

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Quelques problèmes

2. Equation polynomiale : algèbre et géométrie

3. Opérer (=calculer) avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Quelques problèmes

2. Equation polynomiale : algèbre et géométrie

3. Opérer (=calculer) avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Stabilité

On commence par le développement, c'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.

A ce stade, c'est surtout la pratique qui justifie le théorème suivant :

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Stabilité

On commence par le développement, c'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.

A ce stade, c'est surtout la pratique qui justifie le théorème suivant :

Théorème - Stabilité

L'addition, la soustraction et la multiplication de deux (ou plus) fonctions polynomiales donne une nouvelle fonction polynomiale.

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Stabilité

On commence par le développement, c'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.

A ce stade, c'est surtout la pratique qui justifie le théorème suivant :

Théorème - Stabilité

L'addition, la soustraction et la multiplication de deux (ou plus) fonctions polynomiales donne une nouvelle fonction polynomiale.

Exercice

Soient $f : x \mapsto 2 + x - x^2 + 3x^3$ et $g : x \mapsto 1 + x - x^2 + x^4$ définies sur \mathbb{R} .

Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Stabilité

On commence par le développement, c'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.

A ce stade, c'est surtout la pratique qui justifie le théorème suivant :

Théorème - Stabilité

L'addition, la soustraction et la multiplication de deux (ou plus) fonctions polynomiales donne une nouvelle fonction polynomiale.

Exercice

Soient $f : x \mapsto 2 + x - x^2 + 3x^3$ et $g : x \mapsto 1 + x - x^2 + x^4$ définies sur \mathbb{R} .

Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$

Un peu plus théorique :

Exercice

Soient $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ définies sur \mathbb{R} .

1. Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$.
2. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f + g]_k$ en fonction des $[f]_i$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

Développer malin

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Mais il existe plusieurs façons de développer un produit polynomial. Certaines sont plus intelligentes que d'autres. . .

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Développer malin

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Mais il existe plusieurs façons de développer un produit polynomial. Certaines sont plus intelligentes que d'autres. . .

Exercice

Développer $(a + b + c)^3$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Développer malin

Mais il existe plusieurs façons de développer un produit polynomial. Certaines sont plus intelligentes que d'autres. . .

Exercice

Développer $(a + b + c)^3$

Exercice

On admet que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

En organisant convenablement votre calcul $(a + b)^5$, trouver comment passer des coefficients (1,4,6,4,1) de $(a + b)^4$ à ceux de $(a + b)^5$.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? En déduire la formule générale qui donne une expression de $(a + b)^n$.

Truc pour le calcul (1)

Truc & Astuce pour le calcul. Anticipation

Il s'agit de ne plus être à chaque instant derrière son calcul, mais bien en avant!. Il s'agit bien là aussi de voir quelque chose. . . Lorsque le calcul demandé est ouvert (on ne donne pas une forme fermée : montrer que $A = B$), il faut savoir vers où l'on va.

Par exemple, lorsqu'on dérive une fonction, ce qui nous intéresse souvent c'est de connaître son signe. Il faut donc donner une forme factorisée. . .

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Truc pour le calcul (1)

Truc & Astuce pour le calcul. Anticipation

Il s'agit de ne plus être à chaque instant derrière son calcul, mais bien en avant!. Il s'agit bien là aussi de voir quelque chose. . . Lorsque le calcul demandé est ouvert (on ne donne pas une forme fermée : montrer que $A = B$), il faut savoir vers où l'on va.

Exercice

On peut exprimer de 3 façons différentes

$A = f(x) = (3x^2 + 8x - 1) - (x^2 + 3x - 4)$. Associer chacune de ces expressions à l'exploitation qu'on peut en faire.

$$A = 2x^2 + 5x - 3$$

étude du minimum de f

$$A = -6 + 3(x + 1) + 2(x + 1)^2$$

développement limité de f en -1

$$A = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

étude du signe de f

$$A = (x + 3)(2x - 1)$$

étude du polynôme f

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Truc pour le calcul (2)

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Truc & Astuce pour le calcul. Reconnaissance de formes

En visualisant les formes dans les formules, il est plus aisé de garder en mémoire le calcul effectué (pour le retro-contrôle) et surtout, il est plus aisé de savoir dans quel ordre faire le calcul de manière à être efficace : ne pas se tromper et agir rapidement.

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Truc & Astuce pour le calcul. Reconnaissance de formes

En visualisant les formes dans les formules, il est plus aisé de garder en mémoire le calcul effectué (pour le retro-contrôle) et surtout, il est plus aisé de savoir dans quel ordre faire le calcul de manière à être efficace : ne pas se tromper et agir rapidement.

Exercice

Démontrer :

$$4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]^2 = (a^2 + b^2)^2(c^2 + d^2)^2$$

On pourra y voir la forme $A = B^2 - C^2 \dots$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Truc pour le calcul (2)

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Attention. Ne pas trop écrire

Pour apprendre à se projeter vers l'avant, il faut ne pas écrire trop de calculs intermédiaires. De nombreuses petites réécritures doivent être simplement pensées, sans être écrites.

Le prix à payer : une insécurité forte pour l'élève.

Le prix à gagner : une plus grande concentration et une meilleure vitesse d'exécution !

Deux ans avant les concours, il faut investir dans cette stratégie.

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Truc pour le calcul (3)

Truc & Astuce pour le calcul. Garder en mémoire « vive » le calcul

Si on garde en mémoire immédiate le calcul, il est possible de déceler les erreurs plusieurs lignes de calcul plus loin. On évite des erreurs bêtes, comme des signes + et - qui se mélangent, une page qui se tourne et qui conduit à des nombres qu'on oublie. . .

Pour apprendre à exploiter une mémoire globalisante du calcul, on peut essayer après chaque calcul à réécrire le résultat obtenu sur une page blanche. Evidemment, un tel résultat doit rester en mémoire immédiate, il n'est pas nécessaire de le placer en mémoire de travail plus profonde.

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Truc pour le calcul (3)

Truc & Astuce pour le calcul. Garder en mémoire « vive » le calcul

Si on garde en mémoire immédiate le calcul, il est possible de déceler les erreurs plusieurs lignes de calcul plus loin. On évite des erreurs bêtes, comme des signes + et - qui se mélangent, une page qui se tourne et qui conduit à des nombres qu'on oublie. . .

Pour apprendre à exploiter une mémoire globalisante du calcul, on peut essayer après chaque calcul à réécrire le résultat obtenu sur une page blanche. Evidemment, un tel résultat doit rester en mémoire immédiate, il n'est pas nécessaire de le placer en mémoire de travail plus profonde.

Exercice

Quel est le résultat obtenu lors du dernier calcul que vous avez effectué ?

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Quelques problèmes

2. Equation polynomiale : algèbre et géométrie

3. Opérer (=calculer) avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Avec les « petits BERNOULLIS »

Analyse $x^k - a^k$.

Par exemple $k = 5$. Et plus généralement ?

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Avec les « petits BERNOULLIS »

Analyse $x^k - a^k$.

Par exemple $k = 5$. Et plus généralement ?

Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Avec les « petits BERNOULLIS »

Analyse $x^k - a^k$.Par exemple $k = 5$. Et plus généralement ?Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

Définition - Les petits BernoullisPour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, on note

$$b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}.$$

On appelle cette famille de fonctions polynomiales $(b_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les petits Bernoullis.On a alors : Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(x - a)b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Avec les « petits BERNOULLIS »

Analyse $x^k - a^k$.Par exemple $k = 5$. Et plus généralement ?Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

Définition - Les petits BernoullisPour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, on note

$$b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}.$$

On appelle cette famille de fonctions polynomiales $(b_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les petits Bernoullis.On a alors : Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(x - a)b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$ **Démonstration**

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Avec les « petits BERNOULLIS »

Analyse $x^k - a^k$.Par exemple $k = 5$. Et plus généralement ?Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

Définition - Les petits BernoullisPour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, on note

$$b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}.$$

On appelle cette famille de fonctions polynomiales $(b_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les petits Bernoullis.On a alors : Pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(x - a)b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$ **Démonstration**ExerciceEn notant que $b_a^{n+1} = ab_a^n + x^{n+1}$ (à démontrer), montrer par récurrence la factorisation de Bernoulli

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Grâce à une racine

On a les corollaires important suivant :

Proposition - Factorisation (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe g_a , fonction polynomiale de degré $n - 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)g_a(x)$$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Grâce à une racine

On a les corollaires important suivant :

Proposition - Factorisation (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe g_a , fonction polynomiale de degré $n - 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)g_a(x)$$

Démonstration

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Grâce à une racine

On a les corollaires important suivant :

Proposition - Factorisation (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe g_a , fonction polynomiale de degré $n - 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)g_a(x)$$

Démonstration

Corollaire - Factorisation (2)

Soit f une application polynomiale sur \mathbb{K} (= \mathbb{R} ou \mathbb{C}) de degré n .

Soit $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Alors il existe g , application polynomiale de degré $n - 1$ telle que

$$\underbrace{\text{pour tout } x \in \mathbb{K}}_{\forall x \in \mathbb{K}}, \quad f(x) = (x - x_0) \times g(x)$$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Trouver g

Savoir que g existe est une excellente chose.

Mais savoir comment obtenir g connaissant x_0 et f est encore mieux (sans développer tous les petits Bernoullis) !

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Trouver g

Factoriser (division euclidienne)

Notons $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Alors $f(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc $f(x) = (x - 1) \times g(x)$.

Pour appliquer l'algorithme, on prend l'habitude d'écrire le plus à gauche le terme sur lequel on agit en premier (comme pour une division euclidienne entière), on écrit donc les polynômes dans le sens des puissances décroissantes :

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & x - 1 \\
 +2x^2 & \\
 \hline
 (2+1)x^2 & \\
 & \\
 & (-1+3)x \\
 & \\
 & -2+2 \\
 \hline
 & 1x^2 + 3x + 2
 \end{array}$$

Donc $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$.

On oublie jamais de **vérifier le calcul réciproque** s'il est beaucoup plus simple !

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

La factorisation permet de séparer un problème en plusieurs sous-problèmes.

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

La factorisation permet de séparer un problème en plusieurs sous-problèmes.

Proposition - Factorisation

Soient f et g deux fonctions polynomiales. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$f(x) \times g(x) = 0 \text{ si et seulement si } f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

La factorisation permet de séparer un problème en plusieurs sous-problèmes.

Proposition - Factorisation

Soient f et g deux fonctions polynomiales. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$f(x) \times g(x) = 0 \text{ si et seulement si } f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Raisonnement en deux temps (double implication) :

Démonstration

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

La factorisation permet de séparer un problème en plusieurs sous-problèmes.

Proposition - Factorisation

Soient f et g deux fonctions polynomiales. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$f(x) \times g(x) = 0 \text{ si et seulement si } f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Raisonnement en deux temps (double implication) :

Démonstration

Exercice

Trouver toutes les racines réelles de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

On remarque que $f(1) = 0 \dots$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n . Soit $p \leq n$

Si x_1, x_2, \dots, x_p , p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$
(racines de f).

Alors il existe g_p , fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n . Soit $p \leq n$

Si x_1, x_2, \dots, x_p , p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$
(racines de f).

Alors il existe g_p , fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

On arrive à un résultat énoncé par Descartes, mais pas vraiment démontré. . .

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

On arrive à un résultat énoncé par Descartes, mais pas vraiment démontré. . .

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

Démonstration

Polynôme nul

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Il n'existe qu'une seule fonction polynomiale nulle :

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Il n'existe qu'une seule fonction polynomiale nulle :

Proposition - Une seule fonction polynomiale nulle

Si $f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ est une fonction polynomiale nulle alors pour
tout $i \in \mathbb{N} (\mathbb{N}_n)$, $a_i = 0$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Il n'existe qu'une seule fonction polynomiale nulle :

Proposition - Une seule fonction polynomiale nulle

Si $f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ est une fonction polynomiale nulle alors pour
tout $i \in \mathbb{N} (\mathbb{N}_n)$, $a_i = 0$

Démonstration

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Proposition - Identification des coefficients

Soient f et g deux fonctions polynomiales et $E \subset \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Si $\text{Card}(E) > \deg(f - g)$ alors $f = g$.

Plus précisément, : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f]_k = [g]_k$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Proposition - Identification des coefficients

Soient f et g deux fonctions polynomiales et $E \subset \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Si $\text{Card}(E) > \deg(f - g)$ alors $f = g$.

Plus précisément, : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f]_k = [g]_k$

Remarque Essentiel

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Quelques problèmes

2. Equation polynomiale : algèbre et géométrie

3. Opérer (=calculer) avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Formule du discriminant

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Formule du discriminant

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Formule du discriminant

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Remarque Théorème de Viète

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Formule du discriminant

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Remarque Théorème de Viète

Démonstration

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Formule du discriminant

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines sont $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$

Remarque Théorème de Viète

Démonstration

Remarque Autres idées de démonstration ?

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Equation de degré 3

On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

**3.3. Expliciter formellement les
racines**

Equation de degré 3

On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

Proposition - Formule de Tartaglia-Cardan

Les solutions complexes z_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ où p et $q \in \mathbb{R}$ sont donnés par

$$z_k = u_k + v_k,$$

$$\text{avec } u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}, v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

et où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ est le discriminant de l'équation.

On peut vérifier que $\Delta = (z_0 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0)^2$ et $3u_k v_k = -p$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Equation de degré 3

On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

Proposition - Formule de Tartaglia-Cardan

Les solutions complexes z_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ où p et $q \in \mathbb{R}$ sont donnés par

$$z_k = u_k + v_k,$$

$$\text{avec } u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}, v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

et où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ est le discriminant de l'équation.

On peut vérifier que $\Delta = (z_0 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0)^2$ et $3u_k v_k = -p$

Exercice

Faire la démonstration

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Equation de degré 3

On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

Proposition - Formule de Tartaglia-Cardan

Les solutions complexes z_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ où p et $q \in \mathbb{R}$ sont donnés par

$$z_k = u_k + v_k,$$

$$\text{avec } u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}, v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$$

et où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ est le discriminant de l'équation.

On peut vérifier que $\Delta = (z_0 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0)^2$ et $3u_k v_k = -p$

Exercice

Faire la démonstration

Exemple Racines de l'équation $x^3 - 2x = 4$

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Autres degrés ?

Remarque Degré 4

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Remarque Degré 4

Nous ne démontrons pas :

Théorème - Ruffini-Abel

Pour tout entier $n \geq 5$, il n'existe pas de formule générale exprimant « par radicaux » les racines d'un polynôme quelconque de degré n .

C'est-à-dire de formule n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n -ièmes

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

⇒ Développement

⇒ Factoriser

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

- ▶ Factoriser pour... découper le problème en morceaux

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

- ▶ Factoriser pour... découper le problème en morceaux
- ▶ La factorisation donne → les racines du polynôme

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Objectifs

- ▶ Factoriser pour... découper le problème en morceaux
- ▶ La factorisation donne \rightarrow les racines du polynôme
- ▶ et réciproquement : Les racines donnent \rightarrow la factorisation.

\Rightarrow Développement

\Rightarrow Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Objectifs

- ▶ Factoriser pour... découper le problème en morceaux
- ▶ La factorisation donne \rightarrow les racines du polynôme
- ▶ et réciproquement : Les racines donnent \rightarrow la factorisation.
- ▶ Comment obtenir les racines ? Pas très efficaces par le formalisme...

\Rightarrow Développement

\Rightarrow Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

⇒ Factoriser

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

⇒ Factoriser

- ▶ La factorisation donne → les racines du polynôme

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

Objectifs

⇒ Factoriser

- ▶ La factorisation donne → les racines du polynôme
- ▶ et réciproquement : Les racines donnent → la factorisation.

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Objectifs

⇒ Factoriser

- ▶ La factorisation donne → les racines du polynôme
- ▶ et réciproquement : Les racines donnent → la factorisation.
- ▶ Comment obtenir les racines ? Pas très efficaces par le formalisme. . .

⇒ Développement

⇒ Factorisation

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines

Conclusion

⇒ Développement

⇒ Factorisation

Objectifs

⇒ Factoriser

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours :
chap 1. Equations polynomiales
4. Méthode analytique.
- ▶ Exercices N° 21 & 26

1. Problèmes

2. Algèbre & Géo.

3. Opérer (=calculer)
avec des polynômes

3.1. Développer

3.2. Factoriser

3.3. Expliciter formellement les
racines