MPSI 3 - Fermat Le 28.05.19
2018-2019

Devoir surveillé n°10
CORRECTION

Les points qui figurent en marge sont écrits à titre indicatifs, ils sont susceptibles de changer (légèrement) selon la qualité des copies.

Problème - Surprise !

Partie I. Exemples. (Incertitude d'événements et entropie de variable aléatoire)

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
   On peut modéliser ici, vu l'expérience aléatoire
   — qu'Ω est l'ensemble des 32 cartes et
   — que le tirage est telle que toutes les éventualités(=événements élémentaires) sont équiprobables. */1,5*
   $$\boxed{\mathbf{P}(A) = \frac{1}{32} \text{ et } s(A) = -\ln\frac{1}{32} = 5\ln 2}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée. On peut modéliser ici, vu l'expérience aléatoire
   — qu'$\Omega = \{P, F\}^n$ est l'ensemble des n-listes de P ou de F. Donc $\text{card}(\Omega) = 2^n$.
   — que toutes les éventualités(=événements élémentaires) sont équiprobables. */1,5*
   $$\boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2^n} \text{ et } s(B) = -\ln\frac{1}{2^n} = n\ln 2}$$
3. Si :
   — Ω' est (quasi-)certain alors $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et donc $i(\Omega') = -\ln(1) = 0$.
   — Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A})$.
   Or $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = 1$, donc $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $s(A) = \ln 2$.
   — Si A et B sont indépendants pour $\mathbf{P}$ et si $\mathbf{P}(A\cap B) \neq 0$, donc $\mathbf{P}(A\cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
   alors $s(A\cap B) = -\ln(\mathbf{P}(A\cap B)) = -\ln(\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)) = -\ln\mathbf{P}(A) - \ln\mathbf{P}(B) = s(A) + s(B)$. */1*
4. Si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants,
   alors $\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)$.
   En composant par L :
   $$s(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = -\ln\left(\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\right) = -\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A_i)\right) = -\sum_{i=1}^{n}\ln(\mathbf{P}(A_i))$$
   $$\boxed{s(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} s(A_i)}$$
   Reprise de la question 2, en notant si A_i est l'événement « avoir PILE au lancer i », */1,5*
   on a alors les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.
   Et comme $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, on a donc $s(B) = \sum_{i=1}^{n} s(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\ln(2) = n\ln 2$. */1,5*
5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$.
   Alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$, puis par décroissance de la fonction L : */1*
   $$\boxed{s(A) \geqslant s(B)}$$
6. Soit U_3, une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, que vaut $\mathbf{S}(U_3)$? On a alors $\mathbf{P}(U_3 = 1) = \mathbf{P}(U_3 = 2) = \mathbf{P}(U_3 = 3) = \frac{1}{3}$.
   Donc */1,5*
   $$\boxed{\mathbf{S}(U_3) = -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} = \ln 3}$$
7. On a, en appliquant la définition : */1*
   $$\boxed{\mathbf{S}(Z) = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\ln 2}$$

On a alors /1

$$\frac{3}{2}\ln 2 \geqslant \ln 3 \Longleftrightarrow 3\ln 2 \geqslant 2\ln 3 \Longleftrightarrow \ln 8 \geqslant \ln 9 \Longleftrightarrow \text{ FAUX}$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{S}(Z) \leqslant \mathbf{S}(U_3)}$$

Partie II. Mathématisation de la surprise

On montre que

1. Par composition, φ est continue sur $]0, +\infty]$ et sur $]-\infty, 0]$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{u\to 0} -u\ln u = 0 = \varphi(0)$. C'est un résultat du cours. /1,5

   $$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

   Puis

   $$\frac{\varphi(u)-\varphi(0)}{u-0} = \frac{-u\ln u - 0}{u-0} = -\ln u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

   /1,5

   $$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ n'est pas dérivable en } 0.\ s \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$$

2. On sait bien que pour tout $a \in]-1, +\infty[$: $\ln(1+a) \leqslant a$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.
   On a alors pour $u \in]0, 1]$, donc $a = \frac{1}{u} - 1 \in [0, +\infty[$:

   $$-\ln u = \ln\frac{1}{u} = \ln(1 + \frac{1}{u} - 1) = \ln(1+a) \leqslant a = \frac{1}{u} - 1 = \frac{1-u}{u}$$

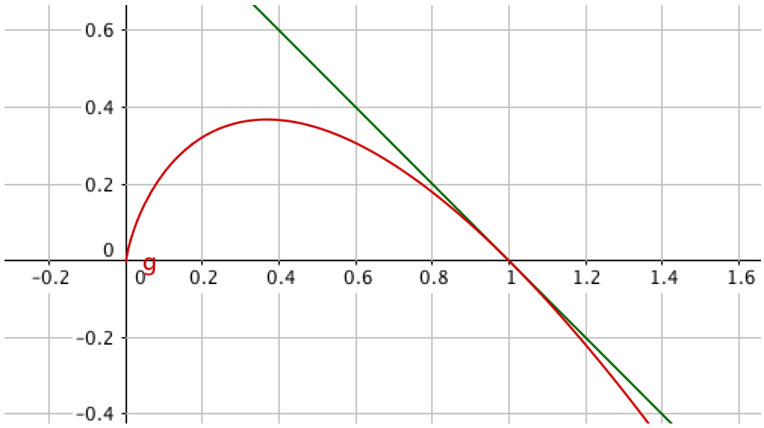
   Donc en multipliant par $u > 0$, $\forall\, u \in]0,1], \varphi(u) = -u\ln u \leqslant 1-u$.
   Puis en $u = 0$, on a $\varphi(u) = 0$ et $1 - u = 1$, donc l'inégalité reste vraie en $u = 0$. /1,5

   $$\boxed{\forall\, u \in [0,1], \varphi(u) = -u\ln u \leqslant 1-u \qquad (\mathcal{I}_1)}$$

   Enfin, il y a égalité si et seulement $0 = a = \frac{1}{u} - 1$ donc /1

   $$\boxed{\text{avec égalité si et seulement si } u = 1.}$$

3. On a la représentation suivante : /2



4. On considère ψ qui vérifie $(*)$.
   (a) • Si A est certain, la surprise qui nait de sa réalisation est nulle : $f(\mathbf{P}(A)) = f(1) = 0$. C'est la condition (i).
   • Plus A est improbable, plus la surprise de sa réalisation est forte : f est décroissante. C'est la condition (ii).
   • Si A et B sont indépendants, alors la surprise qui nait de la réalisation des deux événements est la somme de chacune des surprises de réalisation : $f(\mathbf{P}(A\cap B)) = f(\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = f(\mathbf{P}(A)) + f(\mathbf{P}(B)$. C'est la condition (iii).
   • La continuité de f est une condition naturelle (physique) que l'on peut espérer. C'est la condition (iv). /2

Remarques !

On parle parfois plutôt de la quantité d'information que de la quantité de surprise ici.
Mais l'avantage de parler de la surprise est que le mot surprise commence par un S, comme le mot entropie...

(b) Soit $p \in]0,1]$ et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{p}t$, bijective et dérivable.
On fait le changement de variables $u = \varphi(t)$ dans le calcul intégrale suivant

$$\frac{1}{p}\int_{p/2}^{p} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{1} \psi(pu)\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{1} \psi(p)\mathrm{d}u + \int_{1/2}^{1} \psi(u)\mathrm{d}u$$

car ψ vérifie le point (iii) et en exploitant la linéarité de l'intégration. Puis comme $\psi(p)$ est une constante : /2

$$\boxed{\forall\, p \in]0,1], \qquad \frac{1}{p}\int_{p/2}^{p} \psi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\psi(p) + \int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q}$$

(c) ψ vérifie (iv), donc ψ admet des primitives, notons Ψ l'une d'elles.

$$\forall\, p \in]0,1], \qquad \psi(p) = \frac{2}{p}\left(\Psi(p) - \Psi\left(\frac{p}{2}\right)\right) - 2\int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q$$

Or Ψ et $p \mapsto \frac{1}{p}$ sont dérivables sur $]0,1]$; à part elles, il n'y a que des constantes. /1

$$\boxed{\psi \text{ est dérivable sur }]0,1]}$$

Et en dérivant $p \mapsto p\psi(p) = 2\left(\Psi(p) - \Psi(\frac{p}{2})\right) - 2p\int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q$, on a la relation :

$$\forall\, p \in]0,1], \qquad p\psi'(p) + \psi(p) = 2\Psi'(p) - \Psi'\left(\frac{p}{2}\right) - 2\int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q$$

Donc comme $\Psi' = \psi$, en divisant par 2 :

$$\forall\, p \in]0,1], \qquad \frac{1}{2}p\psi'(p) + \int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q = \psi(p) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi(p) = -\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

car ψ vérifie la relation (iii). /2

$$\boxed{\forall\, p \in]0,1], \qquad -\frac{a}{2} = \frac{1}{2}p\psi'(p) + \int_{1/2}^{1} \psi(q)\mathrm{d}q \text{ avec } a = \psi\left(\frac{1}{2}\right)}$$

(d) Il existe donc une constante C (indépendante de p) telle que pour $p \in]0,1]$, $p\psi'(p) = C$.
Cela peut d'intégrer en $\psi : p \mapsto C\ln p + D$.
Or $\psi(1) = D = 0$, d'après le point 1. /1,5

$$\boxed{\text{il existe } \alpha = -C > 0 \text{ (pour que } \psi \text{ vérifie } (ii)) \text{ telle que } \psi : x \mapsto \alpha L(x)}$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \psi(x) = -(-\infty) = +\infty$. /1

$$\boxed{\text{Il serait infiniment surprenant de réaliser un événement de négligeable (de probabilité nulle)}}$$

III. Entropie des variables aléatoires discrètes d'univers image fini

1. Il faut changer de variable aléatoire. On réfléchit sur la partition $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n}[X = x_i]$

   Il faut donner la même valeur $L(p_i)$ à tous les $\omega \in [X = x_i]$. On note $Z : \omega \mapsto \sum_{i=1}^{n} L(p_i)\mathbf{1}_{[X=x_i]}$.
   On a alors : /2,5

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z) &= \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n} L(p_i)\mathbf{1}_{[X=x_i]}(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\omega\ |\ X(\omega)=x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} L(p_i)\mathbf{1}_{[X=x_i]}(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\omega\ |\ X(\omega)=x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} L(p_i)\mathbf{1}_{[X=x_i]}(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\omega\ |\ X(\omega)=x_k}\left(0 + 0 + \cdots + \underbrace{L(p_k)}_{i=k}\mathbf{P}(\{\omega\}) + 0 + \cdots + 0\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(L(p_k)\sum_{\omega\ |\ X(\omega)=x_k}\mathbf{P}(\{\omega\})\right) = \sum_{k=1}^{n} L(p_k)\mathbf{P}(X = x_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k\ln(p_k)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc avec } Z = \sum_{i=1}^{n} L(p_i)\mathbf{1}_{[X=x_i]}\text{, on } \mathbf{S}(X) = \mathbf{E}(Z)}$$

/1

$\boxed{\text{En fait } S \text{ est la valeur moyenne (pondérées par les probabilités) de la surprise associée à la variable aléatoire } X}$

2. On applique n fois l'inégalité : $-p_i \ln(p_i) \geqslant 0$.
   On additionne : $-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \geqslant 0$, donc $\mathbf{S}(X) \geqslant 0$.
   Et on a égalité si et seulement si $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $-p_i \ln(p_i) = 0$ i.e. $p_i \in \{0, 1\}$.
   Or $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, donc cela est équivalent à $\exists\, i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $p_{i_0} = 1$ et $p_j = 0$ si $j \neq i_0$.
   Donc /1,5

$$\boxed{\mathbf{S}(X) \geqslant 0 \text{ et } \mathbf{S}(X) = 0 \text{ si et seulement si } X \text{ est une variable aléatoire certaine.}}$$

3. Soit n un entier non nul et U_n la variable uniforme sur $\mathbb{N}_n$.
   (a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\mathbf{P}(U_n = k) = \frac{1}{n}$.
   Donc /1

$$\boxed{\mathbf{S}(U_n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = \ln n}$$

   (b) On a pour cette loi uniforme : /1

$$\boxed{\mathbf{V}(U_n) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}}$$

   Donc /1

$$\ln\left(12\mathbf{V}(U_n) + 1\right) = \ln\big((n^2 - 1) + 1\big) = \ln(n^2) = 2\ln n$$

$$\boxed{\mathbf{S}(U_n) = \frac{1}{2}\ln(12\mathbf{V}(U_n) + 1)}$$

   (c) Comme l'application $u \mapsto \frac{1}{2}\ln(12u + 1)$ est croissante, par composition de fonctions croissantes, /1

$$\boxed{\text{l'entropie et la variance de variables uniformes sont simultanément croissantes.}}$$

4. On applique n fois l'inégalité $(\mathcal{I}_1)$ en $u = np_i$: $-(np_i)\ln(np_i) \leqslant 1 - npi$.
   On additionne :

$$-\sum_{i=1}^{n} np_i \ln(np_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} n1 - \sum_{i=1}^{n} np_i = n - n \times 1 = 0$$

   Or /1

$$-\sum_{i=1}^{n} np_i \ln(np_i) = -n\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) - n\sum_{i=1}^{n} p_i \ln n = n\mathbf{S}(X) - n\ln(n)\sum_{i=1}^{n} np_i = n\left(\mathbf{S}(X) - \mathbf{S}(U_n)\right)$$

   Par ailleurs, l'égalité est assurée si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $np_i = 1$, i.e. $p_i = \frac{1}{n}$,
   c'est à-dire, si et seulement si $X = U_n$ /1

$$\boxed{\text{Bilan : } \mathbf{S}(X) \leqslant \mathbf{S}(U_n) \text{ avec égalité ssi } X = U_n}$$

   On a montré que parmi les variables aléatoires finie X, la loi uniforme U_n réalise le maximum de l'entropie.

Remarques !

Comme en réalité, $\mathbf{S}(X)$ ne dépend pas des valeurs prises par X, mais seulement des probabilités des événements à considérer, toute variable aléatoire tel que card$\big(X(\Omega)\big) = n$ et $\forall\, x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{n}$

Partie IV. Entropie, distribution de Boltzman et loi normale

1. On a les équivalences suivantes

$$\overrightarrow{p} \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{6} p_i & = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6} i p_i & = E \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{i=1}^{6} p_i & = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{6} (i-1) p_i & = E-1 \end{array} \right. \Bigg| \; L_2 - L_1$$

Le système est échelonné, il est donc de rang égal à 2, il y a $6-2=4$ variables libres.
On prend comme paramètre/variables libres les nombres p_3, p_4, p_5 et p_6.
On a alors

$$\overrightarrow{p} \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} p_1 + p_2 & = & 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6 \\ p_2 & = & E - 1 - 2p_3 - 3p_4 - 4p_5 - 5p_6 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcccccc} p_1 & = & = (2-E) & +p_3 & +2p_4+ & 3p_5 & +4p_6 \\ p_2 & = & E & -2p_3 & -3p_4 & -4p_5 & -5p_6 \end{array} \right. \Bigg| \; L_1 - L_2$$

/2

$$\boxed{\text{Avec } a_{i,j} = (-1)^{i+1}(j+i-3) \text{ et } \alpha_1 = 2-E \text{ et } \alpha_2 = E, \text{ on a } p_i = \alpha_i + \sum_{j=3}^{6} a_{i,j} p_j}$$

Et il y a évidemment équivalence entre cette écriture et le fait d'être dans $\mathcal{A}$. /1,5

> Donc $\mathcal{A}$ est un espace affine de dimension 4 ; c'est l'espace de direction $\text{vect}\big((1,-2,1,0,0,0),(2,-3,0,1,0,0),(3,-4,0,0,1,0),(4,-5,0,0,0,1)\big)$ et passant par le point $(2-E, E, 0, 0, 0, 0)$

2. Il s'agit donc de faire des dérivées partielles, par composition :

$$\forall\, j \in [\![3,6]\!], \quad \frac{\partial f}{\partial p_j}(\overrightarrow{p}) = -a_{1,j}\ln p_1 - p_1 \frac{a_{1,j}}{p_1} - a_{2,j}\ln p_2 - p_2\frac{a_{2,j}}{p_2} - \ln p_j - p_j \frac{1}{p_j}$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } j \geqslant [\![3,6]\!],\ -\frac{\partial f}{\partial p_j}(\overrightarrow{p}) = \ln p_j + 1 + a_{1,j}(\ln p_1 + 1) + a_{2,j}(\ln p_2 + 1)}$$

3. En se plaçant en $\overrightarrow{p}^*$ et en remplaçant les nombres $a_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \ln p_j^* &= -1 - \alpha_{1,j}(\ln p_1^* + 1) - \alpha_{2,j}(\ln p_2^* + 1) = -1 - (j-2)(\ln p_1^* + 1) + (j-1)(\ln p_2^* + 1) \\ &= j(\ln p_2^* - \ln p_1^*) + (2\ln p_1^* - \ln p_2^*) \end{aligned}$$

Donc en notant $A = \ln p_2^* - \ln p_1^* = \ln \frac{p_2^*}{p_1^*}$ et $B = 2\ln p_1^* - \ln p_2^* = \ln \frac{(p_1^*)^2}{p_2^*}$, on a

$$\forall\, j[\![3,6]\!], \quad p_j^* = \exp(Aj + B)$$

Et pour $j=1$: $Aj + B = A + B = \ln p_1^*$ et pour $j = 2$; $Aj + B = 2A + B = \ln p_2^*$ /2

$$\boxed{\text{Donc avec } A = \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} \text{ et } B = \ln \frac{(p_1^*)^2}{p_2^*}, \text{ on a pour tout } j \in [\![1,6]\!],\ p_j = \exp(Aj+B).}$$

4. Sachant que $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} p_i = 1 = e^{A+B}\frac{1-e^{6A}}{1-e^A}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} i p_i = E = e^{A+B}\frac{1-7e^{6A}+6e^{7A}}{(1-e^A)^2}$
(dérivée de la somme géométrique) (...)
on trouve des valeurs numériques (fonction de E) des constantes A et B. /2

> Par ailleurs, la distribution de probabilité obtenue : $p_T = Ke^{-\lambda T}$ (avec $\lambda = -A > 0$ et $K = e^B$) suit la même loi, de Boltzmann, que celle vue en thermodynamique de distribution des particules selon les niveaux d'energies propres, connaissant l'énergie moyenne (obtenue marcroscopique). C'est la distribution la plus légitime compte-tenu de nos informations.

5. On considère un nouveau problème.
On applique la même méthode, on trouve avec le même calcul : /2

$$\exists\ A, B, C \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\ i \in [\![-n, n]\!] \quad p_i = \exp(A + Bi + Ci^2)$$

Puis l'espérance étant nul : $B = 0$ Finalement $p_i = K\exp(-ci^2)$ car $C < 0$ (ici $c = -C$ et $K = e^A$.

$\boxed{p_i = K\exp(-ci^2)}$ - discrétisation de la loi normale.

Partie V. Entropie de couples de var

1. Propriétés

   (a) On suit le conseil de l'énoncé. On note $p_{x,y} = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$ et $p'_{x,y} = \mathbf{P}(X' = x, Y' = y)$.
   On a alors :

$$-\sum_{x\in X(\Omega)=X'(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)=Y'(\Omega)} \mathbf{P}(X = x, Y = y)\left(-\frac{\mathbf{P}(X' = x, Y' = y)}{\mathbf{P}(X = x, Y = y)} + 1\right)$$

$$= -\sum_{x\in X(\Omega)=X'(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)=Y'(\Omega)} p_{x,y}\left(-\frac{p'x,y}{p_{x,y}} + 1\right) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} (p'_{x,y} - p_{x,y})$$

$$= \sum_{\substack{x \in X'(\Omega)\\ y \in Y'(\Omega)}} p'_{x,y} - \sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ y \in Y(\Omega)}} p_{x,y} = 1 - 1 = 0$$

   Donc, par factorisation /2

$$\boxed{K(X,Y,X',Y') = -\sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} \mathbf{P}(X = x, Y = y)\left(\ln\frac{\mathbf{P}(X' = x, Y' = y)}{\mathbf{P}(X = x, Y = y)} - \frac{\mathbf{P}(X' = x, Y' = y)}{\mathbf{P}(X = x, Y = y)} + 1\right)}$$

   (b) L'inégalité $(\mathcal{I}_1)$ affirme que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $-u\ln u \leqslant 1 - u$.
   Si $u > 0$, on a alors $-\ln u \leqslant \frac{1}{u} - 1 \iff -\ln\frac{1}{u} = \ln u \geqslant 1 - \frac{1}{u} \iff \ln\frac{1}{u} - \frac{1}{u} + 1 \leqslant 0$.
   En prenant $u_{x,y} = \dfrac{p_{x,y}}{p'_{x,y}} \in \mathbb{R}_+^*$, on alors

$$\left(\ln\frac{p'_{x,y}}{p_{x,y}} - \frac{p'_{x,y}}{p_{x,y}} + 1\right) \leqslant 0$$

   Puis, comme $p_{x,y} > 0$ /2

$$-K(X,Y,X',Y') \leqslant 0 \iff K(X,Y,X',Y') \geqslant 0$$

   L'égalité a alors lieu, si et seulement si chacun des termes additionnés est nul,
   i.e. ssi pour tout $u = \dfrac{p_{x,y}}{p'_{x,y}}$, $\ln\frac{1}{u} - \frac{1}{u} + 1 = 0 \leqslant u = 1$ (d'après $(\mathcal{I}_1)$).
   Ainsi on a l'égalité si et seulement si $\forall\ (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega) = X'(\Omega)\times Y'(\Omega)$, $p_{x,y} = p'_{x,y}$.
   /1

$$\boxed{K(X,Y,X',Y') \geqslant 0 \text{ avec égalité ssi } (X,Y) \text{ et } (X',Y') \text{ ont la même loi conjointe.}}$$

   (c) On suppose que
   — X' et X suivent le même loi,
   — Y' et Y suivent le même loi,
   — X' et Y' sont indépendantes.

$$\begin{aligned}
K(X,Y,X',Y') &= -\sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} \mathbf{P}(X = x, Y = y)\ln\frac{\mathbf{P}(X' = x, Y' = y)}{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}\\
&= -\sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} p_{x,y}\ln\mathbf{P}(X' = x, Y' = y) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega)\\ y \in Y(\Omega)}} p_{x,y}\ln(p_{x,y})\\
&= -\sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} p_{x,y}\ln[\mathbf{P}(X' = x)\mathbf{P}(Y' = y)] - \mathbf{S}(X,Y)\\
&= -\sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} p_{x,y}\ln[\mathbf{P}(X' = x)] - \sum_{\substack{x \in X(\Omega) = X'(\Omega)\\ y \in Y(\Omega) = Y'(\Omega)}} p_{x,y}\ln[\mathbf{P}(Y' = y)] - \mathbf{S}(X,Y)\\
&= -\sum_{x\in X(\Omega)=X'(\Omega)} \ln(\mathbf{P}(X' = x)) \sum_{y\in Y(\Omega)=Y'(\Omega)} p_{x,y} - \sum_{y\in Y(\Omega)=Y'(\Omega)} \ln(\mathbf{P}(Y' = y)) \sum_{x\in X(\Omega)=X'(\Omega)} p_{x,y}\\
&\quad - \mathbf{S}(X,Y)\\
&= -\sum_{x\in X(\Omega)=X'(\Omega)} \ln(\mathbf{P}(X' = x))\mathbf{P}(X = x) - \sum_{y\in Y(\Omega)=Y'(\Omega)} \ln(\mathbf{P}(Y' = y))\mathbf{P}(Y = y) - \mathbf{S}(X,Y)
\end{aligned}$$

   Enfin, comme X et X' ont même loi : $\ln(\mathbf{P}(X' = x)) = \ln(\mathbf{P}(X = x))$.
   De même pour Y et Y'. /2

$$\boxed{\text{Ainsi, sous les conditions de l'énoncé : } K(X,Y,X',Y') = \mathbf{S}(X) + \mathbf{S}(Y) - \mathbf{S}(X,Y).}$$

(d) Quelques remarques au préalable ici :

A la premiére lecture...

Cela semble simple, mais la condition recherchée $\mathbf{S}(X,Y) \leqslant \mathbf{S}(X) + \mathbf{S}(Y)$ ne repose sur aucun couple (X',Y').
L'enjeu principal de cette question est donc de montrer que si X et Y sont données, il est possible de trouver (X',Y') vérifiant exactement les hypothèses des questions précédentes :
— *X' et X suivent le même loi (et donc $X(\Omega) = X'(\Omega)$),*
— *Y' et Y suivent le même loi (et donc $Y(\Omega) = Y'(\Omega)$),*
— *X' et Y' sont indépendantes.*

Soient X, Y deux variables aléatoires finies.
On considère X', Y', telle que : /2
— $X'(\Omega) = X(\Omega)$
— $Y'(\Omega) = Y(\Omega)$
— $\forall\ (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbf{P}((X',Y') = (x,y)) = \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y)$.
Alors /1

$$\mathbf{P}(X'=x) = \sum_{y\in Y'(\Omega)} p'_{x,y} = \sum_{y\in Y'(\Omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y) = \mathbf{P}(X=x) \sum_{y\in Y'(\Omega)} \mathbf{P}(Y=y) = \mathbf{P}(X=x)$$

De même /1

$$\mathbf{P}(Y'=y) = \sum_{x\in X'(\Omega)} p'_{x,y} = \sum_{x\in X'(\Omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y) = \mathbf{P}(Y=y) \sum_{x\in X'(\Omega)} \mathbf{P}(X=x) = \mathbf{P}(Y=y)$$

Donc :
— X et X' ont la même loi
— Y et Y' ont la même loi
— X' et Y' sont indépendantes
On a alors d'après les questions précédentes :

$$\mathbf{S}(X) + \mathbf{S}(Y) - \mathbf{S}(X,Y) = K(X,Y,X',Y') \geqslant 0$$

Il y a alors égalité ssi (X,Y) et (X',Y') ont même loi conjointe.
Or cela donne : X et Y sont indépendantes (X a même loi que X' et Y que Y').
La réciproque se vérifie aisément : si X et Y sont indépendantes, $\mathbf{S}(X,Y) = \mathbf{S}(X)+\mathbf{S}(Y)$.
Donc /2

$$\boxed{\mathbf{S}(X,Y) \leqslant \mathbf{S}(X) + \mathbf{S}(Y) \text{ avec égalité si et seulement si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$$

2. Entropie conditionnelle.
On définit l'entropie conditionnelle de Y sachant X par $\mathbf{S}_X(Y) = \mathbf{S}(X,Y) - \mathbf{S}(X)$.
Elle mesure l'incertitude restant sur la valeur de Y lorsque la valeur de X est connue.

(a) On a vu que dans tous les cas $\mathbf{S}(X,Y) \leqslant \mathbf{S}(X) + \mathbf{S}(Y)$. Donc /1

$$\boxed{\mathbf{S}_X(Y) = \mathbf{S}(X,Y) - \mathbf{S}(X) \leqslant \mathbf{S}(Y)}$$

La connaissance de X diminue l'espérance de la surprise de réalisation de Y.

(b) On considère $m+1$ réels $a_0, a_1, \dots a_m \in [0,1]$.

i. $\ln\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) - \ln(a_j) = \ln\left(1 + \sum_{k\neq j} \frac{a_k}{a_j}\right) \geqslant \ln(1) = 0$

car $\sum_{k\neq j} \frac{a_k}{a_j} \geqslant 0$ et que ln est croissante. /1

$$\boxed{\forall\ j \in [\![0,m]\!], \qquad \ln(a_j) \leqslant \ln(\sum_{k=0}^{m} a_k)}$$

Donc, comme $a_j > 0$

$$-\sum_{j=0}^{m} \varphi(a_j) = \sum_{j=0}^{m} a_j \ln(a_j) \leqslant \sum_{j=0}^{m} a_j \ln\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k \times \ln\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right) = -\varphi\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)$$

Ainsi /1,5

$$\boxed{\sum_{j=0}^{m} \varphi(a_j) \geqslant \varphi\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right) \qquad (\mathcal{I}_2)}$$

ii. Si l'un des $a_i = 0$, notons le a_h

alors comme $\varphi(a_h) = 0$, on trouve $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \varphi(a_j) = \sum_{i\neq h} \varphi(a_j)$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_j = \sum_{i\neq h} a_j$.

On trouve donc le cas précédent, mais avec $m-1$ nombres,

donc cela fonctionne également, tant que $m > 1$.

Puis pour $m = 1$ et $a_0 = 0$, on trouve : $\varphi(a_0)(=0) \geqslant \varphi(a_0)$ /1,5

$$\boxed{\text{Donc l'inégalité } (\mathcal{I}_2) \text{ reste vraie si } (a_1, \dots a_m) \in [0,1]^{m+1}.}$$

iii. Pour que $(\mathcal{I}_2)$ soit une égalité, il faut que les inégalités exploitées soient elles-mêmes des égalités.

Il faut donc que pour tout j, $\displaystyle\sum_{k\neq j} \frac{a_k}{a_j} = 0$.

Comme c'est une somme de termes positifs, il faut que $\forall\, j$, $\forall\, k \neq j$, $a_k = 0$.

Or s'il existe deux indices, $j \neq k$ tel que $a_j \neq 0$ et $a_k \neq 0$,

on ne peut donc pas avoir une égalité dans $(\mathcal{I}_2)$. /1

Réciproquement si pour tout $i \neq h$, $a_i = 0$, alors on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \varphi(a_j) = \varphi(a_h) = \varphi\left(\sum_{j=0}^{m} a_j\right)$.

(A noter que a_j peut être également nul). /1

$$\boxed{\text{Donc } (\mathcal{I}_2) \text{ est une égalité si et seulement s'il existe au plus un indice } j \in [\![0,m]\!] \text{ pour lequel } a_j \neq 0}$$

(c) On exploite l'inégalité $(\mathcal{I}_2)$ pour $a_j = p_{x,y}$:

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(p_{x,y}) \geqslant \varphi\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} p_{x,y}\right) = \varphi\left(\mathbf{P}(X=x)\right)$$

Donc /1,5

$$\boxed{\forall\, x \in X(\Omega),\ \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi\big(\mathbf{P}(X=x, Y=y)\big) \geqslant \varphi\big(\mathbf{P}(X=x)\big)}$$

En sommant l'inégalité précédente sur $x \in X(\Omega)$:

$$\mathbf{S}(X,Y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi\big(\mathbf{P}(X=x, Y=y)\big) \geqslant \sum_{x\in X(\Omega)} \varphi\big(\mathbf{P}(X=x)\big) = \mathbf{S}(X)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } \mathbf{S}_X(Y) = \mathbf{S}(X,Y) - \mathbf{S}(X) \geqslant 0.}$$