent le même réel.

On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble des classes de similarité définies sur l'ensemble des couples de bissecantes.
Formellement :
$$x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists\ \big((a_n),(b_n)\big)\text{couple de bissecantes tel que } x = \overline{\big((a_n),(b_n)\big)}$$

On notera $x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$ ou encore $\begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} x$.

Il sera donc toujours sous-entendu que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$

4.3 Corps $\mathbb{R}$

▷ **Exercice 4.3.** Relation d'ordre
On considère deux nombres de $\mathbb{R}$, x et y.
On dit que x est inférieur à y, noté $x \leqslant y$, si
pour tous couples $\begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} x$ et $\begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} y$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant_Q d_n$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre, indépendante du choix du représentant.
2. Montrer que l'ordre est total
3. Montrer que l'on peut « récupérer »l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 4.4.** Segments emboîtés rationnels
Soit $([a_n, b_n])$ est une suite de segments emboîtés de $\mathbb{Q}$,
i.e. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$,
et de longueur qui tend vers 0 :
i.e. $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tq $(\forall\ p \in \mathbb{N}) : 0(\leqslant b_{m+p} - a_{m+p}) \leqslant b_m - a_m \leqslant \epsilon$.
Montrer que : $\exists\ !x \in \mathbb{R}$ tq $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, noté : $x \in [a_n, b_n]$

▷ **Exercice 4.5.** Opérations sur $\mathbb{R}$

1. Si $\big((a_n), (b_n)\big)$ et $\big((c_n), (d_n)\big)$ sont deux suites bissecantes.
   (a) Montrer que $\big((a_n + c_n), (b_n + d_n)\big)$ est également bissecante.
   On définit donc l'addition sur $\mathbb{R}$:
   $$x + y = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} (b_n + d_n) \searrow \\ (a_n + c_n) \nearrow \end{array} \right.$$
   (b) Montrer que cette définition est indépendante du choix des représentants de x et r..
   (c) Comment définir la soustraction ?
2. On définit la multiplication sur $\mathbb{R}$ par :
   Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $x \times y = 0$.
   Si $0 < x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$ et $0 < y = \left\{ \begin{array}{l} (d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow \end{array} \right.$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} > 0$ et $c_{n_0} > 0$,
   la suite $([a_n c_n, b_n d_n])_{n \geqslant n_0}$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.
   Il existe un unique réel dans chaque $[a_n c_n, b_n d_n]$, il s'agit de $x \times y$.
   Si $x < 0$ ou $y < 0$, alors on considère les suites opposées...
   Montrer que cette définition est correcte
3. Inverse :
   Si $0 \leqslant x = \left\{ \begin{array}{l} (b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow \end{array} \right.$ et $x \neq 0$.
   (a) Montrer qu'on peut supposer que $a_n > 0$, à partir d'un certain rang. SPDG, on suppose que ce rang est $n_0 = 0$.
   (b) En déduire que la suite $\left(\left[\dfrac{1}{b_n}, \dfrac{1}{a_n}\right]\right)$ est une suite de segment emboîtés de longueur qui tend vers 0.
   (c) Conclure
4. On admet : La relation d'ordre usuelle $\leqslant$ est compatible avec les opérations $+$ et $\times$:
   $$\begin{array}{lll} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad x + z \leqslant y + z \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \underline{\mathbb{R}_+}, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad xz \leqslant yz \end{array}$$
   Montrer alors les règles d'usage suivantes :
   $$\begin{array}{lll} \forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, & \left\{ \begin{array}{l} x \leqslant y \\ x' \leqslant y' \end{array} \right. & \Longrightarrow \quad x + x' \leqslant y + y' \\ \forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant x' \leqslant y' \end{array} \right. & \Longrightarrow \quad xx' \leqslant yy' \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & x \leqslant y & \Longrightarrow \quad -y \leqslant -x \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & 0 < x \leqslant y & \Longrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x} \end{array}$$

4.4 Topologie

▷ **Exercice 4.6.**

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e. : $\forall\ (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ tel que $A \leqslant n \times a$.
2. Montrer le théorème de la borne supérieure : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

▷ **Exercice 4.7.**

1. Montrer que les deux constructions de $\mathbb{R}$ sont équivalentes.
2. Montrer qu'on peut également construire $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy rationnelles, i.e. vérifiant :
   $\forall\ \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ p, q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| \leqslant \epsilon$
   (Pour la définition naturelle de la multiplication, on aura besoin de montrer que de telles suites sont nécessairement bornées.)

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. • Comme $a \preceq a$, puisque $\preceq$ est réflexive, alors $a \equiv a$.
   Donc $\equiv$ est réflexif.
   • Soient a et b tels que $a \equiv b$, donc $a \preceq b$ et $b \preceq a$
   donc $b \preceq a$ et $a \preceq b$, ainsi $b \equiv a$
   Donc $\equiv$ est symétrique.
   • Soient a, b et c tels que $a \equiv b$ et $b \equiv c$,
   donc $a \preceq b$ et $b \preceq a$ et $b \preceq c$ et $c \preceq b$.
   donc $a \preceq b$ et $b \preceq c$ et $c \preceq b$ et $b \preceq a$.
   donc $a \preceq c$ et $c \preceq a$, par transitivité de $\preceq$
   Donc $\equiv$ est transitif.
2. On sait que $\preceq$ est réflexif et transitif.
   Par ailleurs, si $a \preceq b$ et $b \preceq a$, alors $a \equiv b$, donc $\preceq$ est antisymétrique.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1. Cette relation est réflexive, avec $M = 1$. Elle est transitive car $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n}\dfrac{v_n}{w_n} \leqslant M_1 M_2$.
2. Il s'agt de la relation « du même ordre »des informaticiens dans le calcul de la complexité algorithmique :
   $(u_n)\,\Omega\,(v_n)$ si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n}$ et $\dfrac{v_n}{u_n}$ sont bornées
   si et seulement si $\exists\ A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ Au_n \leqslant v_n \leqslant Bu_n$.
   (Cela ressemble à l'équivalence des normes...).

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. • Pour tout P, $0 \times R = P - P$, donc $P \equiv P[R]$.
   • Soient P, Q tel que $P \equiv Q[R]$, donc il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times T = P - Q$, donc $Q - P = (-T) \times R$.
   Or $(-T) \in \mathbb{R}[X]$, donc $Q \equiv P[R]$.
   • Soient P, Q, S tel que $P \equiv Q[R]$ et $Q \equiv S[R]$,
   donc il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times T_1 = P - Q$, et $R \times T_2 = Q - S$donc $P - S = (T_1 + T_2) \times R$.
   Or $(T_1 + T_2 \in \mathbb{R}[X]$, donc $P \equiv S[R]$.

2. A est nécessairement (unique), le reste de la division euclidienne de P par R.
   On a $\deg A < \deg R$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1. On a $P_2 - P_1 = T_1 R$ et $Q_2 - Q_1 = T_2 R$, donc $(P_1 + Q_1) - (P_2 - Q_2) = (T_1 + T_2)R$, donc $P_1 + Q_1 \equiv P_2 + Q_2[R]$
2. Avec les mêmes notations : $P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = P_1(Q_1 - Q_2) + Q_2(P_1 - P_2) = (P_1 T_2 + Q_2 T_1)R$, donc $P_1 \times Q_1 \equiv P_2 \times Q_2[R]$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

Soit $\Phi : \mathbb{C} \to \left(\dfrac{\mathbb{R}[X]}{\cdot \equiv \cdot [X^2+1]}\right)$, $(a + ib) \mapsto a + bX$. Elle est bien définie.
Il s'agit bien d'un morphisme d'anneau :

— $\Phi(1) = 1$
— $\Phi((a + ib) - (a' + ib')) = \Phi((a - a') + i(b - b')) = (a - a') + (b - b')X = \Phi(a + ib) - \Phi(a' + ib')$.
— $\Phi((a + ib) \times (a' + ib')) = \Phi((aa' - bb') + i(a'b + ab')) = (aa') - (bb') + (a'b + ab')X = (aa') + (a'b + ab')X + (bb')X^2 \Phi(a + ib) \times \Phi(a' + ib')$. car $X^2 \equiv -1[X^2 + 1]$

La réciproque s'obtient directement, en prenant bien le représentant principal de chaque classe d'équivalence.

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

1. Φ est bien définie, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, T_- est bien une section commençantes ouvertes de $\mathbb{Q}$.
   Soit $A \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, on note $B = \mathbb{Q} \setminus A$, alors $(A|B)$ vérifie exactement les propriétés des coupures.
   Donc pour tout $A \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, il existe un unique nombre $t = (A|\mathcal{C}(\mathbb{Q})) \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t) = A$
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient $a \in T_-$ et $c \in T_+$.
   Si $c <_Q a$, alors par définition des coupures, $c \in T_-$. Impossible car $T_+ \cap T_- = \emptyset$.
   Donc, comme la relation d'ordre est totale, $a \leqslant_{\mathbb{Q}} c$

3. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$.
Soit $a \in T_-$ et $b \in T_+$. $b-a \in \mathbb{Q}_+^*$. Puis $\dfrac{b-a}{r} \in \mathbb{Q}_+^*$. Notons N un entier supérieur à $\dfrac{b-a}{r}$.
On a donc $0 < b-a \leqslant Nr$.
Notons $a_0 = a$, $a_1 = a + \dfrac{b-a}{N}$ et pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $a_k = a + \dfrac{k}{N}(b-a)$.
On a : $a = a_0 \leqslant a_1 \cdots \leqslant a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant \cdots a_N = b$, il s'agit de nombres rationnels.
Nécessairement, il existe $k \in [\![1,N]\!]$ tel que $\forall\, i < k$, $a_i \in T_-$ et $\forall\, i \geqslant k$, $a_i \in T_+$ ($k = \min\{i \mid a_i \in T_+\}$, non vide).
On a alors $a_{k-1} \in T_-$, $a_k \in T_+$ et $a_k - a_{k-1} = \dfrac{b-a}{N} \leqslant r$.
Et donc $a_{k-1} + r \geqslant a_k \in T_+$ et $a_{k-1} \in T_-$ et $\Psi(a_{k-1}, a_{k-1}+r) = r$. Donc Ψ est surjective.
Elle n'est pas injective : si $a \in T_-$ et $c \in T_+$, alors $a-1 \in T_-$ et $c+1 \in T_+$.
Puis $\Psi(a-1,c) = c-a+1 = c+1-a = \Psi(a,c+1)$.
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On note $R_- = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ et $R_+ = \{b \in \mathbb{Q} \mid r \leqslant b\}$. Alors $(R_-|R_+)$ est une coupure qui définie r. Si une autre coupure définie r, alors nécessairement, la section commençante contient R_-, mais ne peut contenir r sinon elle ne serait pas ouverte et donc il s'agit nécessairement de R_-.

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

1. Soit $c \in T$, il existe $a \in T_-(x)$ et $b \in T_-(y)$ tel que $c = a+b$.
Soit $d \leqslant_Q c$. Comme d est un nombre rationnel, ainsi que a, alors $b' = d-a \in Q$.
Et donc $d = a+b'$, avec $a \in T_-(x)$ et $b' = d-a \leqslant c-a = b$ donc $b' \in T_-(y)$.
Donc $d \in T$. Ainsi, T est une section commençante. Elle est ouverte car s'il existait $m \in Q$ tel que $T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant_{\mathbb{Q}} m\}$, alors comme $m \leqslant_Q m$, $m \in T$.
Et donc il existerait $(a,b) \in T_-(x) \times T_-(y)$ tel que que $m = a+b$.
Puis, comme $T_-(x)$ et $T_-(y)$ sont ouvertes, il existe $a' > a$, $b' > b$ tels que $a' \in T_-(x)$ et $b' \in T_-(y)$.
On aurait alors $m < a'+b' \in T$, impossible.
Enfin, pour la commutativité, on exploite la commutativité (resp. associativité) sur $\mathbb{Q}$.
2. L'élément neutre est 0. Et $-x = (T'_-, T'_+)$ où $T'_- = \{a \in \mathbb{Q} \mid -a > x\} = -(T_+(x) \setminus (\{x\} \cap \mathbb{Q}))$.
3. Oui, elle est totale par totalité de $\leqslant_{\mathbb{Q}}$ et propriété 2. des coupures.
4. $x+z \leqslant y+z \Longleftrightarrow T_-(x+z) \subset T_-(y+z) \Longleftrightarrow \forall\, a \in T_-(x), \forall\, h \in T_-(z), a+h \in T_-(y+z)$
$\Longleftrightarrow\Longleftrightarrow \forall\, a \in T_-(x), \forall\, h \in T_-(z), a+h, \exists\, b \in T_-(y), \exists\, h' \in T_-(z)$ tels que $a+h \leqslant_{\mathbb{Q}} b+h'$ Si $a > b$, alors en prenant $h \in]z - \dfrac{a-b}{2}, z[$, on a $h \in T_-(z)$ et $(h') = a+h-b > z + (a-b)(1 - \dfrac{1}{2} > z$,
Donc il n'existe pas de $h' \in T_-(z)$ tel que $a+h \leqslant_{\mathbb{Q}} b+h'$.
Nécessairement $x+z \leqslant y+z \Longrightarrow \forall\, a \in T_-(x), \exists\, b \in T_-(y)$ tel que $a \leqslant_Q b$, donc $T_-(x) \subset T_-(y)$ et $x \leqslant y$.
Réciproquement, si $x \leqslant y$, en prenant, pour tout h, $h' = h$, on trouve $x+z \leqslant y+z$.
On passe l'étude du cas où x et y sont des rationnels
5. Notons $T = \{a-b, a \in T_-(x), b \in T_+(y)\}$. Alors T est une section ouverte commençante de $\mathbb{Q}$.
Soit $s = (T, \mathbb{Q} \setminus T)$. En fait, on a $x+s = y$
Avec un travail comparable : $x \leqslant y \Longleftrightarrow s \geqslant 0$

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

1. Soit $a \in V$.
• Si $a < 0$. Alors pour tout $s \leqslant_{\mathbb{Q}} a$, $s < 0$ et donc $s \in V$.
• Si $a = t \times u$, avec $t \in T_- \cap \mathbb{R}_+$ et $u \in U_- \cap \mathbb{R}_+$.
pour tout $s \leqslant a$, ou bien $s < 0$ et donc $s \in V$, par définition de V,
ou bien $s > 0$, $u' = \dfrac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ et vérifie nécessairement $u' \leqslant_{\mathbb{Q}} u$,
ainsi $s = t \times u'$, avec $t \in T_-$ et $u' \in U_-$. Donc $s \in V$.
V est donc bien une section commençante.
Il reste à montrer qu'elle est ouverte...
2. Pour deux nombres négatifs, ou un nombre négatif et un nombre positif,
on définit le produit avec une règle des signes : $s_1 \times s_2 = \begin{cases} + & \text{si } s_1 = s_2 \\ - & \text{si } s_1 \neq s_2 \end{cases}$ où $s_1, s_2 \in \{+,-\}$ et le produit des valeurs absolues (valeurs positives) des nombres.

▷ Corrigé de l'exercice 3.4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe deux fractions r et r' tel que $r \in T_-(x)$ et $r' \in T_+(x)$.
$r = \dfrac{p}{q}$. On réalise la division euclidienne de p par q. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [\![0, q-1]\!]$ tel que $p = aq+b$.

Ainsi $r = a + \dfrac{b}{q}$, donc $a \leqslant r < a+1$ et donc $a-1 \in T_-(x) \cap \mathbb{Z}$.

Donc $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ et non vide. De même, on trouve $a' \in \mathbb{Z}$, tel que $a' \leqslant r' < a'+1$, donc $a'+1 \in T_+(x) \cap \mathbb{Z}$.

Donc $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ est majoré (par $a'+1$).

On prend $n = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$.

2. On prend $x = \dfrac{A}{a}$ et $n \leftarrow n-1$
3. Voir le cours
4. Idem

▷ Corrigé de l'exercice 3.5

C'est la question importante.

En fait si A est une partie de $\mathbb{R}$ majorée, on considère $T_2 = \{q \in \mathbb{Q} \mid \forall\, x \in A, x \leqslant q\}$ et $T_1 = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists\, x \in A \text{tel que } q < x\}$.

Alors (T_1, T_2) est une coupure de Dédekind, elle définit un nombre x réel, égale à la borne supérieure recherchée.

▷ Corrigé de l'exercice 4.1

Il faut démontrer la majoration.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

- ou bien $n \leqslant N$, $a_n \leqslant a_N \leqslant b_N$.
- ou bien $n \geqslant N$, $a_n \leqslant b_n \leqslant b_N$.

Donc $\forall\, n, N \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_N$, on en déduit (par construction) : $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} a_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n+1} \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$.

Cela peut donner une bonne définition de $\sqrt{2}$.

De la même manière, on doit pouvoir viser la construction de tout nombre réel admettant une définition calculatoire.

▷ Corrigé de l'exercice 4.2

1. Par récurrence.
2. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m > f_m$.
   Alors $a_m - f_m > 0$. Et comme $(a_n - f_n)$ est croissante, pour tout $n \geqslant m$: $a_n - f_n > a_m - f_m$.
   En particulier $a_m - f_m < a_n - f_n \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n - c_n$ et donc pour tout $n \geqslant m$, $d_0 - c_0 > 2^n(a_m - f_m)$.
   Ce qui est impossible, car le terme de droite peut être rendu aussi grand qu'on veut…
3. • Elle est réflexive par définition des bissecantes : $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$.
   • Elle est symétrique, par construction (symétrique).
   • Elle est transitive : supposons que $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((c_n),(d_n)\big))$ et $\big((c_n),(d_n)\big)$ est similaire à $\big((e_n),(f_n)\big))$.
   On peut appliquer le lemme à (a_n), $\big((c_n),(d_n)\big)$ et (f_n), donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_Q f_n$.
   et également à (e_n), $\big((c_n),(d_n)\big)$ et (b_n), donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e_n \leqslant_Q b_n$
   Donc $\big((a_n),(b_n)\big)$ est similaire à $\big((e_n),(f_n)\big))$

▷ Corrigé de l'exercice 4.3

1. • Elle est réflexive par définition des bissecantes.
   • Elle est antisymétrique, en effet si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$,
   alors pour tout couple de suites bissecantes $\big((a_n),(b_n)\big)$ et $\big((c_n),(d_n)\big))$ associés à x et y respectivement, $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant_Q d_n$ et aussi $c_n \leqslant b_n$.
   Cela signifie par définition que $x = y$.
   • Elle est transitive. On exploite à nouveau le lemme.
2. Supposons $\begin{matrix}(b_n) \searrow \\ (a_n) \nearrow\end{matrix}\, x$ et $\begin{matrix}(d_n) \searrow \\ (c_n) \nearrow\end{matrix}\, y$.
   • Ou bien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $b_{n_0} < \mathbb{Q} c_{n_0}$.
   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{n_0} \leqslant_{\mathbb{Q}} c_{n_0} \leqslant_{\mathbb{Q}} d_n$.
   Et ainsi, par définition : $x \leqslant y$ • Ou bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_n$ et donc par définition $y \leqslant x$.
3. Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \overline{\big((x),(x + \frac{1}{2^n})\big)} \in \mathbb{R}$. Donc d'une certaine façon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
   Puis si $x \leqslant_{\mathbb{Q}} y$, alors $x \leqslant y$.
   Donc la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$, prolonge cela définie sur $\mathbb{Q}$.
   On peut donc garder la même représentation en passant de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$.
   C'est la représentation d'un droite pointillée qui devient ligne continue.

▷ Corrigé de l'exercice 4.4 On note $A_0 = a_0$, $B_0 = b_0$.
On construit alors (A_n) et (B_n) de la façons suivante (par récurrence) :
Si $A_n = a_{\varphi(n)}$ et $B_n = b_{\varphi(n)}$,

Alors comme $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant b_m - a_m \leqslant \epsilon$,

en prenant $\epsilon = \frac{1}{2}(B_n - A_n) > 0$, il existe $m_n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant b_{m_n} - a_{m_n} \leqslant \frac{1}{2}(B_n - A_n)$.

On considère alors $\varphi(n+1) = \max(\varphi(n)+1, m_n)$.

On considère alors $A_{n+1} = a_{\varphi(n+1)}$ et $B_{n+1} = b_{\varphi(n+1)}$.

Nécessairement, $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ et $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$, donc φ est strictement croissante.

Ainsi (A_n) est extraite de (a_n) et (B_n) de (b_n).

Et donc elles héritent : (A_n) est rationnelle croissante et (B_n) est rationnelle décroissante.

Ensuite, par construction de φ :

$$B_{n+1} - A_{n+1} = b_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{m_n} - a_{m_n} \leqslant \frac{1}{2}(B_n - A_n).$$

Soit $x = \begin{cases} (B_n) & \searrow \\ (A_n) & \nearrow \end{cases}$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $a_n \leqslant A_m \leqslant B_n$, donc $a_n \leqslant x$.

de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A_n \leqslant B_m \leqslant b_n$, donc $x \leqslant b_n$.

Si il existe un second réel $x' = \begin{cases} (B'_n) & \searrow \\ (A'_n) & \nearrow \end{cases}$ qui vérifie les mêmes propriétés :

$\forall\ m \in \mathbb{N}$, $a_m \leqslant x' \leqslant b_m$.

On a donc $x' \leqslant b_m$, donc $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, $A'_n \leqslant b_m$.

Et en particulier pour $m = \varphi(n)$: $A'_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b_{\varphi(n)} = B_n$.

Et de même : $a_m \leqslant x'$, donc $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$, $a_m \leqslant B'_n$.

Et en particulier pour $m = \varphi(n)$: $A_n = a_{\varphi(n)} \leqslant_{\mathbb{Q}} B'_n$.

Donc $x = x'$ car ce sont des suites de bissecantes similaires.

▷ Corrigé de l'exercice 4.5

1. Addition

   (a) • En effet, $(a_n + c_n)$ est croissante et $(b_n + d_n)$ est décroissante.
   • Il s'agit de suite de rationnels (corps $\mathbb{Q}$).
   • $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $b_n + d_n \geqslant a_n + c_n$.
   • $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(b_{n+1} + d_{n+1}) - (a_{n+1} + c_{n+1}) = (b_{n+1} - a_{n+1}) + (d_{n+1} - c_{n+1})$
   $\leqslant \frac{1}{2}((b_n - a_n) + (d_n - c_n)) = \frac{1}{2}((b_n + d_n) - (a_n + c_n))$

   (b) A démontrer

   (c) On étend la soustraction par addition avec un nombre négatif (i.e. plus petit que 0, ie $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} 0$ ou de manière équivalente : $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $b_n \leqslant_{\mathbb{Q}} 0$

2. Si on n'avait pas l'existence de n_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant 0$ et donc $x \leqslant 0$.
   Pour $n \geqslant n_0$,
   $(a_n c_n)$ est croissante : produit de deux suites croissantes, positives.
   $(b_n d_n)$ est décroissante : produit de deux suites décroissantes, positives.
   Enfin :
   $$0 \leqslant b_n d_n - a_n c_n = d_n(b_n - a_n) + a_n(d_n - c_n) \leqslant \frac{1}{2^n}(d_0(b_0 - a_0) + b_0(d_0 - c_0))$$
   Ainsi $\lim b_n d_n - a_n c_n = 0$.

3. Inverse

   (a) Cela découle du fait que $x \neq 0$ (et $0 \leqslant x$)

   (b) $\frac{1}{b_{n+1}} \geqslant \frac{1}{b_n}$: car (b_n) est décroissantes et positives.
   $\frac{1}{a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{a_n}$: car (a_n) est croissantes et positives.
   Enfin :
   $$0 \leqslant \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - a_n}{b_n a_n} \leqslant \frac{1}{2^n} \frac{b_0 - a_0}{a_0^2}$$
   Ainsi $\lim \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n} = 0$.

   (c) Il existe un unique réel dans chaque $\left(\left[\frac{1}{b_n}, \frac{1}{a_n}\right]\right)$, il s'agit du nombre $\frac{1}{x}$.
   Si $x \leqslant 0$ et $x \neq 0$, on considère l'opposée de l'inverse de l'opposé de x...

4. Gratuit : une démonstration de plus :
$x = \left\{ \begin{array}{ll} b_n & \searrow \\ a_n & \nearrow \end{array}\right.$, $y = \left\{ \begin{array}{ll} d_n & \searrow \\ c_n & \nearrow \end{array}\right.$ et $z = \left\{ \begin{array}{ll} f_n & \searrow \\ e_n & \nearrow \end{array}\right.$.
Alors $x+z = \left\{ \begin{array}{ll} b_n+f_n & \searrow \\ a_n+e_n & \nearrow \end{array}\right.$ et $y+z = \left\{ \begin{array}{ll} d_n+f_n & \searrow \\ c_n+e_n & \nearrow \end{array}\right.$ Comme $x \leqslant y$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant d_n$ et également $e_n \leqslant f_n$.
Et donc $a_n + e_n \leqslant a_n + f_n \leqslant d_n + f_n$. Ainsi $x+z \leqslant y+z$.
Et les segments emboîtés $[a_n e_n, b_n f_n]$ converge vers xz et les segments emboîtés $[c_n e_n, d_n f_n]$ converge vers yz.
Par positivité : $a_n e_n \leqslant a_n f_n \leqslant d_n f_n$. Donc $xy \leqslant yz$.
Enfin :
En quatre temps :
— Comme $x \leqslant y$ avec $z_1 = x'$, puis comme $x' \leqslant y'$ avec $z_2 = y$, on a :
$$x + x' \leqslant y + x' \leqslant y' + x'$$
— Comme $x \leqslant y$ avec $z_1 = x' \leqslant 0$, puis comme $x' \leqslant y'$ avec $z_2 = y \leqslant 0$, on a :
$$xx' \leqslant yx' \leqslant y'x'$$
— Comme $x \leqslant y$, avec $z = -x-y$, on a $-y = x+z \leqslant y+z = -x$.
— Comme $0 < x \leqslant y$, avec $z = \dfrac{1}{xy}$, on a
$$\underbrace{0 \times z}_{0} \leqslant \underbrace{x \times z}_{=\frac{1}{y}} \leqslant \underbrace{y \times z}_{=\frac{1}{x}}$$
Et comme $\dfrac{1}{y} \neq 0$, sinon $1 = y \times \dfrac{1}{y} = y \times 0 = 0$, ce qui est faux. Donc $0 < \dfrac{1}{y}$.

▷ **Corrigé de l'exercice 4.6**

1. $x \leqslant b_0 < p_0 + 1 \in \mathbb{N}$, si $b_0 = \dfrac{p_0}{q_0}$
2. Soit E une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de E, non vide donc.
E est non vide : soit $a \in E$. E est majorée, on note $b \in \mathcal{M}$.
Il est possible que $b = \{ \begin{array}{ll} (\beta_n^2) & \searrow \\ (\beta_1^n) & \nearrow \end{array} \notin \mathbb{Q}$, on prend alors $b = \beta_0^2$, un majorant rationnel. De même, si $a = \{ \begin{array}{ll} (\alpha_n^2) & \searrow \\ (\alpha_1^n) & \nearrow \end{array} \notin \mathbb{Q}$, on prend alors $a = \alpha_0^1$, un rationnel, plus petit qu'un élément de E (a).
Construisons la suite suivante de bissecantes par récurrence.
$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \begin{array}{ll} a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n & \text{si } c_n \in \mathcal{M} \\ a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n, & \text{si } c_n \text{ n'est pas majorant de } E \end{array}$$
Le nombre $x = \left\{ \begin{array}{ll} (b_n) & \searrow \\ (a_n) & \nearrow \end{array}\right.$ est la borne supérieure de E.
x est bien défini :
— Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant c_n \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.
Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
— pour tout entier n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} c_n - a_n & = \dfrac{a_n + b_n - 2a_n}{2} \\ b_n - c_n & = \dfrac{2b_n - a_n - b_n}{2} \end{array}\right\} = \dfrac{1}{2}(b_n - a_n)$.
On a alors, par récurrence, pour tout entier n : $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$ Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n est un majorant de E, par construction et a_n n'en est pas.
Et $a_n = b_n - \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \leqslant x \leqslant b_n = a_n + \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.
• Si x n'est pas majorant de E, il existe $u \in E$ tel que $x < u$.
et donc $b_n \leqslant x + \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < u$.
En prenant n tel que $\dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \leqslant \dfrac{u-x}{2}$ (possible), on a $b_n \leqslant \dfrac{x+u}{2} < u$.

Ceci est impossible. Donc x est bien un majorant de E, i.e. $x \in \mathcal{M}$.

- Puis pour tout n, a_n n'est pas un majorant, donc il existe $u_n \in E$ tel que $a_n < u_n$.

  Puis $x \leqslant b_n = a_n + \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < u_n + \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

  donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ u_n \in E$ tel que $x - \dfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) < u_n$

▷ Corrigé de l'exercice 4.7

1. On peut exploiter les deux théorèmes de la borne supérieures, afin de
   — construire les suites bissecantes à partir des coupures ($\Rightarrow$)
   — construire les coupures à partir des suites bissecantes ($\Leftarrow$).
2. Tout à tour :
   — On donne sens géométrique à la limite d'une suite de Cauchy
   — On définit la relation d'équivalence (sur les suites de Cauchy) : $a_n \sim b_n$ ssi $\quad \forall\ \epsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ p, q \geqslant N, \quad |a_p - b_q| \leqslant \epsilon$
   (Pour la transitivité, on prend $\dfrac{\epsilon}{2}$ et l'inégalité triangulaire). $\mathbb{R}$ est alors le quotientage des limites des suites de Cauchy sur la relation $\sim$.
   — On montre la propriété d'être bornée (à partir d'un certain rang, donc bornée tout cours)
   en prenant $\epsilon = 1$: $\forall\ p \geqslant N$, $a_N - 1 \leqslant a_p \leqslant a_N + 1$.
   — L'addition est naturelle : $\overline{a_n} + \overline{b_n} = \overline{a_n + b_n}$.
   — La multiplication est très naturelle (peu importe le signe !!), mais pas facile à démontrer.
   On exploite : $|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p(b_p - b_q) - (a_q - a_p)b_q| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2 \sup b_n} + \dfrac{\epsilon}{2 \sup a_n}$.
   — Pour la relation d'ordre, il faut démontrer que si on n'a pas $a_n \sim b_n$, alors on a :
   - ou bien $\exists\ \epsilon_0$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ p_n, q_n$ tel que $a_{p_n} - b_{q_n} > \epsilon_0$ (cas $(b_n) \leqslant (a_n)$).
   - ou bien $\exists\ \epsilon_0$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ p_n, q_n$ tel que $a_{p_n} - b_{q_n} < -\epsilon_0$ (cas $(a_n) \leqslant (b_n)$).

   On prend la négation de $a_n \sim b_n$, mais ce n'est pas suffisant, il faut aussi exploiter le fait qu'elles soient de Cauchy, avec $n = \max(N_{\epsilon_0,a}, N_{\epsilon_0,b}) \ldots$
   — Reste à montrer l'équivalence des constructions.