# AUTOUR DU THÉORÈME DE BAIRE

J.J.T - LYCÉE PIERRE DE FERMAT - OCTOBRE 2024

Abstract. On présente ici une démonstration classique et élémentaire du théorème de Baire avec deux applications: on montre que l'ensemble des fonctions continues partout dérivables nul part sur $[0, 1]$ est non vide et dense dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ [1] et que l'ensemble des points de continuité d'une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ [2].

## Préliminaires

- Dans tout le texte, on note $(X, \delta)$ un espace métrique, et pour tout $A \subset X$ on note l'adhérence de $A$ $\overline{A}$ et l'intérieur $\mathring{A}$.
- On note l'ensemble des ouverts de $X$ $\tau(X)$, stable par union quelconque et intersection finie.
- On dit que $(X, \delta)$ est un espace de Baire si et seulement si pour tout suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau(X)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{O_n} = X$, on a:
$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = X$$
- Une partie $A \subset X$ est dit *résiduel* s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts qui est dense dans $X$. $A$ est dit *maigre* s'il est contenu dans une réunion dénombrable des fermés d'intérieur vide.
- $(X, \delta)$ est dit complet si, pour tout suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $(u_n)$ converge vers une valeur $u \in X$.
- On note $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \cdot)$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des application continues sur le segment $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On souhaite montrer le théorème de Baire, dont l'énoncé est le suivant:

**Théorème (dit des catégories de Baire):** Tout espace métrique complet est de Baire.

**Démonstration:** Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tau(X)^{\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts tous denses dans $(X, \delta)$. Soit $V$ un ouvert quelconque de $X$. On construit une suite de boules fermés $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui respectent les conditions suivantes:

(1) Le rayon de $B_n$ est inférieur ou égale à $\frac{1}{2^n}$.
(2) $B_0 \subset V \cap O_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset \mathring{B}_n \cap O_{n+1}$

Justifions que cette suite de boules est bien définie et existe réellement. $O_0$ est dense dans $X$, donc $V \cap O_0$ est non vide et ouvert en tant qu'intersection d'ouverts de $X$. Ainsi, soit $x_0 \in V \cap B_0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B_f(x_0, \varepsilon_0) \subset O_0 \cap V$. Quitte à réduire $\varepsilon_0$, on peut supposer $\varepsilon_0 \leq 1$.

Supposons qu'on à construit $n$ boules fermés qui respectent les conditions (1) et (2) $(B_0, B_1, ..., B_n)$. Alors, puisque $O_{n+1}$ est dense dans $X$, $\mathring{B}_n \cap O_{n+1}$ est non vide et ouvert en tant qu'intersection d'ouverts de $X$. Ainsi, en prenant $x_{n+1} \in \mathring{B}_n \cap O_{n+1}$, il existe $\varepsilon_{n+1} > 0$ tel que $B_f(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \mathring{B}_n \cap O_{n+1}$. Quitte à réduire $\varepsilon_{n+1}$, on peut supposer que $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$, d'où l'existence de notre suite de boules fermés.

Supposons que $(X, \delta)$ soit complet. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés décroissants de rayon qui tend vers 0. Par complétude de $(X, \delta)$:
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$$
Ainsi, il existe $x$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$. mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset V$ et $B_n \subset O_n$, on a:
$$V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$$
Et de ce fait l'intersection des $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $X$. □

Un énoncé équivalent de l'assertion $(X, \delta)$ est de Baire est de dire que de tout suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide, l'union des $(F_n)$ sur $\mathbb{N}$ est aussi d'intérieur vide. La démonstration est facile en passant par le complémentaire. Effectivement, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite de fermés, et posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = X \backslash F_n$. Alors $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts tous dense dans $X$, et de ce fait, puisque $(X, \delta)$ est supposer de Baire:
$$X \backslash \left( \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \cap F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$
Est d'intérieur vide. La réciproque ce fait exactement de la même manière par symétrie de raisonnement. On peut ainsi utiliser le lemme de Baire pour montrer de nombreux fait mathématiques non triviaux.

## Application: fonctions continues partout, dérivables nul part [1]

**Lemme:** $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Baire.

**Démonstration:** On montre en premier que $\mathbb{R}$ est complet. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq N$ et $q \geq N$:

$$|u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Soit $n > N$. Alors $|u_n| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq \varepsilon + |u_N|$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée après un certain rang, et donc bornée tout cours. La suite est donc à valeurs dans un compact de $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de Bolzano Weierstrass, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors:

$$|u_n - \ell| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right|$$

Avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Ainsi, pour $n$ assez grand, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $\mathbb{R}$ est complet. Montrons alors que $E$ est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy de fonctions. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq N$ et $q \geq N$:

$$\|f_q - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$$

Alors par complétude de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une fonction $f$, reste à voir si $f \in E$. Soit $x_0 \in [0,1]$, fixe, et $x \in [0,1]$.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x_0) - f_p(x)| + |f_p(x_0) - f(x_0)|$$

Ainsi, pour $p$ assez grand et $x$ assez proche de $x_0$, par continuité de $f_p$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Donc $f \in E$, et donc d'après le théorème de Baire, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Baire, car complet. □

**Théorème:** L'ensemble des fonctions continue partout dérivable nul part sur $[0,1]$ est non seulement non vide, mais dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

**Démonstration:** Fixons $a \in ]\frac{1}{2}, 1[$. On considère l'ensemble suivant, définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$:

$$U_{n,k} = \left\{\phi \in E, \left|\phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| > a^n\right\}$$

Et on pose de même manière l'application $\Lambda_{n,k}$:$E \to \mathbb{R}_+$:

$$\Lambda_{n,k} : \phi \mapsto \left|\phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|$$

La continuité de $\Lambda_{n,k}$ est assuré par la linéarité de $\phi \mapsto \phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right)$ et la continuité de la valeur absolue avec la majoration $\Lambda_{n,k} \leq 2\|\phi\|_\infty$. Ainsi, $U_{n,k} = \Lambda_{n,k}^{-1}(]a^n, +\infty[)$ donc ouvert. On en déduit que les ensembles:

$$U_n = \bigcap_{k=0}^{2^n-1} U_{n,k} \text{ et } V_n = \bigcup_{m\geq n} U_m$$

Sont des ouverts. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n$ est dense dans $E$. Soit $\phi \in E$ et $\varepsilon > 0$. Alors, par continuité uniforme sur $[0,1]$ de $\phi$ assuré par me théorème de Heine, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\Lambda_{n,k}(\phi) \leq \varepsilon$ pour $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$. De ce fait, en prenant $m$ assez grand, pour tout $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$, $\Lambda_{m,k}(\phi) \leq \varepsilon$ et $a^m < \varepsilon$. Posons $\psi \in E$:

$$\psi : x \mapsto \phi(x) + \varepsilon\cos(2^m\pi x)$$

Alors $\|\phi - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\psi \in U_m$. Effectivement, pour tout $k \in [\![0, 2^m - 1]\!]$:

$$\Lambda_{m,k}(\psi) = \left|\pm 2\varepsilon + \phi\left(\frac{k+1}{2^m}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^m}\right)\right| \geq 2\varepsilon - \varepsilon \geq \varepsilon > a^m$$

Ainsi, pour tout $\phi \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $\psi \in V_n$ qui est $\varepsilon$ proche de $\phi$. Donc $V_n$ est dense dans $E$ pour tout $\mathbb{N}$. Puisque $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Baire (voir lemme), on peut affirmer que l'ensemble:

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

Est dense dans $E$. Il suffit de montrer que cet ensemble est inclus dans celui des fonction continue partout mais dérivables nul part sur définies sur $[0,1]$. Pour ce faire, soit $\phi \in X$, et soit $x_0 \in [0,1]$. Puisque $\phi \in X$, il est dans une infinité des $(U_n)$. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissant, tel que:

$$\Lambda_{\varphi(n),k}(\phi) > a^{\varphi(n)}$$

Posons $k_n = \lfloor 2^{\varphi(n)} x_0 \rfloor$. Posons alors:

$$u_n = \frac{k_n}{2^{\varphi(n)}} \text{ et } v_n = \frac{k_n+1}{2^{\varphi(n)}}$$

(Au cas ou $x_0 = 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$ et $v_n = 1$). Pour $n$ assez grand, $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [0,1]$, et les deux suites sont adjacentes, de limite commune $x_0$, avec $|u_n - v_n| = \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$. Alors:

$$\left|\frac{\phi(u_n) - \phi(v_n)}{u_n - v_n}\right| = 2^{\varphi(n)} \Lambda_{\varphi(n),k_n}(\phi) > (2a)^{\varphi(n)}$$

Or, $2a > 1$. Donc $\phi$ n'est pas dérivable en $x_0$, et donc dérivable nul part sur $[0,1]$, ce qui achève la démonstration. □

Application: l'ensemble des points de continuité d'une application dérivée est dense [2]

Dans cette partie, $(X,\delta)$ et $(Y,d)$ sont deux espaces métriques, avec $(X,\delta)$ complet. On considère une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}((X,\delta),(Y,d))^{\mathbb{N}}$ qui tendent *simplement* vers une fonction $f$.

**Lemme:** Soit $(X,\delta)$ un espace de Baire, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermées de $X$ tel que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$$

Alors l'ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est dense dans $X$.

**Démonstration:** Soit $G = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Il s'agit de montrer que $G$ est d'intérieur vide. On a immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overbrace{G \cap F_n}^{\circ} \subset G \cap \mathring{F}_n = \varnothing$$

Ainsi, puisque $G \cap F_n$ est un fermé d'intérieur vide pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque $(X,\delta)$ est de Baire, l'union:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G \cap F_n = G \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = G$$

Est d'intérieur vide. □

**Théorème:** L'ensemble des points de continuité de $f$ est dense dans $X$.

**Démonstration:** Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in X, \forall p \geq n, d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}$$

Définissons alors:

$$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_{n,\varepsilon}$$

$\Omega_\varepsilon$ est un ouvert en tant que réunion dénombrables d'ouverts. Par hypothèse, $(f_n)$ tend simplement vers une fonction $f$, donc:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon}$$

Donc grâce au lemme, $\Omega_\varepsilon$ est dense dans $X$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 \in \mathring{F}_{n,\varepsilon}$, qui est un ouvert. Donc il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $V \subset \mathring{F}_{n,\varepsilon}$ et pour tout $x \in V$, $d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon$ par continuité de $f_n$. Or, $x \in F_{n,\varepsilon}$, donc pour tout $p \geq n$, $d(f_p(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Donc en faisant tendre $p$ vers l'infini, on obtient $d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in V$:

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \leq 3\varepsilon$$

Ainsi, puisque $(X, \delta)$ est de Baire (car complet), l'ensemble:

$$\chi = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}$$

Est dense dans $X$. Soit $x \in \chi$, et prenons $n$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, d'après ce qui précède, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que pour tout $x \in V$:

$$d(f(x_0), f(x)) \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon$$

Puisque $x_0 \in \chi$ implique que $x_0 \in \Omega_{\frac{1}{n}}$. Donc $f$ est continue en tout point de $\chi$, et on en déduit que l'ensemble des points de continuité de $f$ contient $\chi$, et est donc un résiduel de $(X, \delta)$, donc dense.

**Corollaire:** Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $f'$ est continue sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

**Démonstration:** Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, en posant la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f_n = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

$f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc d'après ce que l'on vient de montrer la fonction limite est continue sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$. Or:

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f'$$

Ce qui achève la démonstration. □

## References

[1] Pierre Colmez. *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Editions Ecole Polytechnique, 2009.

[2] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse-3e édition*. Editions Ellipses, 2020.