AUTOUR DU LEMME DE BAIRE

ACTIVITÉ DE VÔTRE CHER AOI - 2024

Préliminaires

- Dans tout le sujet, on note (X, δ) un espace métrique, et pour tout $A \subset X$ on note l'adhérence de A $\overline{A}$ et l'intérieur $\mathring{A}$.
- On note l'ensemble des ouverts de X $\tau(X)$, stable par union quelconque et intersection finie.
- On dit que (X, δ) est un espace de Baire si et seulement si pour tout suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau(X)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{O_n} = X$, on a:

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X$$

- Une partie $A \subset X$ est dit *résiduel* s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts qui est dense dans X. A est dit *maigre* s'il est contenu dans une réunion dénombrable des fermés d'intérieur vide.
- (X, δ) est dit complet si, pour tout suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, (u_n) converge vers une valeur $u \in X$.
- On note $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \cdot)$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des application continues sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Le but de ce problème est démontrer l'une des plus grandes erreurs des mathématiciens du 18è siècle, qui consistait à croire que tout les fonctions continues étaient dérivable, au moins à un nombre finie de points, d'une manière très forte, en employant le lemme de Baire.

1. Lemme de Baire

(1) Montrer que (X, δ) est un espace de Baire si et seulement si de tout suite de fermés de X $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathring{F_n} = \emptyset$, alors:

$$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \emptyset$$

(2) Montrer qu'une partie $A \subset X$ est maigre si et seulement si $X \backslash A$ est un résiduel de X.

(3) Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X tous dense dans X. On suppose que (X, δ) est complet, et on fixe $V \in \tau(X)$. Montrer que l'on peut construire une suite de boules fermés $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui respecte les deux conditions suivantes:
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de rayon inférieur ou égale à $\frac{1}{2^n}$
   (b) $B_0 \subset V \cap O_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \mathring{B_n}$

(4) En déduire le Lemme de Baire: tout espace métrique complet est de Baire.

(5) Montrer que $\mathbb{R}$ est complet.

(6) En déduire que E muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Baire.

2. Fonctions "Tératologiques" sur [0,1]

On appelle fonction tératologique une application qui est continue sur son ensemble de définition mais dérivables nul part. On montre dans cette partie que, non seulement ces fonctions existent, mais sont dense dans E. On fixe $a \in]\frac{1}{2}, 1[$, $n \in \mathbb{N}$ et on note pour $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$:

$$U_{n,k} = \left\{ \phi \in E, \left| \phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| > a^n \right\}$$

(7) Montrer que $\Lambda_{n,k} : \phi \mapsto \left|\phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|$ est continue sur E.

(8) En déduire que $U_{n,k}$ est un ouvert, et de ce fait:

$$\bigcap_{k=0}^{2^n-1} U_{n,k} \in \tau(E)$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \bigcup_{m \geq n} U_m$$

(9) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que pour tout $\phi \in E$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, $\left|\phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leq \varepsilon$

(10) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$ et $\phi \in E$, $\Lambda_{m,k}(\phi) \leq \varepsilon$ et $a^m < \varepsilon$

(11) On pose $\psi : x \mapsto \phi(x) + \varepsilon \cos(2^m \pi x)$. Montrer que $\psi \in U_m$ et $\|\psi - \phi\|_\infty \leq \varepsilon$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est dense dans E.

(12) En déduire de tout ce qui précède que:

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n} = E$$

(13) On note $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Soit $x_0 \in [0,1]$, et $\phi \in X$. Justifier qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ telle que:

$$\Lambda_{\varphi(n),k}(\phi) > a^{\varphi(n)}$$

(14) On pose $k_n := \lfloor 2^{\varphi(n)} x_0 \rfloor$, $u_n = \frac{k_n}{2^{\varphi(n)}}$ et $v_n = \frac{k_n+1}{2^{\varphi(n)}}$ si $x_0 \neq 1$, et sinon $u_n = 1 - \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$ et $v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limites communes.

(15) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\phi(u_n) - \phi(v_n)}{u_n - v_n} \right| > (2a)^{\varphi(n)}$$

(16) Conclure que ϕ est continue partout sur $[0,1]$ mais dérivable nul part, et que l'ensemble des fonctions vérifiant cette condition est dense dans E.

3. Points de continuité de fonctions dérivables

Dans cette partie, (X, δ) et (Y, d) sont deux espaces métriques, avec (X, δ) complet. On considère une suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}((X,\delta),(Y,d))^{\mathbb{N}}$ qui tendent simplement vers une fonction f. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in X, \forall p \geq n, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon\}$$

(17) Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans X et que pour tout $x_0 \in \Omega_\varepsilon$, il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$:

$$d(f(x_0), f(x)) \leq 3\varepsilon$$

(18) En considérant la suite $(\Omega_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X.

(19) Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En posant la bonne suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans E.