Leçon 4 - Calculs et opérations avec $\sum$ (ou $\prod$)

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$ et $\prod$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ **Definition de $\sum$ et $\prod$**

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement
Donner, pour tout entier n, la forme développée des applications polynomiales $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ et $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement
Donner, pour tout entier n, la forme développée des applications polynomiales $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ et $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

Problème Suite de nombres. Et le suivant ?
Prenons la suite obtenue au problème 8 : $1, 4, 10, 20, 35$. Quel est le terme suivant ?

Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement
Donner, pour tout entier n, la forme développée des applications polynomiales $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ et $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

Problème Suite de nombres. Et le suivant ?
Prenons la suite obtenue au problème 8 : $1, 4, 10, 20, 35$. Quel est le terme suivant ?

Problème Interpolation à pas constant

Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement
Donner, pour tout entier n, la forme développée des applications polynomiales $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ et $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

Problème Suite de nombres. Et le suivant ?
Prenons la suite obtenue au problème 8 : $1, 4, 10, 20, 35$. Quel est le terme suivant ?

Problème Interpolation à pas constant

Problème Développement de puissance

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$ et $\prod$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

Définition de notation

Remarque Terme (d'une somme) sans ambiguïté.

Définition de notation

Remarque Terme (d'une somme) sans ambiguïté.
De manière explicite :

Définition - Notation $\sum$ et $\prod$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels ou complexes. L'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

De même on note $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$.
Le terme a_i s'écrit sous forme d'une formule dépendant de i.

Définition de notation

Remarque Terme (d'une somme) sans ambiguïté.
De manière explicite :

Définition - Notation $\sum$ et $\prod$

Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels ou complexes. L'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

De même on note $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$.

Le terme a_i s'écrit sous forme d'une formule dépendant de i.

Remarque Bons usages et généralisation de notation

Définition de notation

Remarque Terme (d'une somme) sans ambiguïté.
De manière explicite :

Définition - Notation $\sum$ et $\prod$

Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels ou complexes. L'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

De même on note $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$.

Le terme a_i s'écrit sous forme d'une formule dépendant de i.

Remarque Bons usages et généralisation de notation

Exercice

Ecrire avec $\sum$, la somme $1 + 2 + 4 + \cdots + 128$.

Extension

Définition - Extension des notations $\sum$ et $\prod$

Si I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, on note

$$\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_p} = \sum_i a_i \mathbb{1}_I(i)$$

où $\mathbb{1}_I : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \in I \\ 0 \text{ si } i \notin I \end{cases}$ est l'indicatrice de I.

On peut également noter, si $\mathscr{P}(i)$ désigne une propriété sur les entiers (parité, imparité...),

$$\sum_{i|\mathscr{P}(i)} a_i = \sum_{i \in \{j \in \mathbb{N} | \mathscr{P}(j) \text{ vraie }\}} a_i = \sum_i a_i [\mathscr{P}(i)]$$

où $[\mathscr{P}(i)]$ est *la notation d'Iverson* qui vaut 1 ssi $\mathscr{P}(i)$ est vraie et 0 sinon.

Ces notations se généralisant au produit.

Maîtrise du symbole

Exemple $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Maîtrise du symbole

Exemple $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Exercice

Sans utiliser la notation $\sum$, donner une expression équivalente de

$$\sum_{i\,|\,0\leqslant i\leqslant 6} \frac{1}{2i+1}, \quad \sum_{i\,|\,0\leqslant 2i\leqslant 7} \left(3i+\frac{1}{i+1}\right), \quad \sum_{i\,|\,0\leqslant i^3\leqslant 10} \frac{1}{i^2+i+1}.$$

Maîtrise du symbole

Exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$

<u>Exercice</u>

Sans utiliser la notation $\sum$, donner une expression équivalente de

$$\sum_{i \mid 0 \leqslant i \leqslant 6} \frac{1}{2i+1}, \quad \sum_{i \mid 0 \leqslant 2i \leqslant 7} \left(3i + \frac{1}{i+1}\right), \quad \sum_{i \mid 0 \leqslant i^3 \leqslant 10} \frac{1}{i^2+i+1}.$$

Attention. A ne pas donner une existence à une variable muette !

Que vaut $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) + k$? Rien !

Maîtrise du symbole

Exemple $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Exercice

Sans utiliser la notation $\sum$, donner une expression équivalente de

$$\sum_{i\,|\,0\leqslant i\leqslant 6}\frac{1}{2i+1},\qquad \sum_{i\,|\,0\leqslant 2i\leqslant 7}\left(3i+\frac{1}{i+1}\right),\qquad \sum_{i\,|\,0\leqslant i^3\leqslant 10}\frac{1}{i^2+i+1}.$$

Attention. A ne pas donner une existence à une variable muette !

Que vaut $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)+k$? Rien !

Exercice

Exprimer la somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à N

⇒ Definition de $\sum$ et $\prod$

⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

Changement de variables

Si on a un doute, au brouillon, on exploite la notation avec des $\ldots$.

Changement de variables

Si on a un doute, au brouillon, on exploite la notation avec des . . . .

Analyse Changement d'indice

Changement de variables

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n+1) - 2i$.

Et le tableau de correspondance :

k	i
1	$n-1$
n	0

.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = \sum_{i=0}^{n-1} ((2n+1) - 2i)$

Changement de variables

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n+1) - 2i$.

Et le tableau de correspondance :

k	i
1	$n-1$
n	0

.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{i=0}^{n-1}((2n+1)-2i)$

i est dans l'ordre croissant, ce qui inverse l'ordre du calcul effectivement réalisé.

Changement de variables

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n+1) - 2i$.

Et le tableau de correspondance :

k	i
1	$n-1$
n	0

.

Donc $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = \sum_{i=0}^{n-1}((2n+1) - 2i)$

i est dans l'ordre croissant, ce qui inverse l'ordre du calcul effectivement réalisé.

Exercice

Compléter les expressions qui suivent :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\dots}^{\dots} a_{k-1} = \sum_{\dots}^{\dots} a_{n-h}$$

Somme, par récurrence

Analyse $\sum$ et récurrence.

Somme, par récurrence

Analyse $\sum$ et récurrence.

Proposition - A savoir !

D'après les règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=0}^{n}a_i+\sum_{i=0}^{n}b_i \qquad \sum_{i=0}^{n}\lambda a_i=\lambda\sum_{i=0}^{n}a_i$$

$$\prod_{i=0}^{n}a_ib_i=\prod_{i=0}^{n}a_i\times\prod_{i=0}^{n}b_i \qquad \prod_{i=0}^{n}\lambda a_i=\lambda^{n+1}\prod_{i=0}^{n}a_i$$

Somme, par récurrence

Analyse $\sum$ et récurrence.

Proposition - A savoir !

D'après les règles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i b_i = \prod_{i=0}^{n} a_i \times \prod_{i=0}^{n} b_i \qquad \prod_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^{n} a_i$$

Démonstration

Sommation par paquets. Observations

Remarque Le $n+1$ de λ^{n+1} dans le dernier produit

Sommation par paquets. Observations

Remarque Le $n+1$ de λ^{n+1} dans le dernier produit

Exercice

Si A et B sont disjoints, montrer que pour tout i (de E),

$\mathbf{1}_{A\cup B}(i) - \mathbf{1}_A(i) - \mathbf{1}_B(i) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{i\in A} x_i + \sum_{i\in B} x_i = \sum_{i\in A\cup B} x_i$

Sommation par paquets. Notation

Généralisons ce résultat. Il faut commencer par définir une notation :

Sommation par paquets. Notation

Généralisons ce résultat. Il faut commencer par définir une notation :

Définition - Réunion disjointe

On note $C = A \uplus B$, pour signifier la double information :

- $C = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$.

Autrement écrit : $x \in C$ si et seulement si $x \in A$ ou (exclusif) $x \in B$.

On peut généraliser cette notation à plusieurs ensembles :

$C = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$ signifie : $x \in C$ ssi $\exists\,!i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in A_i$

Sommation par paquets. Relation de Chasles

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Sommation par paquets. Relation de Chasles

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r\in S}$ une famille d'ensembles indexés par S.
On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints : $\forall\ r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset$.

Alors : $$\sum_{r\in S}\left(\sum_{k\in E_r} a_k\right) = \sum_{k\in \biguplus_{r\in S} E_k} a_k$$

On voir apparaître ici une double somme. On en reparlera plus loin.

Sommation par paquets. Relation de Chasles

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r\in S}$ une famille d'ensembles indexés par S.
On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints :
$\forall\ r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset$.

Alors : $$\sum_{r\in S}\left(\sum_{k\in E_r} a_k\right) = \sum_{k\in \biguplus_{r\in S} E_k} a_k$$

On voir apparaître ici une double somme. On en reparlera plus loin.

Démonstration

Sommation par paquets. Savoir-faire

Remarque Interversion des symboles $\sum$.

Sommation par paquets. Savoir-faire

Remarque Interversion des symboles $\sum$.

Savoir-faire. Exploiter une sommation par paquets

On a parfois intérêt à découper l'ensemble E en (réunion de) m sous-ensembles disjoints $E = E_1 \uplus E_2 \cdots \uplus E_m$.

On calculer alors la somme par paquets : $\displaystyle\sum_{k\in E} a_k = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k\in E_i} a_k\right)$.

Télescopage

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\Big(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \Big)$$

Télescopage

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir »le télescopage

Télescopage

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir »le télescopage

Exercice

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

- Ne pas hésiter à écrire (et penser) avec des … : AU BROUILLON

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

- Ne pas hésiter à écrire (et penser) avec des ... : AU BROUILLON
- Formellement (définition) : EXPLOITER DES RECURRENCES

Conclusion

Objectifs

⇒ Definition de $\sum$

- Ne pas hésiter à écrire (et penser) avec des ... : AU BROUILLON
- Formellement (définition) : EXPLOITER DES RECURRENCES
- Bien comprendre ? Savoir écrire un programme !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences

Conclusion

Objectifs

⇒ Definition de $\sum$

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences
- Sommation par paquets

Conclusion

Objectifs

⇒ Definition de $\sum$

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences
- Sommation par paquets
- Exploiter le télescopage (parfait pour un résultat exact)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Definition de $\sum$

$\Rightarrow$ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours :
  Chap 4 : Calculs avec des sommes et des produits.
- Exercices 29