Suites classiques

1 Suite définie implicitement

Principe
Les termes de la suite sont définie comme solution d'une fonction dépendant de n.
Il faut commencer par démontrer l'existence de la suite, cette existence ne peut être que théorique; c'est à dire qu'il est impossible d'exprimer simplement (ou analytiquement) la solution du probléme. Le théoréme utilisé est donc ici : *le théorème de la bijection* ou *théorème des valeurs intermédiaires monotone*. Rappelons les hypothèses : la fonction est continue, monotone. Ce sont finalement nos seules connaissances, il faut les utiliser à de multiples reprises...
L'utilisation de tableau de variations et d'un bout de schéma peut s'avérer très pratique...

▷ **Exercice 1.1.**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction numérique $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$.
Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.
On note x_n cette racine. Étudier la suite (x_n).
On pourra commencer par tracer sur un même graphe $y = f_n(x)$ et $y = f_{n+1}(x)$, puis localiser x_{n+1} et x_n...

Comment étudier une suite définie par une équation (implicitement) ?
On suppose que f_n est une application monotone sur I, continue et que $0 \in f_n(I)$.
On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f_n^{-1}(0)$ (il s'agit d'un ensemble à un seul élément).

- $\rightsquigarrow$ *Encadrement.*
  On a nécessairement $x_n \in I$, et donc si I est borné, il en est de même de (x_n).
  Étude de la dynamique (c'est le plus subtil).
  Il faut comparer $f_{n+1}(x_n)$ à $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, puis utiliser la monotonie de f_{n+1}.
  Ainsi par exemple, si l'on sait que $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$
  puis que f_{n+1} est décroissante, alors $x_n < x_{n+1}$ et donc (x_n) croissante.
  Pour faire cette comparaison, on est souvent amené à faire $f_{n+1}(x_n) = f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n)$.
  Très souvent, on exploite le tableau de variations.
- $\rightsquigarrow$ *Convergence.*
  On applique tout simplement le théorème de la limite monotone.
- $\rightsquigarrow$ *Recherche de la limite.*
  Ici, il faut montrer toutes nos qualités d'analyste mathématicien : il faut ***savoir élimer les termes négligeables*** *pour garder le meilleur qui donne alors une première approximation puis la valeur ℓ de la limite visée.*
- $\rightsquigarrow$ *Recherche d'un développement limité.*
  Même chose que précédemment, en considérant $v_n = x_n - \ell$. C'est le début du D.L....

▷ **Exercice 1.2.**
Soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - e$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\,!\, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   On définit ainsi <u>*parfaitement*</u> *une suite (x_n)*
2. Etudier les variations de la suite (x_n)
3. En déduire que la suite (x_n) converge.

Pour continuité le DL, il faut en savoir un peu plus sur les séries. Ici la limite est 1

▷ **Exercice 1.3.**
Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :
$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\ x_n \in [0,1] \text{ tel que } f\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = f(x_n).$$
La suite (x_n) est-elle convergente ?

▷ **Exercice 1.4.**
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considére le polynôme
$P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1.$
Etudier la fonction polynomiale associée et en déduire que P_n n'admet qu'une seule racine positive. On la note r_n.
Etudier les variations de (r_n) puis déterminer sa limite ℓ.
Chercher un équivalent de $(r_n - \ell)$

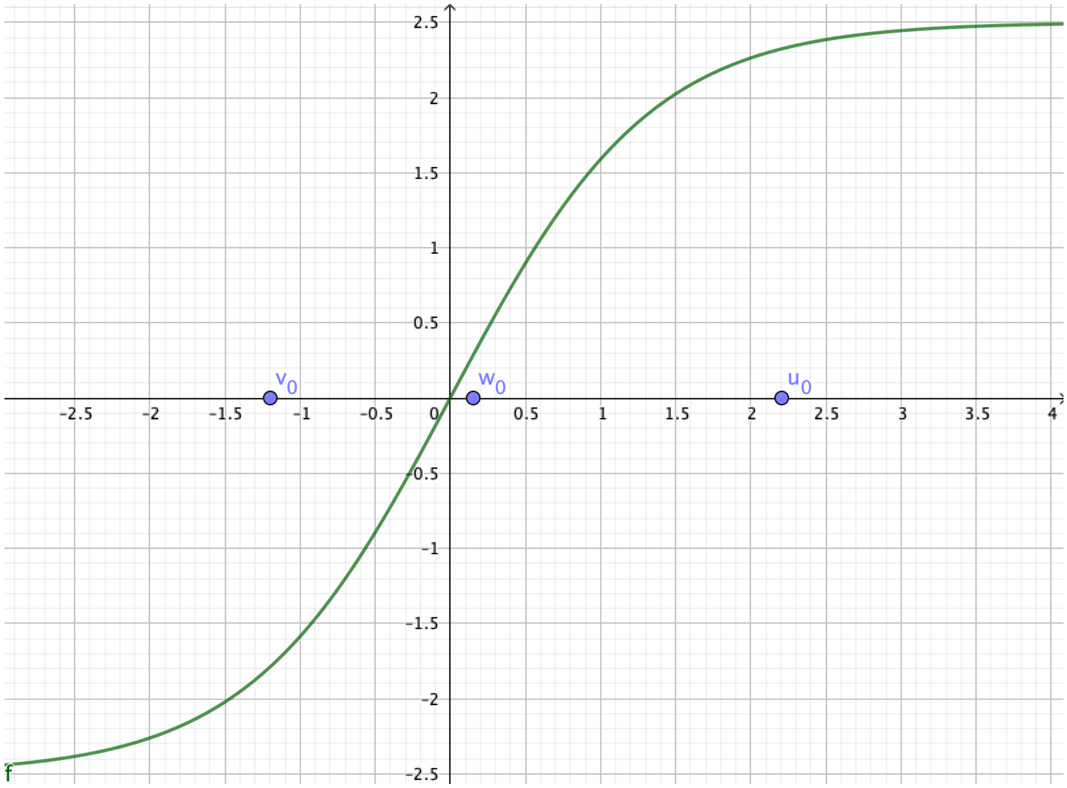
▷ **Exercice 1.5.**
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel > 0 et un seul, noté u_n, tel que $(u_n)^n \ln(u_n) = 1$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge, déterminer sa limite.

2 Suite définie par une récurrence fixe : $u_{n+1} = f(u_n)$

Principes de base
Soit f une fonction continue d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Il faut commencer par s'assurer de l'existence de la suite : suivant le domaine de définition D_f de f, il faut prendre garde à ce qu'une telle suite soit bien définie ; si $f(D_f) \subset D_f$ et $u_0 \in D_f$ cela ne pose pas de problème.
- On admet (momentanément) le résultat suivant (cela dépend d'une propriété sur f, non encore définie) : *Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue. SI la suite converge vers ℓ ALORS $f(\ell) = \ell$.*

Insistons :
- f est bien indépendante de n.
- ce théorème ne donne donc absolument pas la convergence de la suite, simplement les éventuelles limites. Toutefois si f n'admet pas de point fixe, la suite est nécessairement divergente.

▷ **Exercice 2.1.**
On a représenté une fonction f quelconque sur un graphe et plusieurs valeurs initiales (u_0, v_0, w_0). Représentez les valeurs de u_k pour $k \leqslant 5$, v_k pour $k \leqslant 5$ et w_k pour $k \leqslant 5$



▷ **Exercice 2.2.**
Etudier la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

Comment étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
On procède dans l'ordre suivant :

- ⇝ *Etude des variations de f et/ou du signe de $f(x)-x$ (ce qui donne aussi les solutions de $f(\ell)=\ell$).*
- ⇝ *Recherche des intervalles J de $\mathbb{R}$ stables par f (i.e. tels que $f(J) \subset J$) : on montre par récurrence que si $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.*
- ⇝ *Cas où f est croissante sur J stable par f : on montre par récurrence que si $u_0 \in J$ alors (u_n) est monotone. Son sens de variation dépend du signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.*
- ⇝ *Cas où f est décroissante sur J stable par f :*
  On se ramène au cas précédent en posant $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$. Les suites (v_n) et (w_n) vérifient :
  $$v_0 = u_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$
  $$w_0 = u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f \circ f(w_n)$$
  La fonction $g = f \circ f$ est croissante, J est stable par g, les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraire, il reste à étudier leur convergence.
- ⇝ *Nous verrons des méthodes complémentaires avec l'inégalité des accroissements finis. Souvent, on exploite également les formules bien connues des développements limités. L'usage des séries peut également aider (trouver des équivalents par la méthode dite « des petits pas ».*

▷ **Exercice 2.3.**
Etudier la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
En exploitant la comparaison logarithmique, on pourra montrer que, pour tout $\epsilon > 0$: $u_n = 2 + O\left((\frac{1}{4}+\epsilon)^n\right)$

Comparaison logarihtmique
Si on arrive à montrer que pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell (< 1)$.
Alors pour tout $\epsilon > 0$ (on prend aussi $\epsilon < 1-\ell$), à partir d'un certain rang : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, où v_n est une suite géométrique de raison $\ell+\epsilon$.
Et donc par comparaison logarithmique : $u_n = O(v_n) = O\left((\ell+\epsilon)^n\right)$, pour tout $\epsilon > 0$...

▷ **Exercice 2.4.**
Etudier la suite définie par $u_0 \in [0,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$

▷ **Exercice 2.5.**
Etudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{2}{u_n}$.

▷ **Exercice 2.6.**
On pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{2}$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ et que $f \circ f(x) \geqslant 1$.
2. Montrer que f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que : $\exists\, !\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.
4. Soit (u_n) telle que $u_0 = 1 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que : $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 1$ et que $(u_n) \to \ell$

▷ **Exercice 2.7.**
Etudier la suite définie par $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. Déterminer toutes les applications continues telle que $f(x) = f(\arctan(x))$.
Peut-on “alléger" les hypothèses de l'exercice ?

▷ **Exercice 2.8.**
Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Etudier le comportement de la suite suivant les cas :
a) $u_0 \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
b) $u_0 \in [-1, 0]$

▷ **Exercice 2.9.** On note I l'intervalle $\left]0; \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right[$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \dfrac{1}{10}$.
On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. Déterminer les variations de f, comparer $f(I)$ et I.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

▷ **Exercice 2.10.** Soit $u_0(a) = a$ et $u_{n+1}(a) = \ln(1 + u_n(a))$.

1. Montrer l'inégalité suivante dans $\mathbb{R}^+$:
   $$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$
2. $u_n(a)$ est-elle définie sur $\mathbb{R}^+$?
   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(a) = 0$.
3. Montrer que $u_n(1) \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire la nature de $\sum u_n(1)$.
4. Pour $a \geqslant 1$, a-t-on $u_n(a) \geqslant u_n(1)$?
   Quelle est la nature de $\sum u_n(a)$?

Correction des exercices

▷ **Corrigé de l'exercice 1.1** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction f_n est *continue* sur $\mathbb{R}^+$, c'est une fonction polynôme.
2. La fonction f_n est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}^+$.
   On peut le démontrer avec la dérivée.
   Ou bien, on peut le démontrer directement :
      $x \mapsto x^n$, $x \mapsto 16x^2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ (elle sont bien connues)
      et $x \mapsto -4$ est constante (donc croissante).
      Une somme de fonctions croissantes est croissante.
3. donc la fonction f_n établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[f(0); \lim\limits_{+\infty} f[$.

Or $f(0) = -4$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Donc *f réalise une bijection* de $[0; +\infty[$ sur $[-4; +\infty[$.
Comme $0 \in [-4; +\infty[$, $\exists\, !x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$
(Remarque : $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433$, $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{257}}{32} \approx 0,470$, $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{17}} \approx 0,485\ldots$) $f_n(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2^n} > 0 = f_n(x_n)$ et par croissance de f_n, on a $x_n < \dfrac{1}{2}$.
   puis $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + 16x_n^2 - 4 = x_n^n(x_n - 1) < 0$ car $x_n \in]0, 1[$.
   Donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$, par croissance de f_{n+1} : $x_n < x_{n+1}$.
Ainsi la suite (x_n) est croissante.
Elle est majorée par $\dfrac{1}{2}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $\ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Par croissance, $0 < x_n^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et donc par encadrement : $(x_n^n) \to 0$.
Et donc $16x_n^2 - 4$ converge vers 0 mais aussi vers $16\ell^2 - 4$.
   par unicité : $\ell = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}\ldots$
On note $y_n = \ell - x_n (> 0)$, alors $y_n \to 0$. Connaître y_n est le début de la connaissance de x_n.
   $f_n(x_n) = 0 = f_n(\ell - y_n) = (\ell - y_n)^n + 16(\ell - y_n)^2 - 4 = (\ell - y_n)^n + 16y_n^2 - 16y_n$ car $\ell = \dfrac{1}{2}$.
   Puis, comme $y_n \to 0$, $16y_n^2 = o(y_n)$, donc $\sim (\ell - y_n)^n \sim 16y_n$.
   Donc $\dfrac{y_n}{\frac{1}{2^{n-4}}} = \dfrac{16y_n}{\ell^n} \sim \left(1 - \dfrac{y_n}{\ell}\right)^n$. Il ne faut pas conclure trop vite : rappel $(1 + \dfrac{x}{n})^n \to e^x$.
   Ici $(y_n \geqslant 0)$, $0 \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{y_n}{\ell}\right)^n = n\ln(1 - \dfrac{y_n}{\ell}) \leqslant -n \times \dfrac{y_n}{\ell} \sim 2n(\ell - y_n)^n \to 0$. $\left(1 - \dfrac{y_n}{\ell}\right)^n \to e^0 = 1$
   Ainsi $y_n \sim \dfrac{1}{2^{n-4}}$ et $x_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n-4}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

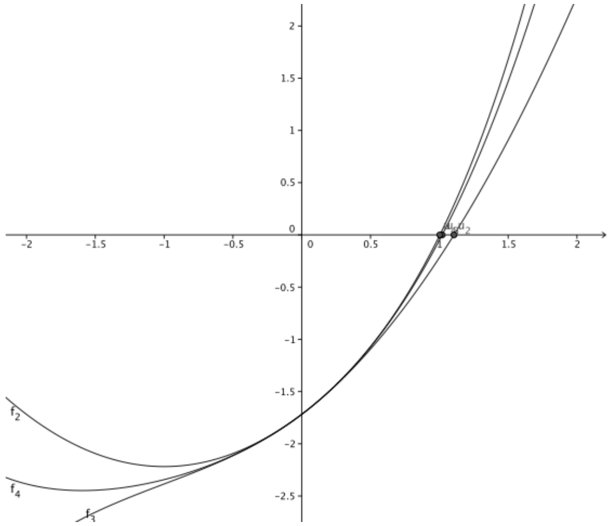
▷ **Corrigé de l'exercice 1.2**

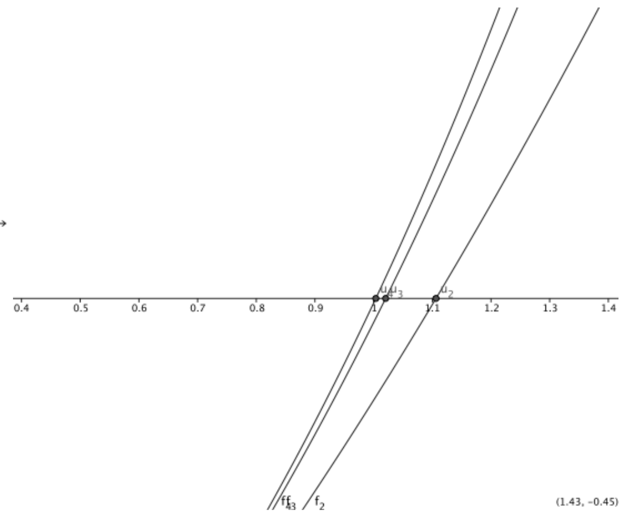
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Alors par somme de fonctions, $x \mapsto f_n(x)$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Enfin, comme $f_n(0) = 1 - e < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théoréme de la bijection permet d'affirmer qu'il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons vu que f_n est croissante.
   De plus $f_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} - e = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
   Donc $f_n(x_{n+1}) = \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=0} - \dfrac{x_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!} < 0$, car $x_{n+1} > 0$, d'aprés ce que l'on a vu précédemment.
   Donc on a le tableau suivant :

x	0		x_{n+1}		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	$1-e$	$\nearrow$	<0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

   Donc $x_{n+1} < x_n$, ceci est vrai pour tout entier n. Donc (x_n) est décroissante.





3. (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

Ainsi $y_n \sim \dfrac{1}{2^{n-4}}$ et $x_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n-4}} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $\varphi : \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x + \dfrac{1}{n}) - f(x)$.
On cherche à montrer qu'il existe x_n tel que $\varphi(x_n) = 0$.
Supposons le contraire.
On a donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, avec $x_k = \dfrac{k}{n}$: $\varphi(x_k) \neq 0$. Si il existe k tel que $\varphi(x_k)$ et $\varphi(x_{k+1})$ sont de signe contraire,
alors avec le TVI appliquée à φ continue, on trouve $\xi \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $\varphi(\xi) = 0$. Impossible.
Donc les n nombres $\{\varphi(x_k), k \in [\![0, n-1]\!]\}$ sont tous strictement du même signe.
On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + \frac{1}{n}) - f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_n) - f(x_0) = f(1) - f(0) = 0$$

C'est impossible, puisqu'on somme n termes tous non nuls et du même signe.
Donc notre hypothèse initiale est fausse : il existe x_n tel que $\varphi(x_n) = 0$.

La question de la convergence de la suite n'a pas de sens, car (x_n) est mal définie (il aurait fallut la strictement monotonie sur φ, mais cela changerait tout l'exercice.).

▷ Corrigé de l'exercice 1.4

Pour le calcul de la limite de (r_n), on sait que $P_n(r_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_n^k - 1 = 0$.

Il faut réduire le nombre de (r_n), en présence. Heureusement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$, si $a \neq 1$.

C'est le cas ici (on montre que $r_n < 1$ si $n \geqslant 2$). On a donc :

$$\frac{r_n - r_n^{n+1}}{1 - r_n} = 1 \iff r_n^{n+1} - 2r_n + 1 = 0$$

On trouve (après manipulation) : $(r_n) \to \dfrac{1}{2}$, puis $r_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + o(\dfrac{1}{2^n})$ comme DL.

▷ Corrigé de l'exercice 1.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

1. Etude de la fonction f.
   f_n est dérivable (produit usuel) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, x > 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + x^{n-1} = x^{n-1}(n \ln x + 1)$.
   Or $n \ln x + 1 \geqslant 0 \iff \ln x \geqslant \dfrac{-1}{n} \iff x \geqslant e^{-1/n}$ (croissance de exp).
   Donc f_n est décroissante sur $]0, e^{-1/n}]$ puis croissante sur $[e^{-1/n}, +\infty[$.

2. Montrer qu'il existe un unique u_n tel que $f_n(u_n) = 1$.

   Or $\lim\limits_{0^+} f_n = 0$ (croissance comparée), $f_n(e^{-1/n}) = -\dfrac{1}{ne} < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$.

   Donc $1 \notin f(]0, e^{-1/n}[$ et f_n continue et strictement croissante donc établit une bijection de $]e^{-1/n}, +\infty[$ sur $]-\dfrac{1}{en}, +\infty[$.

   Alors 1 n'admet un et un seul antécédent par f sur $\mathbb{R}_+^*$, il est même sur $]e^{-1/n}, +\infty[$. On le note u_n

3. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   $$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{u_{n+1}} \times u_{n+1}^{n+1} \ln(u_{n+1}) = \frac{1}{u_{n+1}} f_{n+1}(u_{n+1}) = \frac{1}{u_{n+1}}$$

   Or $f_{n+1}(1) = 1^{n+1} \ln 1 = 0$, donc $f_{n+1}(1) \leqslant f_{n+1}(u_{n+1})$ et par croissance de f_{n+1} sur $]e^{-1/(n+1)}, +\infty[$: $1 \leqslant u_{n+1}$.

   Par conséquent, $f_n(u_{n+1}) = \dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 = f_n(u_n)$. Par croissance de f_n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Par conséquent la suite (u_n) est décroissante.

4. (u_n) est décroissance et minorée par 1 (voir un calcul plus haut), donc (u_n) converge et $\lim(u_n) \geqslant 1$.

   On va chercher un majorant de (u_n) par une suite qui tend vers 1, de la forme $1 + \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   Notons, par la règle de Lhospital que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et donc si $a_n \to 0$: $\ln(1+a_n) \sim a_n$.

   Notons également que $(1+a_n)^n = \exp(n\ln(1+a_n))$.

   Et donc si $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors $(1+a_n)^n = \exp(n\ln(1+\dfrac{1}{n^\alpha}))$.

   Or : $n\ln(1+\dfrac{1}{n^\alpha}) \sim \dfrac{n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \to 0$ si $\alpha > 1$.

   Et donc si $\alpha > 1$, $(1+a_n)^n \to e^0 = 1$, par composition des limites.

   Alors, dans ce cas, $f_n(1+a_n) \sim 1 \times a_n \to 0$. Donc $u_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{n^\alpha}$, pour tout $\alpha > 1$.

   Et si $\alpha < 1$: $n\ln(1+\dfrac{1}{n^\alpha}) \sim \dfrac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha} \to +\infty$

   En fait, on doit aller plus loin dans le DL : $\ln(1+\dfrac{1}{n^\alpha}) = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + \dfrac{1}{3n^{3\alpha}} + o(\dfrac{1}{n^{3\alpha}})$.

   Et donc $n\ln(1+\dfrac{1}{n^\alpha}) = n^{1-\alpha} - \dfrac{1}{2}n^{1-2\alpha} + \dfrac{1}{3}n^{1-3\alpha} + o(n^{1-3\alpha})$.

   Ainsi, si $\alpha \in]\dfrac{1}{2}, 1[$, $1-\alpha > 0$, $1-2\alpha < 0$ et $1-3\alpha < 0$,

   Donc $\lim \exp \dfrac{1}{2}n^{1-2\alpha} = \lim \exp \dfrac{1}{3}n^{1-3\alpha} = 1$

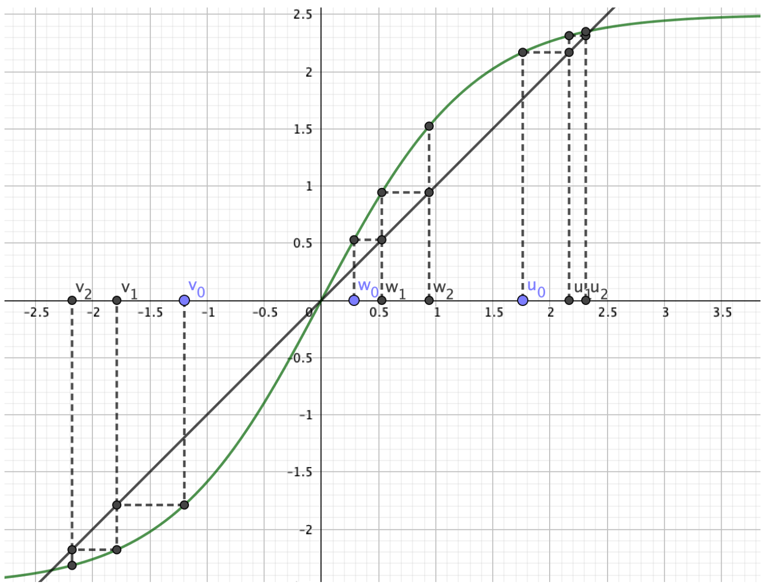
   et donc $f_n(1+\dfrac{1}{n\alpha}) \sim \dfrac{e^{n^{1-\alpha}}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par croissance comparée.

   On en conclue que $f_n(u_n) \leqslant f_n(1+\dfrac{1}{n^{3/4}})$ (à partir d'un certain rang) et donc $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

   Par encadrement $(u_n) \to 1$.

5. Pour l'équivalent de $u_n - 1$, il semble que $\dfrac{1}{n^1}$ soit intéressant mais...

▷ **Corrigé de l'exercice 2.1**



▷ Corrigé de l'exercice 2.2

$f : x \mapsto \sqrt{2-x}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2]$, f décroissante et $f([0,2]) = [f(2), f(0)] = [0, \sqrt{2}] \subset [0,2]$.

$\ell > 0$ et $f(\ell) = \ell \iff \ell > 0$ et $\ell^2 + \ell - 2 = 0 \iff \ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et converge vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$. Il s'agit d'une translation de la fonction $\sqrt{\cdot}$.
Donc, on peut affirmer directement que $\mathcal{D}_f = [-2, +\infty[$, (même si $\mathcal{D}_{f'} =]-2, +\infty[$).

et $f([-2, +\infty[) = \mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_f$. $u_0 \in \mathcal{D}_f$.

Ainsi (u_n) est parfaitement définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
Par ailleurs, f est strictement croissante, donc (u_n) est strictement monotone.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (comme $u_n \geqslant 0$) :

$$u_{n+1} \geqslant u_n \Leftrightarrow 2 + u_n \geqslant u_n^2 \Leftrightarrow (u_n - 2)(u_n + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow u_n \in [0,2]$$

Donc (u_n) est croissante si $u_0 \in [0, 2[$, constante si $u_0 = 2$ et décroissante si $u_0 > 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (par croissance de $\sqrt{\cdot}$) :

$$u_n \geqslant 2 \iff u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \geqslant \sqrt{4} = 2$$

Ainsi si $u_0 > 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$ (récurrence) et si $u_0 < 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$ (récurrence).
Dans tous les cas la suite (u_n) est convergente (croissante majorée si $u_0 < 2$ et décroissante minorée si $u_0 > 2$).
La limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, d'après un calcul fait plus haut, cela donne $\ell = 2$ ou $\ell = -1$.

La seconde situation est impossible donc, pour tout $u_0 > 0$, (u_n) converge vers 2.
Si l'on veut calculer une vitesse de convergence, il faut comparer $u_{n+1} - 2$ à $u_n - 2$.

On note, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$. On a donc $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 4} - 2$.

On reconnait un nombre dérivé : $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \sqrt{}'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, comme $(v_n) \to 0$, on trouve $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to \dfrac{1}{4}$.

Soit $\epsilon > 0$, si on note $w_n = (\dfrac{1}{4} + \epsilon)^n$. Il existe N tel que $\forall\, n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$.

Alors $(v_n) = O(w_n)$ et en particulier, pour tout $\epsilon > 0$: $u_n = 2 + O\left((\dfrac{1}{4} + \epsilon)^n\right)$

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

$f : x \mapsto \sqrt{2-x}$. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2]$, f décroissante et $f([0,2]) = [f(2), f(0)] = [0, \sqrt{2}] \subset [0,2]$.

$\ell > 0$ et $f(\ell) = \ell \iff \ell > 0$ et $\ell^2 + \ell - 2 = 0 \iff \ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et converge vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

Soit $f : x \mapsto x^2 + \dfrac{2}{x}$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+$

si $u_n \geqslant 1$, alors $u_n^2 \geqslant u_n$ et donc $u_{n+1} > u_n$.

Donc :

- Si $u_0 \geqslant 1$, alors (par récurrence), $u_{n+1} > u_n > 1$.
- Si $u_0 < 1$, alors $\dfrac{2}{u_n} > \dfrac{2}{1} > 2$, donc $u_1 > 1$, puis pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} > u_n > 1$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante, et $u_1 > 1$.

Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n : u_n \geqslant u_1^{2^{n-1}}$.

— $u_1^{2^{1-1}} = u_1^{2^0} = u_1$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 1$, supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \dfrac{2}{u_n^2} \geqslant u_n$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n^2 \geqslant (u_1^{2^{n-1}})^2 = u_1^{2\times 2^{n-1}} = u_1^{2^{n-1+1}}$, donc $\mathcal{P}_{n+1}$.

Comme $u_1 > 0$, on a minoré par une suite qui diverge vers l'infini. Donc (u_n) également.
(Par la suite, on pourra étudier $\ln(u_n)\ldots$*)*

▷ Corrigé de l'exercice 2.6

Pour démontrer que f est k-lipschitzienne, la stratégie consiste à exploiter l'inégalité des accroissements finis :

Si f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \sup\limits_{t\in]x,y[} |f'(t)| \times |x - y|$.

Ici, $f'(t) = \dfrac{-\cos\frac{1}{t}}{2t^2}$, donc $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ si $t \geqslant 1\ldots$

On a ensuite : $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$ et par récurrence $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$.

Par conséquent $(u_n) \to \ell\ldots$

▷ Corrigé de l'exercice 2.7

▷ Corrigé de l'exercice 2.8

▷ Corrigé de l'exercice 2.9

▷ Corrigé de l'exercice 2.10