Chapitre 3

# Résolution de systèmes linéaires.

**Résumé -**

*Il n'est pas rare également d'avoir à résoudre des équations algébriques sous forme de systèmes d'équations linéaires.*
*Le but de ce (tout petit) chapitre est de mettre en place les définitions efficaces, les méthodes (algorithmes) de résolution adéquates (ce que n'est pas la substituion...) et de voir apparaître par le calcul bien mené, la structure sous-jacente.*
*On voit ici l'exemple typique du calcul linéaire, ou matriciel et la structure clé d'espaces vectoriels.*

*Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet. A visionner à loisir :*
- *Exo7Math - Systèmes linéaires - partie 1 : introduction. https ://www.youtube.com/watch ?v=0uYJ3RNL5SU*
- *Mathéma-TIC - Règle de Cramer. https ://www.youtube.com/watch ?v=CNzVk1evqac*

## Sommaire

# 1. Quelques problèmes

**? Problème 12 - Résolution d'un système linéaire**

Il n'est pas rare que l'on rencontre en SI ou en physique (ou en mathématiques) un système d'équation de la forme suivante à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Est-il possible de trouver la/les solution(s) en (x,y,z) de ce système directement?
On peut croire et anticiper que ces solutions s'expriment sous la forme d'un calcul différent (mais équivalent, d'une certaine façon) pour $x$, $y$ et $z$, à partir des nombres $2; 3; -4; 1\dots$
Comment expliciter ce calcul?

**? Problème 13 - Résolution « au petit bonheur »**

Lorsque le système est gros (plus de quatre équations), les méthodes aléatoires de résolution ne fonctionnent pas bien.
Il faut s'organiser. Qu'avons-nous le droit de faire? Existe-t-il une méthode, un algorithme (programmable informatiquement, par exemple) qui donne à coup sûr l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires?

**? Problème 14 - Forme de l'ensemble des solutions**

Dans la pratique, lorsqu'on rencontre un système de 3 équations à 3 inconnues, on trouve une unique solution.
Est-ce toujours vrai? Sinon, qu'est-ce qui fait que cela peut être faux?
Et, plus généralement, s'il y a $n$ équations et $p$ inconnues, combien y a-t-il de solutions?

**? Problème 15 - Impact des paramètres**

Il arrive aussi en science appliquée (et en mathématiques (en interne) également) que l'on trouve un système à paramètre. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ (a-1)x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Dans ce cas là, à quoi ressemble l'ensemble des solutions?

# 2. Systèmes linéaires. Equivalence

Dans cette partie, même si nous énonçons des résultats (sous forme de définitions et propositions à apprendre), nous ne faisons pas (encore) de démonstration comme annoncé au cours inaugural.

## 2.1. Vocabulaire

**Remarque - Le formalisme de LEIBNIZ**
On commence par **paramétrer notre problème** : on l'élargit en donnant une écriture symbolique (paramétre lettré) aux nombres. Puis on élargit la problème : pourquoi seulement trois équations et trois inconnues ?
Pour permettre l'étude systématique des systèmes linéaires, on a besoin d'une suite de nombre doublement indexé les $(a_{i,j})$. C'est Leibniz qui en a eu l'idée (1678). Et comme souvent, à partir du moment où le formalisme et les définitions associées sont bons, les théorèmes tombent comme des fruits mûrs...

**Définition - Système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues**
Un **système linéaire** à $n$ équations et $p$ inconnues à coefficient dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un système $S$ d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

où
- les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ ;
- $(b_1, b_2, \dots b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le second membre de l'équation ;
- $(x_1, x_2 \dots x_p) \in \mathbb{K}^p$ est appelé l'inconnue du système.

On appelle **système homogène** le système obtenu en remplaçant chaque $b_i$ par 0 (second membre nul).

On appelle **solution** du système $S$, l'ensemble $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^p$ des $p$-uplets $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_p)$ qui vérifient les $n$ équations :
$\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{i,p}\overline{x}_p = b_i$

***Histoire - Mathématiques des neuf livres***
*Le plus vieux traité mathématique proposant l'étude de système d'équations linéaires est le Chiu chang suan shu, que l'on appelle les mathématiques des neufs livres, écrit en 160 av. JC. Bien que de nature différentes (moins géométrique et plus algorithmique), ce livre est au mathématiques chinoise, ce que les éléments d'Euclide sont aux mathématiques européennes.*

**Remarque - Notations**
On a pour habitude de noter $S$ les systèmes et de manière plus stylisé l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$.
On associe parfois des indices.

**Remarque - Solution(s) du système homogène**
Un système linéaire homogène admet toujours au moins la solution nulle :
$\mathscr{S}_0 = (x_1, x_2 \dots x_p) = (0, 0 \dots, 0) = O_p$

**Heuristique - Résolution**
Il y a en gros deux méthodes pour résoudre un tel système.
La méthode de Leibniz (fin du XVII) fonctionne très bien pour les petites dimensions $n, p \leqslant 3$ et la formule de Cramer que l'on donnera ensuite. Elle marche bien également *en théorie* pour les grandes dimensions.
La méthode (dite) de Gauss est algorithmique, nous la privilégierons pour les plus grandes dimensions.

## 2.2. Systèmes équivalents

**Analyse - Sens des flèches $\Rightarrow$, $\Leftarrow$**

**Définition - Systèmes équivalents**
Deux systèmes $S_1$ et $S_2$ sont dits équivalents, relation notée

$$S_1 \Longleftrightarrow S_2$$

si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$.

Exercice

Les systèmes $S_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{array} \right.$ et $S_2 : \left\{ \, 2x+y=1 \right.$ sont-ils équivalents ?

**Attention - Pas d'abus**
Typiquement ici, il ne faut pas abuser du symbole d'équivalence !
Dans l'exercice, on écrit donc jamais :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad 2x+y=1$$

Il n'y a ici qu'une implication.

## 3. Résolution explicite. cas des petits systèmes $n = p = 2$ ou $n = p = 3$

### 3.1. Vers la formule de Cramer

**Etude formelle du système simple $n = p = 2$**

Comme Leibniz, commençons par étudier le système

$$S : \quad \left\{ \begin{array}{lll} ax & +by & =\alpha \\ cx & +dy & =\beta \end{array} \right.$$

où $a, b, c, d$ et $\alpha, \beta$ sont des paramètres, alors que $x, y$ sont les inconnues.
**Analyse - Etude « à la lycéenne »**

**Remarque - Avons-nous trouver les solutions ?**
Non !!
Ici, on a $\mathscr{S} \subset \left\{ \left( \dfrac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}, \dfrac{-\alpha c + \beta a}{ad-bc} \right) \right\}$.
Mais peut-être que $\mathscr{S}$ est l'ensemble vide !

**Il faut donc faire une réciproque**. Sinon, il y a une faute (courante) de logique.

**Analyse - Réciproque**

**Remarque - $a \neq 0$ ?**
Dans l'analyse, il a fallut faire séparer le cas $a \neq 0$.
Mais le résultat obtenu ne dépend pas de $a = 0$ ou $a \neq 0$. Donc on aurait sûrement pu s'en passer.
D'ailleurs, la réciproque montre que ce n'est pas un cas important.
Seule la situation $ad - bc \neq 0$ ou $ad - bc = 0$ est importante !

**Définition - Déterminant d'un système $2 \times 2$**
On appelle **déterminant du système** $2 \times 2$ (i.e. $n = 2$ et $p = 2$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$.

**Cas d'un système $3 \times 3$**

Leibniz propose d'étendre sa méthode pour $n > 2$.

**Définition - Déterminant d'un système $3 \times 3$**
On appelle **déterminant du système** $3 \times 3$ (i.e. $n = 3$ et $p = 3$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$.

***Pour aller plus loin - Extension de taille $n$***
*Lorsque l'on souhaite généraliser la notion de déterminant, on comprend qu'il faut prendre une combinaison linéaire des termes constitués exactement de nombre tous pris dans des lignes et des colonnes différentes.*
*Mais il y a une règle de signe à respecter. Il n'est pas clair que Leibniz ait bien compris cette règle.*
*Cramer, 50 ans plus tard l'a retrouvé (sans avoir connaissance des travaux de Leibniz).*
*Un mathématicien japonais* SEKI KOWA *(1642-1708) a effleuré toute cette découverte.*

**Formule de Cramer**

Nous verrons dans le cours sur les déterminants, au second semestre, une petite notice sur Gabriel Cramer (1704-1752)

**Savoir faire - Formule de CRAMER**
Si le déterminant du système $S$ (n=p=2) est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

***Pour aller plus loin - Sytème de taille $n \times n$***
*Dans le calcul du déterminant qui donne $x_i$, on remplace la $i$-ème colonne par la colonne du second membre.*
*La formule de Cramer se généralise à tout système carré, avec une bonne définition du déterminant généralisée.*

est $\mathscr{S}=\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\}=\left\{\left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2}\\ b_2 & a_{2,2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1\\ a_{2,1} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}}\right)\right\}$.

Si le déterminant du système $S$ (n=p=3) est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3 & =b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3 & =b_2\\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3 & =b_3\end{array}\right.$$

est $\mathscr{S}=\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\}=\left\{\left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3}\\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3}\\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1\\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2\\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}\right)\right\}$

# 4. Algorithme su pivot de GAUSS

**Heuristique - Il y a une bonne méthode et une mauvaise méthode...**

La **mauvaise méthode** est la SUBSTITUTION.
On perd des équations et cela est **plus long**.
La **bonne méthode** consiste à faire des OPERATIONS ELEMENTAIRES.
Il faut les connaître, mais ce n'est pas sufffisant.
Il faut aussi savoir **bien** les mener. C'est la partie difficile de l'algorithme.

## 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

**Définition - Opérations élémentaires**

On appelle **opérations élémentaires** sur le système dont la ligne $i$ est noté $L_i$, les opérations suivantes :

— pour tout $i,j\leqslant n$, échange des lignes $L_i$ et $L_j$ codé : $L_i \leftrightarrow L_j$

— pour tout $i\leqslant n$, $\lambda\neq 0$, la multiplication de la ligne $L_i$ par $\lambda$ codé : $L_i \leftarrow \lambda L_i$

— pour tout $i,j\leqslant n$, $\alpha\in\mathbb{K}$, l'ajout à la ligne $L_i$ de $\alpha$ fois la ligne $L_j$ codé : $L_i \leftarrow L_i+\alpha L_j$

**Proposition - Invariant des solutions**

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

**Démonstration**

## 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

**Savoir faire - Algorithme du pivot de GAUSS**

Pour résoudre un système linéaire, on applique des opérations élémentaires pour le rendre triangulaire.

1. On cherche un coefficient non nul dans la première colonne (devant la première inconnue) le plus simple possible (on va devoir diviser par ce nombre).
   Si tous les coefficients sont nuls, on passe à l'inconnue suivante.
2. On échange la ligne où l'on a trouvé ce coefficient avec la ligne 1.
3. Pour $j \in [\![2, n]\!]$, on effectue l'opération $L_j \leftrightarrow L_j - \dfrac{a_{1,j}}{a_{1,1}} L_1$ (ce qui permet d'annuler le coefficient devant $x_1$ pour la ligne $j$ puis pour toute la colonne.
4. On recommence la première étape, en oubliant la première équation et en s'intéressant à l'inconnue suivante, tant qu'il reste des inconnues.

Après avoir appliqué cet algorithme, le système obtenu est triangulaire, et l'on peut déterminer ses solutions en partant de la dernière équation et en remontant à la première (sans substitution : cela demande un « mouvement » supplémentaire...).
Il peut arriver que l'on retrouve en dernière équation plus d'une inconnue. Dans ce cas, on garde une seule inconnue, les autres deviennent des variables libres que l'on considère alors en second membre.

***Histoire - Algorithme de Fang-Cheng***
*On ne prête qu'au riche : en occident, nous associons l'algorithme ici étudié (central en mathématiques de l'algèbre linéaire) au grand Carl-Freidrich Gauss, mais il semble qu'il soit bien connu et expliqué dans les mathématiques des neuf livres (première impression en 1084, 5 siècle avant Gutemberg...).*
*L'auteur de cet ouvrage est un certain* CHANG TS'ANG, *et sa méthode s'appelle le modèle rectangulaire écrit Fang-Cheng.*

## 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

**Application - Trois systèmes à résoudre :** $S_1 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array}\right.$ **,**

$S_2 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array}\right.$ **et** $S_3 : \left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array}\right.$

**Remarque - Nombre de solution**
Notons de cette application qu'un système carré (ici $3 \times 3$) peut avoir :

- aucune solution
- une unique solution
- une infinité de solution

> ***Pour aller plus loin - Début du second semestre***
> *Ceci est le début historique de l'algèbre linéaire que nous verrons longuement en début de second semestre (avec la question des déterminants). N'anticipons pas trop pour le moment…*

**Attention - Lorsqu'il y a infinité de solution…**
il n'y a pas unicité d'écriture de cet ensemble

> ***Pour aller plus loin - Rang d'un système***
> *Le nombre (entier) de variables libres obtenues lors de la résolution du système (homogène) s'appelle le rang du système. Ce nombre, caché à première vue, compris entre 0 et $\min(n, p)$ joue un rôle très important en théorie matriciel*

## 5. Bilan

**Synthèse**

- ⇝ Pour la résolution d'un système linéaire il existe une méthode infaillible : l'algorithme du pivot de Gauss.
  Plus la taille du système est grande, plus il est nécessaire d'exploiter cette méthode.
- ⇝ Pour des systèmes plus petits, on peut exploiter directement la formule de Cramer
- ⇝ L'ensemble des solutions est soit un ensemble vide, soit l'addition d'une solution particulière et de l'ensemble (*espace vectoriel*) des solutions de l'équation homogène. L'écriture de cet ensemble n'est pas unique.
- ⇝ Il faut être très attentif au symbole $\Longleftrightarrow$ parfois employé abusivement…

**Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre**

- Savoir-faire - Formule de Cramer
- Savoir-faire - Algorithme du pivot de Gauss

## Notations

| *Notations* | *Définitions* | *Propriétés* | *Remarques* |
|---|---|---|---|
| $S_1 \iff S_2$ | Les systèmes $S_1$ et $S_2$ ont les mêmes solutions | $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$ | On passe de l'un à l'autre par opérations élémentaires. |
| $S_1 \Longrightarrow S_2$ | Les solutions de $S_1$ sont des solutions de $S_2$ | $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ | On passe de $S_1$ à $S_2$ par opérations « non légitimes » ... |
| $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ | Déterminant du système $S$ (de taille 2) ou de la matrice associée | | On exploite ce résultat pour les formules de Cramer. |

## Retour sur les problèmes

12. Résolution d'un système linéaire. $\mathscr{S} = \{(1,1,1)\}$.
13. Résolution « au petit bonheur ». Voir l'algorithme de Gauss.
14. Forme de l'ensemble des solutions.
    Il peut y avoir :
    — aucune solution (dans ce cas le système n'est pas homogène)
    — une solution de la forme $\mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_p) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \overrightarrow{u_k}\}$ où $r$ est le rang du système, $(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_p)$ est une solution particulière et pour tout $k$, $\overrightarrow{u_k}$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, solution non nulle de l'équation homogène.
    (Ces vecteurs sont linéairement indépendants).
15. Impact des paramètres.
    — Si $a = 8$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$,
    — Si $a \neq 8$, alors $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{2}{8-a}, \frac{a-16}{a-8}, \frac{10}{8-a}\right)\right\}$