Chapitre 6

Calcul matriciel

Résumé -

Dans un premier temps nous (re)définissons les opérations matricielles : addition, multiplication par un nombre (ce qui donne un espace vectoriel) et multiplication (ce qui donne avec l'addition un anneau).
Puis nous nous concentrons sur les matrices carrées ; elles jouent un rôle très important, puisque très fréquemment, on est amené à multiplier une matrice par elle-même (pour cela elle doit être carrée). C'est l'occasion de définir et de voir les propriétés des puissances de matrice, ainsi que de la trace.
On cherche également à inverser de telle matrice (si possible). Le meilleur moyen est d'utiliser un algorithme de Gauss (pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan).

Sommaire

Dans tout le chapitre, m, n, p, q sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on pourrait plus généralement considérer que $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif)).

1. Problèmes

? Problème 25 - Pourquoi des matrices ?

Pour comprendre le monde qui nous entoure, on mesure des objets puis des dépendances entre ces objets.
Ces dépendances peuvent être multidimensionnelles, elles sont souvent enregistrées dans un tableau. C'est ce que l'on voit en particulier en économétrie, ou des domaines encore plus large : biologie, géographie...
Additionner des nombres a du sens lorsqu'on a des mesures de même unité d'objets de même nature. C'est seulement au XV-ième siècle que les additions se sont généralisées et se sont dégagées de leur signifiants.
Peut-on définir une addition des tableaux, qui ait du sens ? Peut-on généraliser cette addition à tous tableaux ?
Quelles sont les propriétés naturelles qui découlent : associativité, commutativité, élément neutre (Groupe) ? Voire : espace vectoriel, avec une multiplication par un scalaire.

? Problème 26 - Pourquoi un tel produit ?

On peut addition des tableaux, peut-on les multiplier ?
Donner une incarnation naturelle dans un problème physique qui justifie la règle de multiplication matricielle :

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

? Problème 27 - Racines carrées

Puisque le produit de deux matrices existe, la puissance entière en découle : $A^2 = A \times A$ et par récurrence : $A^n = A \times A^{n-1}$.
Peut-on définir des puissances entières négatives : A^{-4} ?
Et plus largement des puissances non entières. Par exemple, la racine carrée de A serait une matrice B tel que $B^2 = A$.
Concrètement, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet-elle une racine carrée ? Plusieurs (combien ?) ?

? Problème 28 - Anneau non commutatif des matrices

L'anneau des matrices carrées de taille n : $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un exemple d'anneau non commutatif : $A \times B \neq B \times A$. Cela suggère quelques questions :

— Parmi les propriétés classiques d'anneaux, lesquelles ne sont plus vraies dans cet anneau ?
— Et inversement, existe-t-il des matrices A tel que pour tout B : $A \times B = B \times A$
— Etant donnée A, existe-t-il une condition simple, nécessaire et/ou suffisante sur B pour que $A \times B = B \times A$?

— On sait que les éléments du groupe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\times := GL_n(\mathbb{K})$ sont les matrices inversibles et ne sont nécessairement pas des diviseurs de 0.

? Problème 29 - Matrices inversibles

Existe-t-il un moyen simple, algorithmique, pour étudier l'inversibilité d'une matrice ? Peut-on l'exploiter pour obtenir également A^{-1} (dans le cas où A est inversible) ?

2. Esnsemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Cet ensemble est considéré comme un espace vectoriel ici.

2.1. Ensemble des matrices

Définition - Matrices

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$. On parle aussi de matrice de type (n,p) ou de matrice $n\times p$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p}=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

a_{ij} est le coefficient de la i-ième ligne, j-ième colonne.
Deux matrices A et B sont donc égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et mêmes coefficients.
Si $n=p$ on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Exemple - Premier exemple

Définition - Quelques cas particuliers

Quelques matrices « de référence » sont à connaître :

— La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice qui ne contient que des coefficients nuls :

$$(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=(0)=O_{n,p}$$

— si $n=1$, on dit que $A=\begin{pmatrix}a_1 & \dots & a_p\end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

— si $p=1$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ est appelée matrice colonne.

Parmi les matrices carrées d'ordre n, quelques matrices joueront un rôle particulier :

— La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice I_n qui possède des 1 sur la diagonale et des 0 en dehors de la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ pour $i = 1$ à n.

— une matrice diagonale est une matrice carrée dont seuls les éléments diagonaux sont non nuls :

$$\text{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

Ainsi $I_n = \text{diag}(\underbrace{1,1,\dots 1}_{n})$.

— une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments sont identiques :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ et } a_{ii} = a_{jj} = \lambda)$$

— une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0);$$

— une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0);$$

2.2. Opérations (vectorielles) sur les matrices

Addition

Définition - Addition de deux matrices de même taille
La somme de deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

est la matrice définie par la formule suivante :

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}},$$

on ajoute les coefficients qui ont la même position.
Il s'agit d'une loi interne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

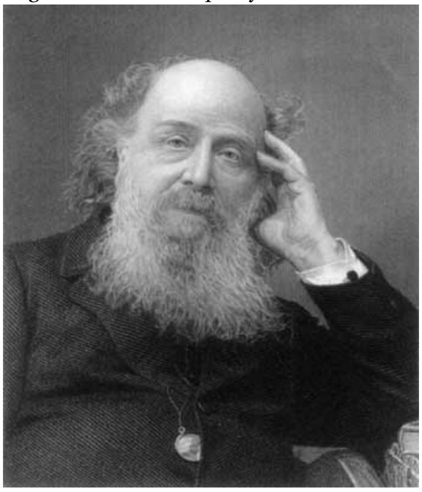
Application - Exemple

Analyse - Groupe $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$

Le théorème suivant en découle :

Théorème - Le groupe $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$
L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition + est donc un groupe commutatif, d'élément neutre la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Histoire - Le terme de matrice
Le terme de matrice pour désigner les tableaux rectangulaires considérées ici fut introduit en 1850 par le mathématicien américain d'origine anglaise : James Joseph Sylvester.



James Joseph Sylvester est né 1814 et mourut en 1897. Son origine juive l'obligea à aller enseigner en Amérique.

Multiplication par un scalaire

Définition - Multiplication par un scalaire
Le produit d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\alpha\in\mathbb{K}$ est la matrice notée αA définie par :

$$\alpha(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=(\alpha a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

On définit ainsi une loi externe sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à domaine d'opérateur $\mathbb{K}$

Et on vérifie facilement les propriétés suivantes :

Proposition - Propriétés de la multiplication scalaire

- $1A=A$
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

Espace vectoriel de dimension finie

Analyse - Pour définir explicitement, sans quiproquo, une matrice, il faut...

Théorème - L'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension np.
La base canonique est formée par les $n\times p$ matrices $E_{k\ell}$ $(1\leqslant k\leqslant n; 1\leqslant \ell\leqslant p)$ où $E_{k\ell}$ est la matrice ne contenant que des 0 sauf l'élément d'indices k,ℓ qui vaut 1, soit
$$E_{k\ell} = (\delta_{ki}\delta_{j\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$
On a donc $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n\times p$.

Savoir faire - Notations

Par la suite, on notera ${}^{i}[A]_{j}$ ou $\text{Coef}_{i,j}(A)$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A.
On a donc
$$ {}^{i}[\lambda A+\mu B]_{j} = \lambda {}^{i}[A]_{j}+\mu {}^{i}[B]_{j} \qquad \text{Coef}_{i,j}(\lambda A+\mu B) = \lambda\text{Coef}_{i,j}(A)+\mu\text{Coef}_{i,j}(B)$$
$$\forall\ i,j,\qquad {}^{i}[\cdot]_{j} \text{ ou } \text{Coef}_{i,j} \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
On notera également $L_i(A)$ (respectivement $C_j(A)$), la ligne i (respectivement colonne j de A).
On note que ${}^{i}[AB]_{j} = L_i(A)\times C_j(B)$, c'est un nombre.

2.3. Transposition

Définition - Matrice transposée
Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
on définit la **transposée** de A, notée ${}^{t}A$ ou A^T par
$$\forall\ i\leqslant p, j\leqslant n: \qquad {}^{i}[A^T]_{j} = {}^{i}[{}^{t}A]_{j} = {}^{j}[A]_{i}$$
On a $A^T\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La transposée d'une matrice s'obtient en "échangeant" lignes et colonnes :
Exemple - Matrice 3×3

Théorème - Isomorphisme
Sous réserve que la taille des matrices permette d'effectuer les différentes opérations, on a :
$$(A+B)^T = A^T+B^T;\quad (\lambda A)^T=\lambda A^T;\quad (A^T)^T = A$$
La transposition est donc un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exercice
Faire la démonstration

3. Multiplication matricielle

3.1. Définition

Définition - Produit de deux matrices
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$$

où

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Savoir faire - Notation et multiplication matricielle
Par la suite, on notera $\mathrm{Coef}_{i,j}(A)$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A.
On a donc

$$^{i}[AB]_{j} = \sum_{k=1}^{p} {}^{i}[A]_{k}\,{}^{k}[B]_{j}$$

Il faut savoir passer d'un sens vers l'autre : $\mathrm{Coef}_{i,j}(AB) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Coef}_{i,k}(A)\mathrm{Coef}_{k,j}(B)$ et aussi $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Coef}_{i,k}(A)\mathrm{Coef}_{k,j}(B) = \mathrm{Coef}_{i,j}(AB)$.

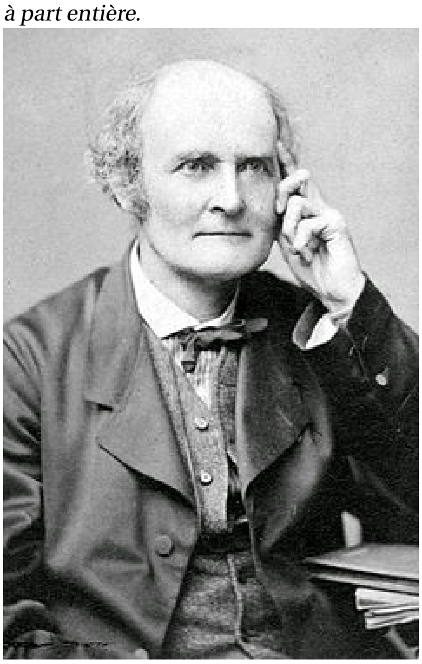
Pour aller plus loin - La convention d'Einstein
La convention d'Einstein en physique consiste à voir dans toute répétition de deux lettres muettes une somme. Ainsi le symbole $\sum$ peut être enlevé.
Le fait qu'une telle convention existe signifie la fréquence importante des opérations du type

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

écrit par Einstein : $a_{i,k}b_{k,j}\ldots$

Attention - Taille des matrices
On ne peut pas multiplier une matrice de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ avec une matrice de $\mathscr{M}_{5,6}(\mathbb{K})$! Il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.

Histoire - Arthur Cayley
C'est Arthur Cayley qui définit le produit matriciel, dans le premier article (1855) qui étudie les matrices comme objets mathématiques à part entière.

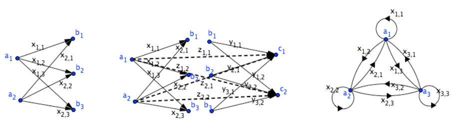


Arthur Cayley est un brillant avocat puis mathématicien anglais né en 1821 et mort en 1895. C'est un génie très hétéroclite.

Savoir faire - Présentation des calculs
Une méthode pratique de présentation des calculs :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & b_{1j} & \ldots \\ \ldots & \ldots & b_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & b_{pj} & \ldots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & c_{ij} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

Application - Produit de deux matrices

> ***Pour aller plus loin - Interprétation en terme de graphes***
>
> *Un dessin permettra d'expliquer au mieux ce à quoi peut servir une matrice. Il faut d'abord considérer :*
>
> 1. *un ensemble de départ; par exemple : $A = \{a_1, a_2\}$*
> 2. *un ensemble d'arrivée; par exemple : $B = \{b_1, b_2, b_3\}$*
> 3. *un jeu de flèches entre les deux ensembles, associés à des nombres. Par exemple, la flèche $a_i \to b_j =_i X^j$ indique la relation entre a_i et b_j.*
>
> *C'est cette flèche qui est abstraite, la plus ouverte possible. Elle peut être par exemple un temps de trajet, un coefficient de proportionalité... Ainsi la figure 1 suivante est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{pmatrix}$.*
>
> 
>
> FIG.1-GRAPHE - FIG.2-PRODUIT -FIG.3- CARRÉE MATRICIEL
>
> *La figure 3 représente un matrice d'un ensemble dans lui-même (comme pour les endomorphismes), elle est nécessairement carrée.*
>
> *La figure 2 représente alors le produit matriciel. En effet, il s'agit de savoir comment aller alors de $A = \{a_1, a_2\}$ à $C = \{c_1, c_2\}$. La réponse est obtenue sous forme de matrice $z_{i,j}$, où $z_{i,j}$ indique les chemins de a_i à c_j. Il y a en fait trois possibilités : passer par b_1, b_2 ou b_3, cela donne donc exactement :*
>
> $$\begin{aligned} z_{i,j} &= x_{i,1}y_{1,j} + x_{i,2}y_{2,j} + x_{i,3}y_{3,j} \\ &= \sum_{k=1}^{3} x_{i,k}y_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{3} Coef_{i,k}(X)Coef_{k,j}(Y) \end{aligned}$$

Exemple - Petits calculs

Exercice

Simplifier le produit :

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j}b_{i,h}c_{h,\ell}d_{j,m}$$

3.2. Interprétation en terme de systèmes linéaires

Analyse - Multiplication par une matrice colonne

> **Proposition - $(S) \Leftrightarrow AX = B$**
>
> L'équation $AX = B$ pour des matrices est une manière compacte d'écrire un système linéaire général avec n équations, p inconnues et un second membre $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
>
> $$(S)\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +\dots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & + & +\vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\dots & +a_{np}x_p & = b_n. \end{array}\right.$$

Nous reviendrons sur ce parallèle lorsque nous prendrons le temps de résoudre des systèmes linéaires.

3.3. Propriété du produit

Proposition - Associativité du produit
Le produit de matrices est associatif.
Plus précisément si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors on a

$$(AB)C = A(BC)$$

qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Pour aller plus loin - Application aux probabilités
Ecrire : « $z_{i,j}$ indique les chemins de a_i à c_j. Il y a en fait trois possibilités : passer par b_1, b_2 ou b_3 » nous rappelle la formule des probabilités totales.
En effet, on se souvient que si (B_1, B_2, B_3) forme un système complet d'événements, alors :

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(B_1) \times \mathbf{P}_{B_1}(A_i) + \mathbf{P}(B_2) \times \mathbf{P}_{B_2}(A_i) + \mathbf{P}(B_3) \times \mathbf{P}_{B_3}(A_i)$$

Démonstration

Remarque - En terme de Coef$_{i,j}$
Ce que l'on a démontré c'est :

$$^i[(AB)C]_j = \sum_{h,k}^{i} [A]_h^h [B]_k^k [C]_j =^i [A(BC)]_j$$

Proposition - Bilinéarité
Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C, D de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors

$$A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD \qquad \text{et} \qquad (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

En résumé l'application $(A, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \mapsto AC \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est bilinéaire.

Ce se résume en

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

Démonstration

Proposition - Cas à connaître!
$(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i.e. ${}^{a}[E_{i,j}]_b = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$ et $(F_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ celle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $E_{i,j}\times F_{k,\ell} = \delta_{k,j}G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1\leqslant s\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant q}}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Démonstration

Exercice
Comment écrire la matrice $AE_{i,j}$ à partir de la matrice A ?
De même pour $E_{i,j}A$?

Pour aller plus loin - Transposition et graphe
La matrice transposée est la matrice associée au graphe où le sens des flèches s'inverse par rapport à la situation initiale

Proposition - Transposition d'un produit
Pour $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$${}^t(A\times B) = {}^tB\times{}^tA$$

Attention - Eviter d'écrire des bêtises
Notons bien que ${}^tB\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et ${}^tA\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Donc le produit ${}^tA\times{}^tB$ n'aurait aucun sens (aucune raison que $n=q$.)

Démonstration

3.4. Produit par blocs

Proposition - Produit par blocs
Soient deux matrices $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Considérons des entiers $k \leqslant n, \ell \leqslant p, m \leqslant q$ et des matrices $A \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,p-\ell}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-k,\ell}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-k,p-\ell}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{\ell,m}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{\ell,q-m}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p-\ell,m}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{p-\ell,q-m}(\mathbb{K})$ telles que M et N s'écrivent par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Alors, on peut calculer le produit MM' par blocs de la manière suivante :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Attention - Bien faire attention aux dimensions
Il est nécessaire que les dimensions correspondent bien.
Sinon, le calcul écrit n'aurait pas de sens

Démonstration

On peut avoir intérêt à considérer les matrices sous forme d'une association de colonnes ou de lignes.
On peut voir ces opérations, comme une forme de calculs parallèles, à la physicienne.

Proposition - Matrice et association de colonnes ou de lignes
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il nous arrivera de noter $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$

comme une association de n (matrices ou vecteurs) lignes, avec $L_i(A) = L_i$
Il nous arrivera de noter $B = (C_1|C_2|\dots|C_n)$

comme une association de n (matrices ou vecteurs) colonnes, avec $C_j(B) = C_j$
On a alors $AB = (AC_1|AC_2|\dots|AC_n) = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \hline L_2 B \\ \hline \vdots \\ \hline L_n B \end{pmatrix}$ mais aussi ${}^i[A \times B]_j = L_i \times C_j$.

Exercice
Comment écrire la matrice $E_{i,j}A$ à partir de la matrice A et $AE_{i,j}$, en raisonnant par blocs ?

4. Les matrices carrées

4.1. L'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Heuristique - Pourquoi les matrices carrées ?
Si on multiplie deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on trouve un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication est donc interne dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut ainsi effectuer les calculs $A \times B$ et $B \times A$, mais aussi A^k pour tout entier k...
Nous verrons qu'ains $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Pour aller plus loin - Algèbre ?
On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un ensemble $\mathscr{A}$ muni de deux opérations interne (notées ici + et ×) et une opération externe (notée ici ·) telle que $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathscr{A}, +, \times)$ est un anneau.

Théorème - La $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n.

Pour aller plus loin - Algèbre
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.

Exemple - Non commutativité et non intégrité

Exemple - L'inverse d'une matrice d'ordre 2

4.2. Puissance de matrices

Définition - Puissance d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence :

$$A^0 = I_n, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k$$

On a alors, par commutation :

$$A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}} = A^m \times A^{k-m} \qquad \text{(pour tout } m \leqslant k\text{)}$$

Les règles de calcul dans un anneau (comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) s'appliquent d'où :

Proposition - Formules matricielles
Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = BA$ alors

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \text{ (Formule du binôme de Newton)}$$

$$A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})$$
$$I_n - A^p = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$$

4.3. Inversibilité d'une matrice

Définition - Inversibilité de A
On dit qu'une **matrice carré d'ordre** n A est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$BA = AB = I_n$$

(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Remarque - Des matrices non inversibles
On ne peut pas inverser de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $n \neq p$.
Une matrice carrée n'est pas nécessairement inversible :
par exemple, la matrice nulle O_n n'a pas d'inverse car

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AO_n = O_n \neq I.$$

Exemple - Matrice non inversible, moins triviale

Remarque - Rappels
Nous avons vu que l'ensemble des inverses d'un anneau forme un groupe.
On l'avait noté $A^\times$.

Définition - Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$
L'ensemble $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif.
On l'appelle le groupe linéaire.
On a donc pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Proposition - Inverse de la transposé
Si A est une matrice carrée inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Polynôme annulateur
On montrera en seconde année que pour tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des polynômes annulateurs de M

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(M) = 0\}$$

est non vide. On sait assurément qu'il existe au moins un polynôme de degré n dans cet ensemble (le polynôme caractéristique de M - d'après le théorème de Cayley-Hamilton).
Et mieux, comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau euclidien, cet ensemble est forcément de la forme

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(M) = 0\} = \mu_P\mathbb{K}[X]$$

où μ_P est un polynôme particulier : minimal (en degré), unitaire et propre à P. On l'appelle le polynôme minimal de P

Exercice
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1.
1. On suppose $n = 2$. Calculer J^2, J^3, J^k pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Mêmes questions avec $n \geqslant 2$ quelconque. J est-elle inversible ?
3. Calculer A^p où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Savoir faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^{-1}
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annule M, c'est-à-dire que $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0$. Alors
- si $a_0 \neq 0$, on a alors $I_n = \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k M^k\right) = M \times \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k M^{k-1}\right)$.
  Et donc nécessairement M est inversible et $M^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} M^{\mathbb{K}}\right)$
- si $a_0 = 0$, alors il faut faire un raisonnement par l'absurde :
  si M était inversible alors en multipliant par M^{-1}, on a

$$M^{-1} \times P(M) = \sum_{k=1}^{d} a_k M^{k-1} = 0 \text{ et donc } \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} M^{\mathbb{K}} = 0.$$

Il y a alors deux options,

ou bien cette somme n'est pas nulle, et par l'absurde, M n'est pas inversible,

ou bien cette somme vaut bien 0 et donc on recommence au point initial.

Savoir faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^n

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ annule M, c'est-à-dire que $P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0$.

Alors, on peut faire la division euclidienne de X^n par P :

il existe $Q_n, R_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $X^n = Q_n(X) \times P(X) + R_n(X)$ avec $\deg(R_n) < \deg(P) = d$.

On a alors, puisque $M^n = 0 + R_n(M)$ car $P(M) = 0$.

Cela permet de

— démontrer que $\{M^n, \in \mathbb{Z}\} \subset \text{vect}(I_n, M, M^2, \dots M^{d-1})$ (résultat théorique classique)

— calculer explicitement M^n, si l'on sait faire explicitement cette division euclidienne. Pour faire celle-ci, il arrive souvent qu'on utilise les racines de P...

Application - Inverse et puissance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice

Soit $A = (a_{pq}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{pq} = \exp(\frac{2i\pi pq}{n})$ et $\overline{A} = (\overline{a_{pq}})$.

Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que A est inversible.

4.4. Quelques sous-ensembles remarquables

Matrices diagonales

Proposition - Matrices scalaires
L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et aussi une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 1
Donc l'espace des matrices scalaires est $\mathrm{vect}(I_n)$*, de dimension 1.*

Proposition - Espace des matrices diagonales
L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et une sous-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 2
Donc l'espace des matrices diagonales est $\mathrm{vect}\big((E_{i,i})_{i\in\mathbb{N}_n}\big)$*, de dimension* n*.*

Proposition - Inverse de matrices diagonales
Si D est diagonale, $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, alors D est inversible si et seulement pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $d_i \neq 0$ et alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1},\dots,\frac{1}{d_n})$.
Donc D^{-1} est elle-même une matrice diagonale.

Démonstration

Matrices symétriques et antisymétriques

Pour aller plus loin - Bases 3
Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}\big((E_{i,j}+E_{j,i})\big)_{i\leqslant j\in\mathbb{N}_n}\big)$*, espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n+1)$*.*
Et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}\big((E_{i,j}-E_{j,i})\big)_{i< j\in\mathbb{N}_n}\big)$*, espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n-1)$*.*

Définition - Matrices symétriques et antisymétriques
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$, soit si pour tout (i,j), $a_{ij} = a_{ji}$ (ou ${}^i[A]_j = {}^j[A]_i$) ;
on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, soit si pour tout (i,j), $a_{ij} = -a_{ji}$ (ou ${}^i[A]_j = -{}^j[A]_i$) ;

on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{A}\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En l'absence d'ambiguité, on peut noter $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Proposition - Diagonale d'une matrice antisymétrique
Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Pour aller plus loin - Matrices et graphes
Que signifie pour un graphe que sa matrice associée est symétrique ? Antisymétrique ?

Démonstration

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Théorème - Espace des matrices triangulaires
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, contenant I_n.
Il est stable pour la multiplication (donc est un sous-anneau et une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 4
Donc il s'agit de $\text{vect}\big((E_{i,j})_{i\leqslant j\in\mathbb{N}_n}\big)$, *espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Pour aller plus loin - Inverse d'une matrice triangulaire supérieure
Nous verrons que si T une matrice triangulaire supérieure, carrée.
Alors T est inversible ssi $\forall\ i \in \mathbb{N}_n$, $\text{Coef}_{i,i}(T) \neq 0$.
Et dans ce cas, T^{-1} est également triangulaire supérieure

Attention - Pas trop vite
L'ensemble des matrices triangulaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
L'addition d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure ne donne pas une matrice triangulaire, la plupart du temps

Remarque - Mais notons :
Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

Savoir faire - Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure
Il faut montrer (condition nécessaire et suffisante) :

$$\forall\ i,j \in \mathbb{N}_n, \qquad i > j \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Coef}_{i,j}(T) = 0$$

Il faut démontrer la stabilité par somme (facile) et par multiplication de matrices triangulaires supérieures.

Démonstration

4.5. Trace d'une matrice carrée

Définition - Trace d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A le scalaire égal à la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} {}^{i}[A]_{i} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Coef}_{i,i}(A)$$

Proposition - Propriété de la trace
L'application

$$\operatorname{Tr} : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ A \mapsto \operatorname{Tr} A \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr} A + \mu \operatorname{Tr} B$ et

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

Démonstration

5. Opérations élémentaires sur les matrices

5.1. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Heuristique - Lien résolution de système/inversion de matrice
Le calcul $A \times X = b$ où X et b sont des matrices colonnes est exactement l'écriture d'un système linéaire.
La résolution $X = A^{-1}b$ (si A est inversible donc carrée) exploite les opérations élémentaires sur les lignes du système pour appliquer l'algorithme de Gauss.
Essayons de transférer directement la même idée sur les colonnes de A.

Définition - Opérations élémentaires sur les lignes
On appelle opération élémentaire sur les lignes L_i de la matrice A l'une des transformations suivantes effectuée sur A :

— **Permutation (ou échange)de deux lignes**
Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i-ième et la j-ième lignes de la matrice.

— **Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne**
Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j-ième ligne L_j de la matrice par $L_j + \lambda L_i$, où $\lambda \in K$.

— **Multiplication d'une ligne par un scalaire NON NUL**
Pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie que l'on remplace la i-ième ligne par αL_i.

Chacune des manipulations précédentes correspond à un produit matriciel :

Proposition - Transformation élémentaire sur les lignes comme un produit

Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est l'une des matrices suivantes :

— Pour $L_i \leftrightarrow L_j$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

C'est une matrice de transposition, notée habituellement $P_{i,j} (= P_{j,i})$

— Pour $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & \lambda & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij} \quad \lambda \text{ en ligne } i, \text{ colonne } j$$

C'est une matrice de transvection, notée habituellement $T_{i,j}(\lambda)$

— Pour $L_i \leftarrow \alpha L_i$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$$

C'est une matrice de dilatation, notée habituellement $D_i(\alpha)$

Démonstration

Proposition - Opération élémentaire en I_n
On considère une opération élémentaire, notée φ, qui transforme une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en la matrice $\varphi(A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice I_n en $\varphi(I_n)$.

Alors $\varphi(A) = \varphi(I_n) \times A$.

Et par récurrence, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les lignes) qui s'appliquent à des matrices possèdant n lignes, alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$[\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1](A) = \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A$.

Démonstration

Cela se concrétise dans le savoir faire suivant

Savoir faire - Retenir les opérations matricielles codant les opérations élémentaires

Pour une opération sur les lignes de A, il s'agit toujours de produit à gauche de A.
(On verra pour les colonnes, il s'agit de produits à droites de A)
Par quelle matrice ?
C'est toujours par la matrice qu'on obtient lorsqu'on applique la transformation élémentaire en question à I_n.
Ainsi, par exemple, si l'on veut faire $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, pour $n = 3$, on multi-

plie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition - Inversibilité des opérations élémentaires
Si une matrice B est déduite de A par une opération élémentaire φ, alors A peut se déduire de B par l'opération inverse φ^{-1} suivant le tableau suivant :

φ	φ^{-1}
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$	$L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$

Proposition - Inversibilité des matrices élémentaires
Si φ est une opération élémentaire sur les lignes alors la matrice carrée $\varphi(I_n)$ est inversible et $\varphi(I_n)^{-1} = \varphi^{-1}(I_n)$.
On a alors $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ (symétrique, involutif),
$\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$, et $\left(D_i(\alpha)\right)^{-1} = D_i(\frac{1}{\alpha})$.

Démonstration

5.2. Opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice

On définit les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes que sur les lignes. On obtient alors les résultats suivants :

Proposition - Transformation élémentaire sur les colonnes comme un produit
Effectuer une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à calculer le produit matriciel AF où F est l'une des matrices suivantes :

— Pour $C_i \leftrightarrow C_j$,
$$F = I_p - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$
— Pour $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
$$F = I_p + \lambda E_{ji}$$
— Pour $C_i \leftarrow \alpha C_i$
$$F = I_p + (\alpha - 1)E_{ii}$$

Démonstration

Proposition - Opération élémentaire en I_p
On considère une opération élémentaire, notée ψ, qui transforme une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en la matrice $\psi(A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice I_p en $\psi(I_p)$.
Alors $\psi(A) = A\psi(I_p)$.
Et par récurrence, si $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les colonnes) qui s'appliquent à des matrices possédant p lignes, alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$\psi_k \circ \cdots \circ \psi_1(A) = A \times \psi_1(I_p) \times \cdots \times \psi_k(I_p)$.

Démonstration

5.3. Transformation par opérations élémentaires (matrices inversibles)

Conservation de l'inversibilité

Histoire - Gauss et le calcul matriciel linéaire
Encore Gauss… Voir le cours d'arithmétique.

Proposition - Conservation de l'inversibilité
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Pour aller plus loin - Mieux!
Plus que la conservation du caractère inversible, c'est le rang d'une matrice qui est exactement conservé par de telles opérations.

Démonstration

Corollaire - Conservation d'inversibilité par les opérations élémentaires
Les opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) d'une matrice carrée conservent le caractère inversible/non inversible d'une matrice.

Démonstration

Algorithme

Histoire - Fang-cheng
« Cette méthode est connue des Chinois depuis au moins le Ier siècle de notre ère. Elle est référencée dans le livre chinois Jiuzhang suanshu (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de dix-huit exercices. Dans son commentaire daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au IIe siècle avant notre ère. » (pompage sans scrupule de Wikipedia…)

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la décomposition de A vers I_n par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires,

dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

On commence par un lemme, que l'on démontre, puis que l'on applique aux matrices triangulaires supérieures avant de faire la démonstration globale.

Lemme - Trigonalisation

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-s,s} & C \end{array}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, où $A \in GL_s(\mathbb{K})$ ($s \in \mathbb{N}_n$, quelconque) et $C \in \mathscr{M}_{n-s}(\mathbb{K})$, alors :

• ou bien $\forall\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$, ${}^{i}[C]_1 = 0$ et alors M n'est pas inversible

• ou bien $\exists\ i \in \mathbb{N}_{n-s}$ tel que ${}^{i}[C]_1 \neq 0$, alors $\exists\ T$, produit de matrices élémentaires telle que $T \times M = \left(\begin{array}{c|cc} A & & B \\ \hline & x & \\ & 0 & \\ 0_{n-s,s} & \vdots & C' \\ & 0 & \end{array}\right)$ avec $x \neq 0$.

Démonstration

Corollaire - Matrices triangulaires supérieures
Si T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure, avec des coefficients non nuls sur la diagonale.
Alors il existe T', triangulaire supérieure et inversible telle que $T' \times T = I_n$.
Réciproquement, si T est une matrice (carrée) triangulaire supérieure, avec (au moins) un coefficients nuls sur la diagonale, alors T n'est pas inversible.

Démonstration

On peut enfin démontrer l'algorithme de Gauss.

Démonstration

Remarque - Et les colonnes
On peut également procéder à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes puisque l'on aura alors $AF_1 \dots F_p = I_n$ d'où $A^{-1} = I_n F_1 \dots F_m$,

Attention - Surtout pas!
Mais en revanche il ne faut surtout **pas mélanger les deux types d'opérations** car l'on aboutit à $E_m E_{m-1} \dots E_1 A F_1 \dots F_p = I_n$ qui n'est pas de la forme $AB = I_n$ et ne permet pas de conclure à l'inversibilité de A.
Mais néanmoins, comme souvent, rien n'est perdu dans ce cas là : on montrera que A est équivalente à I_n, donc de même rang : n, donc elle est inversible...

Corollaire - Inversion à droite suffisante
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.
Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
(De même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Démonstration

Pour aller plus loin - Autres algorithmes
Il existe d'autre méthode (raffinement de Gauss) pour inverser une matrice. Elles ont une complexité algorithmique plus faible (on gagne sur la constante dans le O - ou mieux encore dans certains cas tout particulier de matrices). Il s'agit des méthodes LU, QR, Choleski. On peut aussi employer des méthodes itératives assez différentes dans leur philosophie comme les méthodes de Jacobi... On crée une suite de matrice (A_n), avec $A_0 = A$ et $\lim(A_n) = A^{-1}$. On s'arrête quand on est « assez proche » de A^{-1}.

Savoir faire - Inversibilité et inverse d'une matrice par l'algorithme de Gauss

Calculer l'inverse de $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&-1\\1&0&-1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\end{array}\right)\quad\left\{\begin{array}{l}L_1\leftarrow -L_3\\L_2\leftarrow L_1\\L_3\leftarrow L_2\end{array}\right.$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&-1\\0&0&-1&1&0&1\\0&-1&0&0&1&1\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right.\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right)\left\{\begin{array}{l}L_2\leftarrow -L_3\\L_3\leftarrow -L_2\end{array}\right.$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.
Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1}, donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

A retenir : **dans une opération élémentaire, il ne faut pas perdre l'information d'une ligne**. Autrement écrit, il faut toujours pouvoir revenir en arrière !!

Pour aller plus loin - Coût de l'algorithme de Gauss

Si l'on suit parfaitement la démarche de l'algorithme de Gauss, la complexité calculatoire est en $O(n^3)$ où n est l'ordre de la matrice considérée.
En effet, il faut mettre en place trois boucles imbriquées, indexée par n (pas tout à fait l'une est triangulaire).

Exercice

Calculer l'inverse de $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-1&-2\\2&2&5\end{pmatrix}$.

Remarque - Et si A n'est pas inversible ?

Si A n'est pas inversible, alors l'algorithme conduit à une matrice échelonné (triangulaire supérieure) dont la diagonale possède (au moins) un zéro. Il est alors totalement impossible d'obtenir I_n.
Nous verrons plus loin que l'algorithme donne alors une nouvelle information à propos de la matrice A : son rang !

Exercice

Déterminer les inverses de

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\-2&-3&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10&9&1\\9&10&5\\1&5&9\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&-1&1&1\\2&1&3&-1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

6. Bilan

Synthèse

- Les problèmes à double entrées se codent dans des tableaux. Ces problèmes s'articulent lorsqu'ils ont une entrée commune ; cela se code par la multiplication des tableaux. Nous avons ainsi défini des opérations sur les tableaux (à taille fixée), donnant une structure d'anneau et d'espace vectoriel à cet ensemble (lorsque les dimensions correspondent bien). Attention c'est un anneau non commutatif, avec des diviseurs de zéros...
- Un espace est particulièrement intéressant, celui des matrices de taille carrée, car dans cette situation, elles codifient les transformations d'un espace sur lui-même. Cas très fréquent.
  Pour ces matrices, on peut être amené à étudier leurs puissances A^n (cf. Sciences physiques). Mais ici on se concentre surtout sur l'étude de l'inversibilité de A et le calcul de A^{-1} si possible.

⇝ On met en place un algorithme pour répondre à ces questions. C'est un algorithme sur les matrices, mais qui se code aussi par du calcul matriciel. Ainsi on voit les matrices (ou plutôt des ensembles de matrices) agir sur les matrices (ou plutôt d'autres ensembles de matrices). Cela nous donne l'idée de considérer des actions de groupes $GL_n(\mathbb{K})$ (groupe des matrices carrées de taille n, inversibles) sur tout plein d'ensembles.
En exploitant cette idée, on dégage la notion de rang d'une matrice ; il est invariant par produit par matrices inversibles à droite et à gauche et on trouve une forme normalisée adaptée (pour la relation d'équivalence qui conserve le rang). Cette méthode est exploitée similairement dans plein d'autres parties des mathématiques (matrices congruentes, matrices semblables...)

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Notations
— Savoir-faire - Notation et multiplication matricielle
— Savoir-faire - Présentation des calculs
— Savoir-faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^{-1}
— Savoir-faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^n
— Savoir-faire - Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure
— Savoir-faire - Retenir les opérations matricielles codant les transformations élémentaires.
— Savoir-faire - Inversibilité et inverse d'une matrice par algorithme de Gauss

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{K})$	Ensemble (espace) des matrices avec n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$		On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$	Ensemble (espace) des matrices symétrique (nécessairement carrées), resp. antisymétrique	$A^T = A$, resp. $A^T = -A$	
$GL_n(\mathbb{K})$	Groupe (linéaire) des matrices carrées d'ordre n inversible		
${}^i[A]_j$ ou $[A]_{i,j}$ ou $\text{Coeff}_{i,j}(A)$	Coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A	C'est une application linéaire	${}^i[AB]_j = \sum_{k=1}^{n} {}^i[A]_k {}^k[B]_j$
${}^tA$ ou A^T	Transposée de la matrice A	${}^i[A^T]_j = {}^j[A]_i$	Application linéaire involutive
A^n, A^{-1}	Puissance n^e de A (par récurrence). Inverse de A (si inversible)		
$\text{Tr}(A)$	Trace de A (somme des coeff. sur la diagonale)	$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} {}^i[A]_i$	$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
$(E_{i,j})_{i,j}$	Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	${}^h[E_{i,j}]_k = \delta_{i,h}\delta_{j,k}$	$E_{i,j} \times E_{h,k} = \delta_{j,h}E_{i,k}$
$P_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$	Matrice de transposition	Inversion des lignes (resp. colonnes) i et j si multiplication par la gauche (resp. la droite)	$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$
$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$	Matrice de transvection	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à gauche (resp. $C_j \rightarrow C_j + \lambda C_i$ - à droite)	$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$
$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$	Matrice de dilatation	$L_i \leftarrow \alpha L_i$ à gauche (resp. $C_i \rightarrow \alpha C_i$ - à droite)	$D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\frac{1}{\alpha})$
$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$	Matrice J_r	$\text{rg}(A) = r \iff \exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $A = P \times J_r \times Q$	

Retour sur les problèmes

25. Addition naturelle des éléments de mêmes caractéristiques (donc situés dans une même case)

26. L'interprétation en terme de graphes qui figure dans la marge donne des éléments de réponse à ce problème.

$[A]_{ij}$ est le coefficient de dépendance de la moyenne de l'élève i par rapport à la note j.
$[B]_{j,k}$ est le poids de la partie k dans la note j.
Alors $[AB]_{i,k}$ est le coefficient de dépendance de la moyenne de l'élève i par rapport aux parties k.

27. La matrice de la question n'admet aucune racine. On démontre qu'on devrait la chercher parmi les matrices triangulaires avec des zéros sur la diagonale : $a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $a^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il n'y a pas de racine.
En revanche, le même calcul montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une racine de $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui admet donc une double infinité de racines...

28. L'anneau des matrices n'est pas commutatif, les éléments ne sont pas tous inversibles ni régulier. Il y a des diviseurs de 0.
Les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices sont les λI_n.
$(AE_{i,j} = \sum_k [A]_{k,i} E_{k,j}$ et $E_{i,j} A = \sum_{\mathbb{K}} [A]_{j,k} E_{i,k} \Rightarrow [A]_{i,j} = 0$ si i $\neq j$ et $[A]_{i,i} = [A]_{j,j})$
Essentiellement (à peu de choses près...) si B commute avec A, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$...

29. Oui si A n'est pas inversibles, alors $\mathrm{Ker}(A) \neq \emptyset$. Il existe une colonne X tel que $AX = 0$.
Si $B = (X|X|\cdots|X)$ alors $AB = 0$.
Pour étudier l'inversibilité de A, on peut étudier son noyau. On peut aussi exploiter la méthode de Gauss-Jordan.

30. Voir cours.