

Première partie

**Techniques algébriques,
à travers l'histoire**

Calculs polynomiaux

Résumé -

Nous commençons l'année en revisitant l'histoire de la résolution des équations polynomiales. On donne/rapelle ainsi quelques bases essentielles pour la suite : existe-t-il un moyen pour résoudre toute équation polynomiale, on verra que l'important est de pouvoir factoriser; que nous dit la géométrie des équations polynomiales; que nous dit l'analyse pour une résolution (approchée) d'une équation polynomiale.

Ce sera l'occasion de mettre en place quelques définitions et de nombreux savoir-faire. Comme chaque chapitre, celui-ci commence par des problèmes ouverts.

Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet. A visionner à loisir :

- Mathieu Bautista - L'histoire du x . <https://www.youtube.com/watch?v=AW7uNg9RLCs>
- MicMath - Conique à la plage. <https://www.youtube.com/watch?v=eFPhYYKCγFc>
- El Jj - Différence équations et fonctions. <https://www.youtube.com/watch?v=sJKjFgtIBKY>

Sommaire

1.	Quelques problèmes	6
1.1.	Problèmes	6
1.2.	Vocabulaires et contextes	7
2.	Equation polynomiale. Algèbre et géométrie	7
2.1.	Révolution 1 : Viète	7
2.2.	Révolution 2 : Descartes	9
3.	Opérer (=calculer) avec des polynômes	12
3.1.	Développer	12
3.2.	Factoriser	14
3.3.	Expliciter formellement les racines	17
4.	Equation polynomiale et analyse	19
4.1.	La meilleure méthode : l'essai/erreur	19
4.2.	Retro-contrôle	19
4.3.	Méthode de la sécantes	19
4.4.	Vers la dérivation. Méthode de la tangente	20
5.	Bilan	21

1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

? Problème 1 - Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2 + 10x = 39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...).

On commence par considérer un carré de côté x et deux rectangles de côtés x et 5. On complète...

Adapter la méthode pour résoudre $x^2 + 21 = 10x$.

Que pensez-vous de la nature des nombres a , b ou c si l'on souhaite générer la méthode pour résoudre l'équation associée au trinôme du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$

? Problème 2 - Mauvais vers italiens

« *Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens* » (Lagrange, Oeuvres, 1795).

Il existe une méthode (Tartaglia-Cardan) pour résoudre les équations de degré 3 (voir cours). Comment pouvait-on l'écrire alors qu'il n'existait ni le symbole $=$, ni les notations $x^2 \dots$?

? Problème 3 - Tartaglia et Cardan

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^3 + 6x = 20$, avec la méthode de Tartaglia et Cardan, en posant $x = u - v$ et en exploitant les symétries du problème (on peut résoudre : $u^3 - v^3 = \dots$ et $u^3 v^3 = \dots$).

Et pour une équation de type $ax^3 + px + q = 0$?

De même donner les solutions de l'équations $x^4 + px^2 + 1 = 0$.

? Problème 4 - Polynôme de degré 2 et représentation graphique

Représenter la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

On fera la différence entre $a > 0$ et $a < 0$. On notera en particulier les coordonnées du sommet

? Problème 5 - Chercher à côté...

Si on sait que $f(x_0) = 0,001$, quelle stratégie mettre en place pour trouver une racine de f ? On peut chercher du côté de x_0 , pas très loin...

? Problème 6 - Formule de Taylor et développement limité

Soit $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(k)}(0)$ en fonction des nombres (a_i) qui définissent la fonction polynomiale.

$f^{(k)}(0)$ est la valeur en 0 de la k^e dérivée de la fonction f .

1.2. Vocabulaires et contextes

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir de cette (ces) relation(s) calculatoire(s).

Définition - Résoudre une équation

Soit E un ensemble (souvent $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^p \dots$, mais pas uniquement).

Soit une application $f : E \rightarrow F$ et $b \in F (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ ou autre})$.

On dit qu'on résout l'équation $f(x) = b$, d'inconnue $x \in E$, lorsqu'on trouve tous les « nombres » $x \in E$ tel que $f(x) = b$.

On parle d'antécédent de b par f

 **Remarque - Il n'existe qu'une méthode infaillible pour résoudre une équation : Faire l'essai.**

Soit $x_0 \in E$. Alors (calcul) : $f(x_0) = \dots$

Si la réponse est b , on a trouvé une solution. Sinon, on essaye à nouveau.

Mais cela est souvent long, surtout si l'ensemble E est infini...

Autre question : pourquoi se concentrer (uniquement?) sur des équations polynomiales?

 **Pour aller plus loin - Des tortues à l'infini**

Les mots application (ou fonction), $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} \dots$ seront définis (légalisés) plus tard dans l'année ou plus loin dans le polycopié.

2. Equation polynomiale. Algèbre et géométrie

La motivation historiquement première est la motivation ludique. La plupart des résultats ici a été obtenu dans le cadre de joutes mathématiques, de défis si l'on préfère.

Les révolutions successives qui marquent la mathématiques européennes consistent souvent en l'installation de nouvelles notations. Cela crée des ponts!

2.1. Révolution 1 : Viète

Algebra Nova

Heuristique - Généraliser avec des lettres

FRANÇOIS VIÈTE a l'idée fondamentale d'écrire des lettres $A, B, C, \dots X$ pour les inconnues et les données d'un problème (ie. les connus!) et de faire les calculs algébriques. Dès lors, aucun problème des anciens Grecs ne semble résister au schéma :

Problème	mêmes lettres	Problème	calculs	
géométrique	→	algébrique	→	Solution

et Viète écrit en majuscules : « NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE ».

Saut historique et définition

Définition - Fonction polynomiale (d'une variable)

On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application polynomiale s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (voire $\mathbb{C}$) tels que :

pour tout réel x , $f(x)$ est obtenu par le calcul $\sum_{k=0}^n a_k x^k$.

On note $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

Histoire - Algèbre spéieuse

MONTUCLA dans *Histoire des mathématiques* :

« Il est peu de mathématiciens à qui l'algèbre doive plus qu'à cet homme célèbre... On doit d'abord à M. Viète d'avoir établi l'usage des lettres pour désigner, non seulement les quantités inconnues, mais même celles qui sont connues, ce qui fit donner à son algèbre le nom de spéieuse, nom qu'elle a gardé longtemps, à cause que tout y est représenté par des symboles... »

C'est nous osons le dire à ce changement que l'algèbre est redevable d'une grande partie de ces progrès. »

Comment énoncer aisément la règle du discriminant sans les lettres a , b et c ?

**Remarque - Un unique type de calcul, pour tout x**

C'est toujours le même calcul : une combinaison linéaire des puissances de x qui donne la valeur de $f(x)$.

Cette définition s'étend au cas de plusieurs variables (à avoir en tête en particulier pour les manipulations)

Définition - Polynôme de plusieurs variables

On appelle fonction polynomiale de p variables (abrégé ici en « polynôme de p variables ») une fonction de la forme :

$$f_p : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p} a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \prod_{i=1}^p x_i^{k_i}$$

la somme étant finie (nombre de termes est fini) où $\forall (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, $a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;

Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières des inconnues réelles (ou complexes) $x_1, \dots, x_p$.

La somme et le produit de deux fonctions polynomiales est une fonction polynomiale.

On appelle degré de f_p , le nombre $\max\{k_1 + k_2 + \dots + k_p \mid a_{k_1, k_2, \dots, k_p} \neq 0\}$. Si f n'a qu'une variable, $\deg(f) = \max\{n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } a_n \neq 0\}$.



Exemple - $f : (x, y, z) \mapsto 3x^2y - 2xyz - xz^2$

Vocabulaire

On donne un peu de vocabulaire et une notation bien pratique, même si historiquement cela s'est fait beaucoup plus tardivement...

🔍 **Analyse - Unicité d'écriture**

Histoire - François Viète

François Viète (1540-1603), n'est pas un mathématicien professionnel, mais un avocat. Néanmoins, il sera le représentant français des joutes mathématiques (cryptanalyse) avec les italiens ou les anglais. Il est célèbre pour son algèbre nouvelle où il est le premier à exploiter les lettres pour décrire les nombres dans des équations. Ce point de vue est révolutionnaire!

Ainsi, par contraposée : si deux écritures polynomiales donne une même fonction, c'est nécessairement la même écriture!

Définition - Degré et $[f]_k$

Soit f une application polynomiale. Alors son écriture est unique.

Ainsi, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(n+1)$ -uplet de réels

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$.

Le nombre entier n s'appelle le degré de la fonction polynomiale f .

$a_n x^n$ s'appelle le terme dominant de la fonction polynomiale f .

Et on aura pour habitude de noter $[f]_k$, le k coefficient a_k (devant x^k) dans l'écriture de f .

2.2. Révolution 2 : Descartes

↗ **Heuristique - Algèbre et géométrie**

La motivation est ici GEOMETRIQUE. Une nouvelle façon de concevoir le problème est de maintenant lui donné un sens géométrique et en particulier de donner à $\mathbb{R}$ le sens du continu (comme une droite) et à $f(\mathbb{R})$ une déformation continue de $\mathbb{R}$.



Pour aller plus loin - Notations

Les notations $x^5 \dots$ a été popularisé par Descartes (avant on écrivait simplement $xxxxx$).

Le symbole $=$ a été popularisé par Leibniz (avant on écrit $adeq$).

Représentation graphique

En mathématique, l'apport principal de Descartes a consisté à donner une vision géométrique à l'algèbre et une approche calculatoire à la géométrie (de l'ordre de la précision du langage). C'est une véritable révolution.

Ce qui suit reste vrai même si H n'est pas polynomiale.

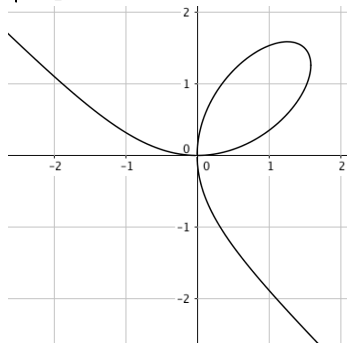
Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$

Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

On note $\Gamma_H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x, y) = 0\}$, une sous-partie de $\mathbb{R}^2$.

On dit que $H(x, y) = 0$ est une équation du graphe Γ .

Sans condition supplémentaire sur H , Γ peut être très variés.

**Exemple - Folium de Descartes***** Représentation - Folium**

$\mathcal{F}$ d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Définition - Exemple. Graphe d'une fonction

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle représentation graphique de f (ou graphe de f), la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$

Dans ce cas $H : (x, y) \mapsto y - f(x)$. Une telle courbe ne peut « revenir en arrière ». En effet, cela signifierait qu'un nombre x_0 aurait deux images.

Représentation des fonctions polynomiales...**Heuristique - Représentation**

La représentation d'une fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ est continue.

Cette fonction polynomiale est de degré n , donc admet au plus n racines (de l'équation polynomiale).

Par dérivation (que l'on expliquera plus loin), il y a également au plus n sens de variation différents...

**Pour aller plus loin - Continuité**

Nous reverrons plus loin la notion de continuité.

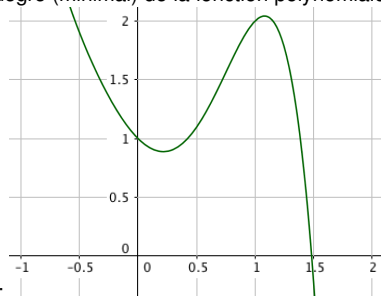
Vous pouvez déjà chercher à donner une définition formalisée...

Exercice

Donner l'exemple d'une fonction polynomiale de degré 4 n'ayant que deux sens de variations différentes

Exercice

Quel est le degré (minimal) de la fonction polynomiale dont la représentation graphique est



donnée par :

Calculs algébriques et symétries géométriques**Proposition - Translation**

La courbe Γ présente une invariance par translation de vecteur $\vec{u} = T \vec{i}$, si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x, y) = 0 \iff H(x + T, y) = 0$

Remarque - Qui sont x et y ?

Est-ce pour tout x, y ou avec l'existence d'un x et d'un y ?

Cela doit être vrai pour x et y dans l'ensemble de définition, puis $x + T$ doit y appartenir également...

Savoir faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (translation)

Dans le cas particulier d'une fonction, $\mathcal{C}_f$ présente d'une invariance par translation de vecteur $\vec{u} = T\vec{i}$ si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x + T) = f(x)$. On dit que f est T -périodique.
En particulier $\cos$ ou $\sin$ sont 2π -périodique.

Analyse - Symétrie axiale, centrale**Proposition - Symétrie axiale**

La courbe Γ présente une symétrie axiale d'axe $x = x_0$,
si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, y) = 0$

Savoir faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (symétrie axiale)

Dans le cas particulier d'une fonction, $\mathcal{C}_f$ présente d'une symétrie axiale d'axe $x = x_0$ si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(2x_0 - x) = f(x)$.
En particulier pour $x_0 = 0$, on a la caractérisation $f(-x) = f(x)$. On dit alors que f est paire (comme $x \mapsto x^2$).

Une symétrie centrale de centre $M_0(x_0, y_0)$ est la composition d'une symétrie d'axe $x = x_0$ et d'axe $y = y_0$.

Proposition - Symétrie centrale

La courbe Γ présente une symétrie centrale de centre $M(x_0, y_0)$,
si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x, y) = 0 \iff H(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$

Savoir faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (symétrie centrale)

Dans le cas particulier d'une fonction, $\mathcal{C}_f$ présente d'une symétrie centrale centrée en $M_0(x_0, y_0)$ si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$.
En particulier pour $x_0 = y_0 = 0$, on a la caractérisation $f(-x) = -f(x)$. On dit alors que f est impaire (comme $x \mapsto x^3$).

Une astuce pour le calcul

De manière générale, on ne démontre pas un résultat de calcul par une exploitation graphique, mais cela permet largement de vérifier une série de calculs.

 Truc & Astuce pour le calcul - Transformer le résultat d'un calcul en une représentation visuelle

Depuis Descartes, l'algèbre et la géométrie sont totalement liés et il est possible de passer « du diable de l'algèbre à l'ange de la géométrie » (Hermann Weyl).

Il est donc important de savoir faire cette transformation : donner du sens géométrique à un calcul algébrique. On peut ainsi anticiper ou vérifier un résultat.

Exercice

Montrer que le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$
 admet exactement deux solutions.

Le changement de registre ici est une force si on sait bien l'employer, mais aussi un gros problème pour les élèves bloqués dans leur registre.

 Truc & Astuce pour le calcul - Avec des fonctions

Le calcul sur les fonctions est à l'intersection du calcul algébrique, du calcul graphique, du calcul différentiel et intégrale, du calcul de limites... Les problèmes où interviennent ces fonctions sont aussi très variés, et il n'est pas rare de voir des changements de registre, d'un domaine à l'autre dans une même problème! Il faut avoir un esprit bien souple...

C'est tout particulièrement le cas de l'étude des polynômes (où l'on bascule facilement d'un domaine à l'autre).

Exercice

Démontrer que le polynôme $x^3 + 3x - 1$ admet une unique racine sur $\mathbb{R}$

3. Opérer (=calculer) avec des polynômes

3.1. Développer

Stabilité

On commence par le développement, c'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.

A ce stade, c'est surtout la pratique qui justifie le théorème suivant :

Théorème - Stabilité

L'addition, la soustraction et la multiplication de deux (ou plus) fonctions polynomiales donne une nouvelle fonction polynomiale.

Exercice

Soient $f : x \mapsto 2 + x - x^2 + 3x^3$ et $g : x \mapsto 1 + x - x^2 + x^4$ définies sur $\mathbb{R}$.

Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$

Un peu plus théorique :

Exercice

Soient $f : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $g : x \mapsto b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Evaluer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x)$ et $(f \times g)(x)$.
2. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f + g]_k$ en fonction des $[f]_i$ et $[g]_j$.
3. Exprimer alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f \times g]_k$ en fonction des $[f]_i$ et $[g]_j$.

Développer malin

Mais il existe plusieurs façons de développer un produit polynomial. Certaines sont plus intelligentes que d'autres...

Exercice

Développer $(a + b + c)^3$

Exercice

On admet que $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

En organisant convenablement votre calcul $(a + b)^5$, trouver comment passer des coefficients (1,4,6,4,1) de $(a + b)^4$ à ceux de $(a + b)^5$.

Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? En déduire la formule générale qui donne une expression de $(a + b)^n$.

 Truc & Astuce pour le calcul - Anticipation

Il s'agit de ne plus être à chaque instant derrière son calcul, mais bien en avant ! Il s'agit bien là aussi de voir quelque chose... Lorsque le calcul demandé est ouvert (on ne donne pas une forme fermée : montrer que $A = B$), il faut savoir vers où l'on va.

Par exemple, lorsqu'on dérive une fonction, ce qui nous intéresse souvent c'est de connaître son signe. Il faut donc donner une forme factorisée...

Exercice

On peut exprimer de 3 façons différentes $A = f(x) = (3x^2 + 8x - 1) - (x^2 + 3x - 4)$. Associer chacune de ces expressions à l'exploitation qu'on peut en faire.

$A = 2x^2 + 5x - 3$	étude du minimum de f
$A = -6 + 3(x + 1) + 2(x + 1)^2$	développement limité de f en -1
$A = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$	étude du signe de f
$A = (x + 3)(2x - 1)$	étude du polynôme f

 Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaissance de formes

En visualisant les formes dans les formules, il est plus aisé de garder en mémoire le calcul effectué (pour le retro-contrôle) et surtout, il est plus aisé de savoir dans quel ordre faire le calcul de manière à être efficace : ne pas se tromper et agir rapidement.

Exercice

Démontrer :

$$4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]^2 = (a^2 + b^2)^2(c^2 + d^2)^2$$

On pourra y voir la forme $A = B^2 - C^2$...

 Attention - Ne pas trop écrire

~~~~~ Pour apprendre à se projeter vers l'avant, il faut ne pas écrire trop de calculs intermédiaires. De nombreuses petites réécritures doivent être simplement pensées, sans être écrites.

~~~~~ Le prix à payer : une insécurité forte pour l'élève.

~~~~~ Le prix à gagner : une plus grande concentration et une meilleure vitesse d'exécution !

~~~~~ Deux ans avant les concours, il faut investir dans cette stratégie.

 Truc & Astuce pour le calcul - Garder en mémoire « vive » le calcul

Si on garde en mémoire immédiate le calcul, il est possible de déceler les erreurs plusieurs lignes de calcul plus loin. On évite des erreurs bêtes, comme des signes + et - qui se mélangent, une page qui se tourne et qui conduit à des nombres qu'on oublie...

Pour apprendre à exploiter une mémoire globalisante du calcul, on peut

essayer après chaque calcul à réécrire le résultat obtenu sur une page blanche. Evidemment, un tel résultat doit rester en mémoire immédiate, il n'est pas nécessaire de le placer en mémoire de travail plus profonde.

Exercice

Quel est le résultat obtenu lors du dernier calcul que vous avez effectué ?

3.2. Factoriser

Avec les petits Bernoullis

🔍 Analyse - $x^k - a^k$

Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

🔍 **Pour aller plus loin - Polynômes de Bernoulli**

On appelle (ici en MPSI3) cette famille de polynômes, les « petits Bernoullis », pour ne pas les confondre.

Définition - Les petits Bernoullis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, on note $b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots a^{n-1}x + a^n = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}$.

On appelle cette famille de fonctions polynomiales $(b_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les petits Bernoullis.

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad (x - a) \times b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$$

Il faut faire une démonstration. On exploite le résultat sur les sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique, vu en terminale.

Démonstration

Exercice

En notant que $b_a^{n+1} = ab_a^n + x^{n+1}$ (à démontrer), montrer par récurrence la factorisation de Bernoulli

Grâce à une racine

On a les corollaires important suivant :

Proposition - Factorisation (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré n .

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe g_a , fonction polynomiale de degré $n - 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)g_a(x)$$

Démonstration**Corollaire - Factorisation (2)**

Soit f une application polynomiale sur $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré n .

Soit $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Alors il existe g , application polynomiale de degré $n - 1$ telle que

$$\underbrace{\text{pour tout } x \in \mathbb{K}}_{\forall x \in \mathbb{K}}, \quad f(x) = (x - x_0) \times g(x)$$

Savoir que g existe est une excellente chose.

Mais savoir comment obtenir g connaissant x_0 et f est encore mieux (sans développer tous les petits Bernoullis)!

On peut donc décrire un algorithme pour obtenir g :

✂ Savoir faire - Factoriser

Notons $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Alors $f(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc $f(x) = (x - 1) \times g(x)$.

Pour appliquer l'algorithme, on prend l'habitude d'écrire le plus à gauche le terme sur lequel on agit en premier (comme pour une division euclidienne entière), on écrit donc les polynômes dans le sens des puissances décroissantes :

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-1 \\ +2x^2 & 1x^2+3x+2 \\ \hline (2+1)x^2 & \\ (-1+3)x & \\ -2+2 & \end{array}$$

Donc $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$.

On oublie jamais de **vérifier le calcul réciproque** s'il est beaucoup plus simple!

✂ Pour aller plus loin - Division euclidienne

En fait on obtient ici un algorithme de division euclidienne. Mais uniquement par un polynôme de degré 1.

On reprendra cela plus tard.

Trouver toutes les racines

La factorisation permet de décomposer un problème en plusieurs sous-problèmes.

Proposition - Factorisation

Soient f et g deux fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$f(x) \times g(x) = 0 \text{ si et seulement si } f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0$$

Pour ce genre de proposition, on fait un raisonnement en deux temps (double implication) :

**Pour aller plus loin - Anneaux intègres**

Un ensemble d'éléments neutre 0 pour une première loi + et vérifiant :

$$a \times b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

est appelé ensemble intègre.

$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont intègres. Ce n'est pas le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DémonstrationExercice

Trouver toutes les racines réelles de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n . Soit $p \leq n$

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).

Alors il existe g_p , fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

Démonstration

On arrive à un résultat énoncé par Descartes, mais pas vraiment démontré...

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

Démonstration**Identification**

Il n'existe qu'une seule fonction polynomiale nulle :

Proposition - Une seule fonction polynomiale nulle

Si $f : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ est une fonction polynomiale nulle alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 0$.

Démonstration

Avec la même démonstration améliorée et adaptée à $f - g$, on trouve :

Proposition - Identification des coefficients

Soient f et g deux fonctions polynomiales et $E \subset \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Si $\text{card}(E) > \deg(f - g)$, alors $f = g$.

Plus précisément : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f - g]_k = 0$ donc $[f]_k = [g]_k$

Remarque - Essentiel

On aura noté que :

- $[p]_k$ est le coefficient du polynôme p devant le monôme x^k . C'est une application linéaire.
- L'addition, la multiplication et la composition de deux polynômes donnent toujours un polynôme.

3.3. Expliciter formellement les racines

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines de cette équation sont $\frac{-b + \delta}{2a}$ et $\frac{-b - \delta}{2a}$

On commence par une petite remarque :

 Remarque - Théorème de Viète

Soient $(S, P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$$

sont exactement (à permutation près) les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

En effet :

$$(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2 = x^2 - Sx + P$$

Démonstration

 Remarque - Autres idées de démonstration ?

Avec la forme canonique.

En réfléchissant sur la symétrie et la moyenne des racines... On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

Proposition - Formule de Tartaglia-Cardan (1545)

Les solutions complexes z_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ où p et $q \in \mathbb{R}$ sont donnés par

$$z_k = u_k + v_k$$

avec $u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$, $v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$

et où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$ est le discriminant de l'équation.

On peut vérifier que $\Delta = (z_0 - z_1)^2(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0)^2$ et $3u_k v_k = -p$

Exercice

Faire la démonstration

 Exemple - Racines de l'équation $x^3 - 2x = 4$

 Remarque - Degré 4

Il existe également une formule pour l'équation de degré 4. Vous la trouverez sans problème sur internet.

Vous y trouverez également l'histoire de la découverte de ces formules. C'est assez intéressant. Nous ne démontrons pas :

Théorème - Ruffini-Abel (1824)

Pour tout entier $n \geq 5$, il n'existe pas de formule générale exprimant « par radicaux » les racines d'un polynôme quelconque de degré n .

C'est-à-dire de formule n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n -ièmes

4. Equation polynomiale et analyse

4.1. La meilleure méthode : l'essai/erreur

Heuristique - La meilleure solution

Si l'on veut résoudre un problème, dont on ne sait rien excepté ses réalisations pour certains réalisations des variables. Alors la solution naturelle consiste à faire des essais/erreurs.

Concrètement, pour résoudre $f = 0$, on prend une première valeur pour x . On essaye $f(x_1)$.

Est-il égal à 0?

Si non, on essaye une autre valeur...

Est-il possible d'apprendre de nos essais/erreurs?

4.2. Retro-contrôle

Une méthode classique en ingénierie (mais aussi en biologie) est d'exploiter le retro-contrôle ou une retro-action positive.

Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter le retro-contrôle

Pour du calcul raisonné, il s'agit d'abord de réinjecter les résultats obtenus dans la formule initiale pour voir si le résultat est juste.

Mais si le résultat n'est pas juste, alors tout n'est pas perdu : il ne faut pas repartir de 0. Avec le calcul de vérification, il est parfois possible de voir où est l'erreur (erreur de signe, oubli d'une puissance...).

Et le second résultat ne doit pas être trop éloigné du premier résultat (plus grand si la fonction est croissante...).

Principe : on crée une suite (x_n) qui converge vers x , la vraie valeur que l'on cherche.

A chaque étape, on prend $x_{n+1} = x_n + y_n$, meilleure approximation de x que x_n ,

et donc y_n est une suite telle que :

- y_n est beaucoup plus petit que x_n , donc négligeable face à x_n
- $(y_n) \rightarrow 0$
- pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, y_n^k est toujours beaucoup plus petit que y_n , donc négligeable face à y_n^k .

Nous allons expliquer la méthode à partir d'un exercice.

Exercice

On cherche à donner une valeur approchée de $\sqrt{8}$. Donner une valeur approchée (à deux chiffres), par rétro-contrôle

4.3. Méthode de la sécantes

Analyse - Principe

Histoire - Niels Henrik Abel



Niels Henrik ABEL (1802-1829) est un mathématicien norvégien génial, mort très jeune. Une météorite dans le ciel septentrional.

Définition - Algorithme de la sécante

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.
On considère deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a, u_1 = b \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_{n+1} - u_n}{f(u_{n+1}) - f(u_n)} f(u_{n+1})$$

La suite ainsi définie suit l’algorithme de la sécante

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (u_n) converge vers une racine de f

4.4. Vers la dérivation. Méthode de la tangente

🔍 Analyse - Quand 0 s’invite

🔗 Heuristique - Toute forme indéterminée $\frac{0}{0} \dots$
| ... peut se voir comme un calcul de dérivée, avec la formule de L’HOSPITAL.

Rappelons ce qu’est un nombre dérivée :

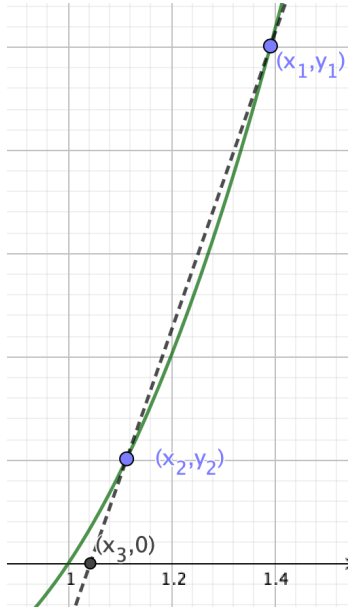
Définition - Nombre dérivée

Soit f une fonction (polynomiale), on appelle dérivée de f en x_0 , le nombre :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On note ce nombre $f'(x_0)$, selon la notation de Lagrange (1797).

🔗 Représentation - Méthode de la sécante



🔗 Pour aller plus loin - Convergence

Nous verrons plus loin ce que signifie la convergence pour une suite.
Vous pouvez déjà chercher à donner une définition formalisée...

Exemple - Monôme et polynôme. Dérivation

🔍 Analyse - Méthode de la tangente

On a l'algorithme suivant qu'on associe à NEWTON, pour son utilisation en toute généralité :

Définition - Algorithme de la tangente

Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

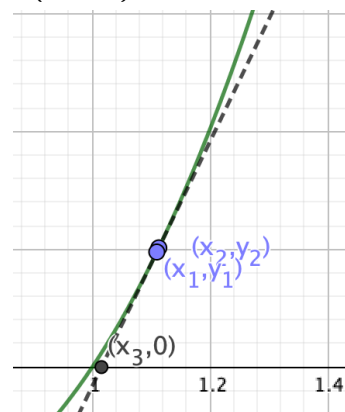
On considère deux nombres $a \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$v_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{1}{f'(v_n)} f(v_n)$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la tangente

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (v_n) converge vers une racine de f

✳ Représentation - Méthode de la tangente (Newton)



🔍 **Pour aller plus loin - Méthode de la Newton**
En informatique, au second semestre, nous justifierons plus précisément l'algorithme de Newton. Nous donnerons des conditions de convergence.

5. Bilan

Synthèse

- ↪ En science, les problèmes se traduisent sous forme d'équations, souvent polynomiales. Ces fonctions polynomiales sont très présentes car elles sont stables par addition, multiplication et composition. La multiplication s'appelle développement. On développe avec intelligence!
- ↪ Le plus important pour résoudre une équation est de savoir factoriser. Le théorème de factorisation est très important : il permet de séparer les problèmes de résolution.
Dans quelques rares cas (degré faible), il existe des formules explicites qui donnent les expressions des racines d'une fonction polynomiale.

- ↪ On peut aussi regarder les fonctions polynômiales comme des transformations géométriques de la droite réelle. Faire le lien : fonction polynomiale/représentation géométrique permet d'enrichir chacun des deux points de vue. On peut penser à l'exemple des coniques.
- ↪ Une autre idée est d'exploiter ce lien pour chercher les racines : localement une branche de courbe polynomiale ressemble à un segment de droite. Les algorithmes de la sécante ou de la tangente exploitent cette idée pour trouver une valeur approchée d'une racine d'une fonction polynomiale.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

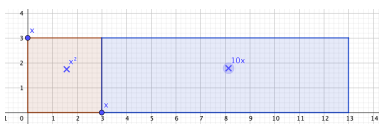
- Savoir-faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (translation)
- Savoir-faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (symétrie axiale)
- Savoir-faire - Graphe d'une fonction $y = f(x)$ (symétrie centrale)
- Truc & Astuce pour le calcul - Transformer le résultat d'un calcul en une représentation visuelle
- Truc & Astuce pour le calcul - Avec des fonctions
- Truc & Astuce pour le calcul - Anticipation
- Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaissance de formes
- Truc & Astuce pour le calcul - Garder en mémoire « vive » le calcul
- Savoir-faire - Factoriser
- Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter le retro-contrôle

Notations

| Notations | Définitions | Propriétés | Remarques |
|------------|---|--|---|
| $[f]_k$ | coefficient de la fonction polynomiale f devant le monôme x^k | Linéarité : $[\lambda f + \mu g]_k = \lambda [f]_k + \mu [g]_k$

Convolution : $[f \times g]_k = \sum_{i=0}^k [f]_i [g]_{k-i}$ | $\deg f = n \iff \forall k > n, [f]_k = 0$ |
| $b_a^n(x)$ | Petit Bernoulli en a d'indice n | $\forall x \in \mathbb{K} \quad b_a^n(x) = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}$ (fonction polynomiale) | $x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a) \times b_a^n(x)$ |

Retour sur les problèmes



- 1.
2. Il faut transformer en phrase les opérations $\times, \sqrt{\cdot} \dots$
3. $x = u - v, x^3 = (u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$.
On a donc : $x^3 + 6x - 20 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6x - 20 = u^3 - v^3 + 3x(2 - uv) - 20$.
Ajoutons la condition $uv = 2$, on a donc $u^3 - v^3 = 20$ et $u^3 v^3 = 8$.
Ainsi, u^3 et $-v^3$ sont racines de $x^2 - Sx + P = x^2 - 20x - 8 = 0$.
 $\delta = 432$, puis $u^3 = 10 + \sqrt{108}$ et $v^3 = 10 - \sqrt{108}$.
Et enfin, $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.
Autre méthode : $x^3 + 6x = 20$? Par essai : $x = 2$ fonctionne.

$$x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + 2x + 10) = (x - 2)(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$$

Puis, on exploite la formule de Cardan et enfin on reconnaît un bi-carré :

$$\begin{aligned}
 x^4 + px^2 + 1 &= \left(x^2 - \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right) \left(x^2 - \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right) \\
 &= \left(x - \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}}\right) \left(x + \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

4. Voir cours de terminale (ou de première)

5. C'est la méthode de la retro-action.

6. Par récurrence : $f^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^n i(i-1)\dots(i-k)a_i x^{i-k} = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}x + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}a_n x^{n-k}.$

Et donc $f^{(k)}(0) = k!a_k$. Ainsi, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$

