CONCOURS BLANC
CORRECTION

Problème

Préliminaires

Si P et Q sont deux polynômes qui définissent la même fonction polynomiale de $[-1,1]$: $\forall\, x \in [-1,1]$, $P(x) = Q(x)$, alors comme l'ensemble $I = [-1,1]$, possède un nombre infini d'éléments, $P - Q$ admet une infinité de racines.
Donc $P - Q$ est le polynôme nul (il ne peut pas admettre strictement plus de n racines sans être nul), donc $P = Q$.
Ainsi l'égalité des fonctions polynomiales sur $[-1,1]$ entraîne l'égalité des polynômes.
La réciproque est évidente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut faire l'identification de $\mathbb{R}_n[X]$ et E_n.

I - Polynômes de Tchebychev

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité
   (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta (i)^k \sin^k\theta\right)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta(-1)^p\sin^{2p}\theta \qquad \text{avec } (k=2p)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta(-1)^p(1-\cos^2(\theta))^p\end{aligned}$$

Donc, avec $T_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}(-1)^p X^{n-2p}(1-X^2)^p$, on a $\forall\,\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)) = \cos(n\theta)$

   (b) Si R vérifie la même relation, alors pour tout $x \in [-1,1]$, on prend $y = \arccos x \in\ [0,\pi]$:

$$(T-R)(x) = T(\cos y) - R(\cos y) = \cos(ny) - \cos(ny) = 0$$

Donc $T - R$ admet une infinité de racines donc $T = R$.

Le polynôme vérifiant $(\star)$ est unique

2. Relation de récurrence
   (a) Soit $x \in [-1,1]$ et $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(T_{n+2}+T_n)(x) &= T_{n+2}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta) = \cos(n+2)\theta + \cos n\theta = \cos(n+1+1)\theta + \cos(n+1-1)\theta\\ &= 2\cos\theta\cos n\theta = 2xT_n(x)\end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier n, $T_{n+2} + T_n - 2XT_n$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Remarques !
On pouvait aussi conclure en disant que les fonctions polynomiales de E_{n+2}, $T_{n+2}+T_n$ et $x \mapsto 2xT_{n+1}$ coïncident si bien que l'identification prouvée dans la partie préliminaire permet de conclure à l'égalité des polynômes.

(b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(0\theta) = 1$, donc $T_0 = 1$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \cos\theta$, donc $T_1 = X$.
Puis, avec la formule trouvée précédemment :

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1 \qquad T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$$

$$\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1,\ T_3 = 4X^3 - 3X}$$

(c) Par récurrence (à deux termes).
On considère $\mathcal{H}_n$: « $\deg T_n = n$ et $[T_n]_n = 2^n$. »
⋆ $\mathcal{H}_0$ est vraie.
⋆ $\mathcal{H}_1$ est vraie.
⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies.
Alors $\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n)$.
Or $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = 1 + (n+1) = n+2$ d'après $\mathcal{H}_{n+1}$,
et $\deg(-T_n) = \deg(T_n) = n$ d'après $\mathcal{H}_n$.
Donc $\deg T_{n+2} = n+2$ et par linéarité :

$$[T_{n+2}]_{n+2} = [2XT_{n+1}]_{n+2} - [T_n]_{n+2} = 2 \times 1 \times [T_{n+1}]_{n+1} + 0 = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

d'après $\mathcal{H}_n$ puis $\mathcal{H}_{n+1}$.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Le coefficient dominant de } T_n \text{ est donc } 2^n X^n}$$

3. Racines et extrema.

(a) On considère donc, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$.
Il s'agit de n nombres distincts de $[0, \pi]$ or $\cos_{|[0,\pi]}$ est injective, donc $(\cos\theta_k)_{k\in\{1,\dots n\}}$ est une famille de n nombres distincts. De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $T_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.
Les nombres $(\cos\theta_k)_{1\leq k\leq n}$ sont n racines deux à deux distinctes de T_n or le degré de T_n est n donc
⋆ ce sont LES n racines (distinctes) de T_n (il n'y en a pas d'autres !),
⋆ elles sont toutes simples.
Connaissant de plus la valeur du coefficient dominant de T_n, on en déduit la factorisation $T_n(x) = \lambda_n \prod_{k=1}^{n} (x - \cos\theta_k)$
où λ_n est le coefficient dominant de T_n.

$$\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - \cos\theta_k)}$$

(b) Pour tout $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, donc $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$.
Puis pour tout $k \in \{0, 1, \dots n\}$,

$$T_n(c_k) = \cos(n\frac{k\pi}{n}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Ce qui permet d'affirmer :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\},\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty = 1 \text{ et pour tout } k \in \{1, \dots, n\},\ T_n(c_k) = -T_n(c_{k-1}) \big(= (-1)^k \big)}$$

(c)

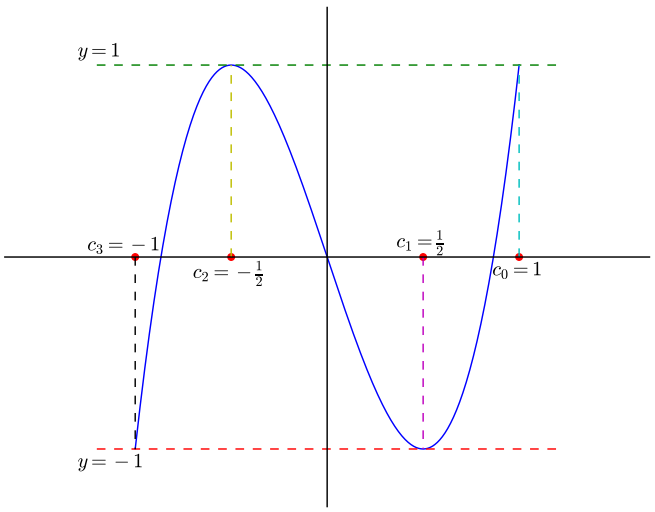

FIG 1 : Graphe sur $[-1, 1]$ de $T_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$ et points de Tchebychev c_0, c_1, c_2 et c_3.

II - Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Pour tout élément $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

1. ⋆ Pour tout $(f,g) \in E^2$, $\theta \mapsto f(\cos\theta)g(\cos\theta)$ est continue sur $[0,\pi]$ donc $\langle f, g\rangle$ est bien défini et est un réel.
   ⋆ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique par commutativité du produit dans l'espace des fonctions continues sur $[0,\pi]$.
   ⋆ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire en son premier argument par distributivité du produit sur l'addition dans l'anneau des fonctions continues sur $[0,\pi]$ et par linéarité de l'intégrale. Par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on en déduit la linéarité par rapport au deuxième argument d'où la bilinéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
   ⋆ Pour tout $f \in E$, $\langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^\pi (f(\cos\theta))^2\mathrm{d}\theta \geq 0$ par positivité de l'intégrale donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.
   ⋆ Soit $f \in E$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^\pi (f(\cos\theta))^2\mathrm{d}\theta = 0$ donc $\theta \mapsto (f(\cos\theta))^2$ est une fonction continue sur $[0,\pi]$, positive ou nulle sur $[0,\pi]$ et d'intégrale nulle sur $[0,\pi]$ donc identiquement nulle sur $[0,\pi]$: $\forall\theta \in [0,\pi]$, $(f(\cos\theta))^2 = 0$.
   Puisque $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, $\forall x \in [-1,1]$, $(f(x))^2 = 0$ si bien que f est identiquement nulle sur $[-1,1]$.
   Par conséquent, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$$

2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos(n\theta+m\theta)+\cos(n\theta-m\theta)\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

   ⋆ Si $m = n = 0$,

$$\langle T_0, T_0\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+1)\mathrm{d}\theta = \pi$$

   ⋆ Si $m = n \geq 1$,

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2n\theta)+1)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2n\theta)}{2n}+\theta\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

   ⋆ Si $m \neq n$,

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m}+\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Ainsi, } \langle T_0, T_0\rangle = \pi \text{ et pour tout } (m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \langle T_n, T_m\rangle = \delta_{m,n}\frac{\pi}{2}.}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La famille $(T_0, T_1, \dots T_n)$ est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux et tous non nuls (par définition des T_i pour $i \in \mathbb{N}$) donc c'est une famille libre.
   De plus, pour tout $i \in \{0,1,\dots,n\}$, T_i est de degré i (I-2(c)) donc $T_i \in E_n$ donc $(T_0, T_1, \dots T_n)$ est une famille libre de cardinal $n+1$ dans E_n qui est un espace de dimension $n+1$ donc

   $$\boxed{\text{la famille } (T_0, T_1, \dots T_n) \text{ et une base orthogonale de } E_n.}$$

Dans toute la suite de cette partie, f désigne un élément de E, n un entier naturel et $d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\}$.

3. (a) *Version 1.* Il s'agit du théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
   E_n est de dimension finie. On note p, la projection orthogonale sur E_n.
   (p existe bien, on peut le construire à partir d'une base orthonormée).
   On a alors :

   $$\boxed{\exists\, !t_n(f) \in E_n \text{ tel que } \|f - t_n(f)\| = d_2(f, E_n). \text{ Il s'agit de } t_n(f) = p(f)}$$

   Version 2.
   Soit E_n un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien réel $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Alors, pour tout vecteur f de E, la distance de f à E_n, définie par $d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\}$,
   ⋆ est un plus petit élément,
   ⋆ est atteinte pour un unique vecteur Q de E_n, il s'agit du projecté orthogonal de f sur E_n.

   $$\boxed{\text{Ainsi, } \exists\, !t_n(f) \in E_n \text{ tel que } \|f - t_n(f)\| = d_2(f, E_n) \text{ et } t_n(f) = p^{\perp}_{E_n}(f).}$$

(b) La famille $(T_0, T_1, \dots T_n)$ est une base orthogonale de E_n (question II-2) donc $\left(\frac{T_0}{\|T_0\|_2}, \frac{T_1}{\|T_1\|_2}, \dots \frac{T_n}{\|T_n\|_2}\right)$ est une base orthonomée de E_n.
Donc pour tout $f \in E_n$,

$$t_n(f) = p(f) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle f, \frac{T_k}{\|T_k\|_2} \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle}{\|T_k\|_2^2} T_k$$

Enfin, comme $\|T_0\|^2 = \pi$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\|T_k\|_2^2 = \langle T_k, T_k\rangle = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\boxed{\forall\ f \in E, \quad t_n(f) = \frac{\langle f, T_0\rangle}{\pi} T_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \langle f, T_n\rangle T_n}$$

4. D'après la question II-3(a), $d_2(f, E_n)^2 = \|f - t_n(f)\|_2^2$. Or t_n est un projecteur orthogonal, donc $t_n(f)$ et $f - t_n(f)$ sont orthogonaux, donc on peut appliquer le théorème de Pythagore : $\|f - t_n(f)\|^2 + \|t_n(f)\|^2 = \|f\|^2$ si bien que

$$\|f - t_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|t_n(f)\|_2^2$$

Enfin, en reprenant l'expression de $t_n(f)$ établie à la question précédente et en utilisant l'espression de la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans une base orthonormale, $\|t_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}$, d'où,

$$\boxed{d_2(f, E_n) = \sqrt{{\|f\|_2}^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}}}$$

5. (a) La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}$ est une série à termes positifs.
Pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de démontrer qu'elle est majorée.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, (on élève au carré la relation précédente) :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2} = {\|f\|_2}^2 - (d_2(f, E_n))^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

$$\boxed{\text{Donc la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2} \text{ est convergente.}}$$

(b) La convergence de la série précédente implique que son terme général converge vers 0 donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle f, T_n\rangle}{\|T_n\|_2} = 0$.
Or pour $n \geq 1$, $\|T_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc $\langle f, T_n\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\langle f, T_n\rangle}{\|T_n\|_2}$ tend également vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} \langle f, T_n\rangle = 0$.
Par ailleurs,

$$\langle f, T_n\rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta) T_n(\cos\theta) \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\boxed{\text{donc } \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta = 0}$$

6. (a) Soit $h \in E$,

$$\forall\ x \in [-1,1], h(x) \leqslant \|h\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad \forall\ \theta \in [0,\pi], h^2(\cos\theta) \leqslant \|h\|_\infty^2$$

On intègre, l'inégalité est conservée :

$$\|h\|_2^2 = \langle h, h\rangle = \int_0^\pi h^2(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^\pi \|h\|_\infty^2 \mathrm{d}\theta = \pi\|h\|_\infty^2$$

En prenant la racine carrée (tous les nombres sont positifs) :

$$\boxed{\text{Pour tout élément } h \text{ de } E,\ \|h\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\|h\|_\infty.}$$

(b) On admet : $\forall\ f \in E, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ T \in \mathbb{R}[X] \mid \forall\ x \in [-1,1],\ |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ i.e.$\|f - T\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$
Notons $N = \deg(T)$. Pour tout $n \geqslant N$, $T \in E_N \subset E_n$; donc :

$$\|f - t_n(f)\|_2 = d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\} \leqslant \underbrace{\|f - T\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\|f - T\|_\infty}_{\text{quest. II-6(a) pour } h = f - T \in E} \leqslant \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0}$$

7. (a) On sait que $d_2(f,E_n)=\sqrt{\|f\|_2{}^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}=\underbrace{\underbrace{d_2(f,E_n)^2}_{\text{tend vers 0 (quest. précèd.)}}+\|f\|_2^2}_{\text{converge vers } \|f\|_2^2 \text{ par comb. lin. de suites cv.}}$$

donc, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut $\|f\|_2^2$. Par ailleurs cette suite est la suite des sommes partielle d'une série convergente (quest. II-5(a)) !) donc sa limite est aussi représentée par $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}$ (somme de la série). Par unicité de la limite d'une suite convergente, on obtient après avoir pris la racine carrée,

$$\boxed{\|f\|_2=\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle f,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}}}$$

(b) Soit h de E telle que pour tout entier naturel n, $\int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0$.

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\langle h,T_n\rangle=0$ et donc $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\langle h,T_k\rangle^2}{\|T_k\|_2{}^2}=0$. Donc $\|h\|_2=0$. Donc $h=0$.

La réciproque est vraie et immédiate.

$$\boxed{h=0\text{, si et seulement si, pour tout entier naturel } n,\ \int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0.}$$

(c) Notons $p=t_N(h)$, la projection orthogonale de h sur E_N. Donc $p\in E_N$ et $\overline{h}=h-p=h-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle h,T_k}{\|T_k\|_2^2}T_k\in E_N^\perp$.

Par linéarité :

$$\forall\ n>N,\ \int_0^\pi \overline{h}(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta-\sum_{k=0}^{N}\frac{\langle h,T_k\rangle}{\|T_k\|_2^2}\langle T_k,T_n\rangle=0+0=0$$

$$\text{et } \forall\ n\leqslant N,\ \int_0^\pi \overline{h}(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=\langle\overline{h},T_n\rangle=0\quad\text{car } \overline{h}\in E_N^\perp$$

Donc d'après la question précédente, $\overline{h}=0$, donc $h=p\in E_N$.

Et réciproquement, si $h\in E_N$, alors, pour tout $n>N$, $\int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=\langle h,T_n\rangle=0$

$$\boxed{h\in E_N\text{, si et seulement si, pour tout entier } n>N,\ \int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0.}$$

III - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, nous considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application φ_n définie pour tout P dans E_n par

$$\forall x\in[-1,1]\ ,\ \varphi_n(P)(x)=-xP'(x)+(1-x^2)P''(x)$$

1. Soit $n\in\mathbb{N}$.
Notons d'abord que la dérivation d'un polynôme donne un polynôme, ainsi que le produit par un autre polynôme.
Donc si P est un polynôme, il en est de même de $\varphi_n(P)$.
Plus précisément, si $\deg(P)\leqslant n$, $\deg P'\leqslant n-1$ et donc $\deg XP'\leqslant n$, puis $\deg(P'')\leqslant n-2$ et donc $\deg(1-X^2)P''\leqslant n$.
Et donc par addition, $\deg\varphi(P)\leqslant n$. Ainsi $\varphi_n(P)\in E_n$.
Enfin, la dérivation (simple et double) est linéaire, le produit par $x\mapsto x$ ou $x\mapsto(1-x^2)$ également, ainsi que l'addition de deux applications linéaires. Donc φ_n est linéaire.

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \varphi_n \text{ est un endomorphisme de } E_n.}$$

Pour obtenir M_2, il suffit d'exprimer l'image des vecteurs de la base canonique de E_2 par φ_2 dans elle-même.

$$\varphi_2(1)=0\quad\varphi_2(X)=-X\quad\varphi_2(X^2)=-2X^2+(1-X^2)2=2-4X^2$$

$$\boxed{\text{Donc } M_2=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_2)=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&-1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.
L'application $s : \theta \mapsto T_k(\cos\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut donc la dériver deux fois :

$$\begin{aligned}\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \quad & s'(\theta) = -\sin\theta T_k'(\cos\theta) = -k\sin(k\theta)\\ & s''(\theta) = -\cos\theta T_k'(\cos\theta) + \sin^2\theta T_k''(\cos\theta) = -k^2\cos(k\theta)\\ & s''(\theta) = -\cos\theta T_k'(\cos\theta) + (1-\cos^2\theta) T_k''(\cos\theta) = -k^2 T_n(\theta)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc pour tout } x \in [-1,1],\ (x = \cos\theta) : \varphi_n(T_k)(x) = -xT_k'(x) + (1-x^2)T_k''(x) = -k^2 T_k(x).}$$

3. Ainsi, avec la question précédente, on peut écrire la matrice de φ_2, dans la base orthogonale $\mathcal{B}' = (T_0, T_1, T_2)$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = D_2$$

Les deux matrices M_2 et D_2 sont donc semblables (matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes).
On note $P = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \mathcal{P}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. , i.e. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

car $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_2 = -1 + 2X^2 \iff X^2 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$.
La formule du changement de base donne $M_2 = P^{-1}D_2P$.

$$\boxed{\text{On a alors } M_2 = P^{-1}D_2P.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $H \in E_n$.
   (a) Soit $P \in \mathrm{Ker}\ \varphi_n$.
   On écrit P dans la base $\mathcal{B}' = (T_0, \dots T_n)$: $P = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i$. Par linéarité : $\varphi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_n(T_i) = -\sum_{i=1}^{n} a_i i^2 T_i = 0$.
   Donc par liberté de $(T_1, T_2, \dots T_n)$, on a pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_i = 0$ et donc $P = a_0T_0 = a_0$.
   Réciproquement si P est un polynôme constant, $\varphi_n(P) = 0$.

$$\boxed{\ker\varphi_n = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{vect}(1)}$$

   (b) Soit $(P, Q) \in E_n^2$, toutes les fonctions qui agissent ici sont de classe $\mathcal{C}^1$.
   Les intégrations par parties qui vont suivre sont donc licites.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2\theta P(\cos\theta)Q''(\cos\theta)\mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \underbrace{\sin\theta P(\cos\theta)}_{u(\theta)} \times \underbrace{\sin\theta Q''(\cos\theta)}_{v'(\theta)}\mathrm{d}\theta\\ &= \Big[\sin\theta P(\cos\theta) \times \big(-Q'(\cos\theta)\big)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \big(\cos\theta P(\cos\theta) - \sin^2\theta P'(\cos\theta)\big)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= 0 + \int_0^\pi \cos\theta P(\cos\theta)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi \sin^2\theta P'(\cos\theta)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P, \varphi_n(Q)\rangle &= \int_0^\pi P(\cos\theta) \times (-\cos\theta Q'(\cos\theta) + (1-\cos^2\theta)Q''(\cos\theta))\mathrm{d}\theta\\ &= -\int_0^\pi \cos\theta P(\cos\theta)Q'(\cos\theta) + \int_0^\pi \sin^2\theta P(\cos\theta)Q''(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= -\int_0^\pi \sin^2\theta P'(\cos\theta)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

   Or ce dernier résultat est invariant par la transformation : $P \leftrightarrow Q$. Donc $\langle P, \varphi_n(Q)\rangle = \langle Q, \varphi_n(P)\rangle$.
   Puis par symétrie du produit scalaire :

$$\boxed{\forall\ (P, Q) \in E_n^2, \quad \langle P, \varphi_n(Q)\rangle = \langle \varphi_n(P), Q\rangle}$$

   (c) Pour tout $P \in \mathrm{Im}\ \varphi_n$, il existe R tel que $P = \varphi_n(R)$.
   Et donc pour tout $Q \in \mathrm{Ker}\ \varphi_n$:

$$\langle P, Q\rangle = \langle \varphi_n(R), Q\rangle = \langle R, \varphi_n(Q)\rangle = \langle R, 0\rangle = 0$$

   Ainsi $\mathrm{Im}\ \varphi_n \subset \mathrm{Ker}\ \varphi_n^\perp$.
   Puis pour des raisons de dimension (E_n est de dimension finie, égale à $n+1$) :

$$\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi_n^\perp) = \dim E_n - \dim \mathrm{Ker}\ \varphi_n = \dim(\mathrm{Im}\ \varphi_n)$$

   d'après le théorème du rang.

$$\boxed{\text{Donc Im } \varphi_n = \ker\varphi_n^\perp}$$

Ainsi, comme Ker $\varphi = \text{vect}(T_0)$

$$\boxed{H \in \text{Im } \varphi_n \iff \langle H, T_0\rangle = 0 \iff \int_0^\pi H(\cos\theta)1\mathrm{d}\theta = 0}$$

(d) On suppose que $P = \sum_{i=0}^{n} p_i T_i$, on a donc (par linéarité de φ_n)

$$\varphi_n(P) = H \iff \sum_{i=0}^{n} p_i\varphi(T_n) = \sum_{i=0}^{n} h_i T_i \iff -\sum_{i=0}^{n} p_i i^2 T_n = \sum_{i=0}^{n} h_i T_i$$

Et donc par écriture unique sur une base :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(P) = H &\iff \forall i \in \{0,\dots,n\}\ ,\ -i^2 p_i = h_i \\
&\iff \begin{cases} 0 = h_0 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\ ,\ -i^2 p_i = h_i \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 = h_0 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\ ,\ p_i = -\dfrac{h_i}{i^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

- ⋆ Si $h_0 \neq 0$, l'équation obtenue pour $i = 0$ devient $0 = h_0$, c'est une condition de compatibilité du système linéaire qui n'est pas satisfaite donc l'équation n'admet aucune solution.
- ⋆ Si $h_0 = 0$, les inconnues $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont déterminées de manière unique, en revanche il n'y a aucune contrainte sur p_0 donc l'ensemble des solutions est la droite affine

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{-h_i}{i^2} T_i \ + \ \text{vect}\{T_0\}$$

⋆ Si $h_0 \neq 0$ ($\iff H \notin \text{Im } \varphi_n$), l'ensemble des solutions est vide.
⋆ Si $h_0 = 0$ ($\iff H \in \text{Im } \varphi_n$), l'ensemble des solutions est la droite affine

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{-h_i}{i^2} T_i \ + \ \text{vect}\{T_0\} = \{\text{sol. partic.}\} + \ker\varphi_n$$

IV - Calcul exact d'une intégrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour tout $h \in \{0, 1\dots, n-1\}$, en évaluant (E) en X^h,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j t_j^h = \int_0^\pi X^h(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos^h\theta \mathrm{d}t = \overline{W_h}$$

On a donc le système matriciel

$$\boxed{\begin{cases}
a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_n & = & \overline{W_0} \\
a_1 t_1 & + & a_2 t_2 & + & \dots & + & a_n t_n & = & \overline{W_1} \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \\
a_1 t_1^{n-1} & + & a_2 t_2^{n-1} & + & \dots & + & a_n t_n^{n-1} & = & \overline{W_{n-1}}
\end{cases} \iff V_n \times a_n = w_n}$$

où $V_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \vdots & & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}$, $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ (matrice inconnue) et $w_n = \begin{bmatrix} \overline{W_0} \\ \overline{W_1} \\ \vdots \\ \overline{W_{n-1}} \end{bmatrix}$. C'est un système de Cramer qui admet une et une seule solution si et seulement si $\det V_n \neq 0$.
Or on reconnaît un déterminant de Vandermonde : $\det V_n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_j - t_i)$, non nul car les $t_i = \cos\theta_i$ sont tous distincts par injectivité de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$.

$$\boxed{\text{(E) admet donc une unique solution pour } k = n-1}$$

Et en exploitant les formules de Cramer, on a

$$\boxed{\text{Pour tout } h \in \{1, 2, \dots, n\},\ a_h = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \overline{W_1} & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{h-1} & \overline{W_2} & t_{h+1} & \dots & t_n \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_{h-1}^{n-1} & \overline{W_{n-1}} & t_{h+1}^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_j - t_i)}}$$

2. Soient $P \in E_{2n-1}$, Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

(a) $E_{n-1} = \text{vect}(T_0, T_1, \dots T_{n-1})$ donc pour tout $S \in E_{n-1}$, il existe $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i T_i$.

Et donc, par linéarité du produit scalaire en son premier argument,

$$\boxed{\langle S, T_n \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \langle T_i, T_n \rangle = 0}$$

(b) Sachant que $P = QT_n + R$, par linéarité de l'intégrale :

$$I(P) = \int_0^\pi (QT_n + R)(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi Q(\cos\theta)T_n(\cos\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^\pi R(\theta)\mathrm{d}\theta = \langle Q, T_n\rangle + \int_0^\pi R(\theta)\mathrm{d}\theta = \langle Q, T_n\rangle + I(R)$$

Or, par définition de la division euclidienne, $P = QT_n + R$ et $\deg R \leq n-1$ donc $\deg(QT_n) = \deg(P-R) \leq \max(\deg P, \deg R) \leq \max(2n-1, n-1) \leq 2n-1$. Par multiplicativité du degré, $\deg(QT_n) = \deg Q + \deg T_n = \deg Q + n$ donc l'inégalité $\deg QT_n \leq 2n-1$ garantit que $\deg Q \leq n-1$. Par conséquent, $Q \in E_{n-1}$ si bien que la question précédente s'applique pour $S = Q$ et donne $\langle Q, T_n\rangle = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in E_{2n-1},\ I(P) = I(R).}$$

3. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

(a) Donc $T_3 = 4X^3 - 3X = 4\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On a $t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_2 = 0$ et $t_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ si bien que

$$\det V_3 = (t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Puis

$$W_0 = \int_0^\pi 1\mathrm{d}\theta = \pi \qquad W_1 = \int_0^\pi \cos\theta\mathrm{d}\theta = 0 \qquad W_2 = \int_0^\pi \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

On a alors (avec la formule trouvée précédemment) :

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} \pi & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix}}{\det V_3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\pi}{4}}{-\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \pi & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}}{\det V_3} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \pi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{\pi}{2} \end{vmatrix}}{\det V_3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\text{On a pour tout } k \in \{1,2,3\},\ a_k = \frac{\pi}{3}}$$

Remarques !

Il est aussi possible de résoudre le système linéaire $V_3 a = w_3$ établi dans la question IV-1 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & w_0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 & & & - & \frac{\sqrt{3}}{2}a_3 & = & w_1 \\ \frac{3}{4}a_1 & & & + & \frac{3}{4}a_3 & = & w_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_2 & + & a_1 & + & a_3 & = & \pi \\ & & \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 & - & \frac{\sqrt{3}}{2}a_3 & = & 0 \\ & & \frac{3}{4}a_1 & + & \frac{3}{4}a_3 & = & \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_2 & + & a_1 & + & a_3 & = & \pi \\ & & a_1 & - & a_3 & = & 0 \\ & & a_1 & + & a_3 & = & \frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a_2 & + & a_1 & + & a_3 & = & \pi & \\ & & a_1 & - & a_3 & = & 0 & \\ & & & & a_3 & = & \frac{\pi}{3} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_2 & & & & & = & \frac{\pi}{3} \\ & & a_1 & & & = & \frac{\pi}{3} \\ & & & & a_3 & = & \frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

(b) Soit $P \in E_5$. D'après la question $2(b)$ appliquée pour $n = 3$, en notant (Q, R) le couple (quotient, reste) de la division euclidienne de P par T_3, on a

$$I(P) = I(R) = \sum_{i=1}^{3} a_i R(t_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i (P - QT_3)(t_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i P(t_i) - \sum_{i=1}^{3} a_i Q(t_i) T_3(t_i)$$

Or t_1, t_2 et t_3 sont les racines de T_3, donc $T_3(t_1) = T_3(t_2) = T_3(t_3) = 0$.

$$\boxed{\forall\ P \in E_5, \qquad I(P) = \sum_{i=1}^{3} a_i P(t_i)}$$

4. Nous revenons maintenant au cas général.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin x \sum_{j=1}^{n} \cos((2j-1)x) &= \sum_{j=1}^{n} \sin x \cos((2j-1)x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sin(x + (2j-1)x) + \sin(x - (2j-1)x) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sin(2jx) + \sin(2(1-j)x) \Big) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sin(2jx) - \sin(2(j-1)x) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sin(2nx) - \sin(0) \right) = \frac{1}{2} \sin 2nx
\end{aligned}$$

après télescopage.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \text{ tel que } \sin x \neq 0 : \sum_{j=1}^{n} \cos((2j-1)x) = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}}$$

(b) Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

$$s_k = \sum_{j=1}^{n} T_k(t_j) = \sum_{j=1}^{n} T_k(\cos\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} \cos(k\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} \cos\big((2j-1)x_k\big)$$

avec $x_k = \dfrac{k\pi}{2n}$ et donc $\sin x_k \neq 0$, sauf pour $k = 0$.
Donc, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

$$s_k = \frac{\sin(2nx_k)}{2\sin(x_k)} = \frac{\sin(2k\pi)}{2\sin(x_k)} = 0$$

et $s_0 = n$ $(T_0(x) = 1)$

$$\boxed{\text{Donc } s_0 = n \text{ et pour tout } k \in \{1, \ldots, n-1\},\ s_k = 0.}$$

(c) On sait qu'il existe une unique famille $(a_1, \ldots a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $P \in E_{n-1}$, $\displaystyle\int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{j=1}^{n} a_j P(t_j)$.

Par unicité de $(a_1, \ldots a_n)$, il suffit de trouver un n-uplet satisfaisant l'égalité ci-dessus pour affirmer qu'il s'agit de celui que l'on cherche.
Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, d'après la question IV-2,

$$\int_0^\pi T_k(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \langle T_k, T_0 \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ \pi & \text{si } k = 0 \end{array} \right. = \pi\delta_{k,0}$$

Et par ailleurs, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la question précédente donne

$$\sum_{j=1}^{n} T_k(t_j) = s_k = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ n & \text{si } k = 0 \end{array} \right. = n\delta_{0,k}$$

donc, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\int_0^\pi T_k(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \pi\delta_{k,0} = \frac{\pi}{n} \times n\delta_{k,0} = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} T_k(t_j)\ .$$

Enfin, $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de E_{n-1} et les deux membres des égalités ci-dessus sont linéaires en T_k donc, pour tout $P \in E_{n-1}$, en décomposant P dans la base $(T_0, \ldots, T_n)$, on obtient

$$\int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} P(t_j)\ . \tag{1}$$

Ainsi, par unicité des coefficients $(a_1, \dots, a_n)$, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{pour tout } j \in \{1, 2 \dots n\},\ a_j = \frac{\pi}{n}.}$$

Il reste à étendre (E), établie pour $P \in E_{n-1}$ à $P \in E_{2n-1}$. Pour cela reprenons l'idée de la question IV-2.
Soit $P \in E_{2n-1}$ fixé.
Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n. D'après la question IV-2(b),

$$I(P) = I(R) = \int_0^\pi R(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pa ailleurs, par définition du reste de la division euclidienne par un polynôme de degré n, $R \in E_{n-1}$ donc la formule (E) ci-dessus s'applique à R :

$$I(R) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_j)$$

si bien que

$$I(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_j)$$

Enfin, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, t_j étant une racine de T_n, $P(t_j) = Q(t_j)\underbrace{T_n(t_j)}_{=0} + R(t_j) = R(t_j)$ donc

$$I(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_j) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} P(t_j)$$

Nous venons donc de prouver que

$$\boxed{\text{pour tout } P \in E_{2n-1},\ I(P) = \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} P(t_j).}$$

(d) On a, puisque $n \neq 0$ (dans cette partie $n \in \mathbb{N}^*$),

$$I(T_{2n}) = \int_0^\pi T_{2n}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(2n\theta)\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2n}\sin(2n\theta)\right]_0^\pi = 0$$

alors que (un peu comme précédemment en question IV-4(b)) :

$$\sum_{j=1}^{n} T_{2n}(t_j) = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(2n \times \frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \cos((2j-1)\pi) = \sum_{j=1}^{n}(-1) = -n\ .$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } I(T_{2n}) \neq \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} T_{2n}(t_j).}$$

Ainsi l'équation (E) est vérifiée pour $k = 2n-1$ mais il existe au moins un polynôme de E_{2n} (en l'occurrence T_{2n}) pour lequel elle n'est pas satisfaite.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{le plus grand entier } k \text{ tel que (E) est } k = 2n-1. \text{ Et dans ce cas, pour tout } i \in \{1, 2, \dots n\},\ a_i = \alpha = \frac{\pi}{n}}$$

En analyse numérique, on dit que la méthode qui consiste à approcher la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$ (pour $f \in E$) par la quantité $\displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j)$ est une méthode d'intégration approchée d'ordre $2n-1$ (elle este exacte pour tous les polynômes de degré $\leq 2n-1$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré $2n$).

V - Polynômes de meilleure approximation au sens de Tchebychev

1. (a)

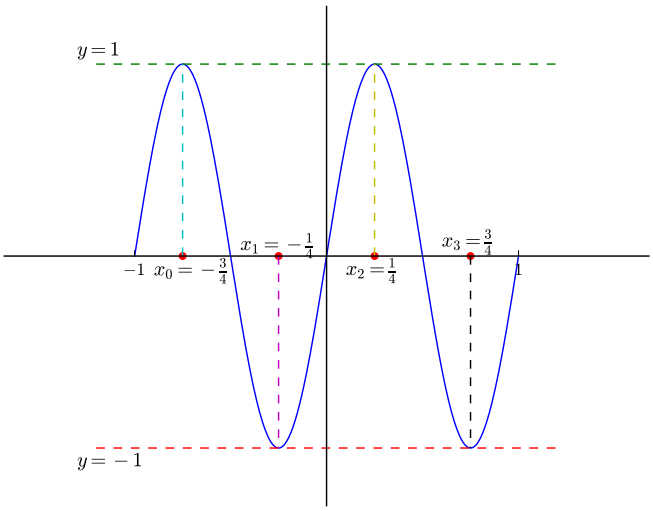

FIGURE 1 – Graphe sur $[-1,1]$ de $x \mapsto \sin(2\pi x)$ qui équioscille sur 4 points et a une norme infinie de 1.

(b) Dans la question I-3(b) appliquée pour $n \leftarrow n+1$, nous avons prouvé qu'il existe $(c_0, \dots, c_{n+1})$ tels que

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n+1\}\ ,\ |T_{n+1}(c_k)| = \|T_{n+1}\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1,\dots,n+1\}\ ,\ T_{n+1}(c_k) = -T_{n+1}(c_{k-1})$$

De plus, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n+1\}$, $c_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ et la fonction cos est stritement décroissante sur $[0,\pi]$ donc

$$0 = \frac{0\times\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n+1} < \ldots < \frac{(n+1)\pi}{n+1} = \pi \Rightarrow 1 = c_0 > c_1 > c_2 > \ldots > c_{n+1} = -1$$

Ainsi, le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n+1$ équioscille sur $n+2$ points.

2. (a) Soit $i \in \{0,1,\dots,n+1\}$ tel que $f(x_i) - P(x_i) > 0$.

⋆ D'une part le signe de $(f-P)(x_i)$ et l'hypothèse d'équioscillation de $f-P$ en $n+2$ points parmi lesquels x_i donnent

$$f(x_i) - P(x_i) = |f(x_i) - P(x_i)| = \|f-P\|_\infty$$

⋆ D'autre part l'hypothèse $\|f-Q\|_\infty < \|f-P\|_\infty$ garantit que

$$f(x_i) - Q(x_i) \underbrace{\leq}_{\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ t\leq|t|} |f(x_i) - Q(x_i)| \leq \|f-Q\|_\infty < \|f-P\|_\infty$$

donc

$$f(x_i) - Q(x_i) < f(x_i) - P(x_i)$$

d'où

$$\boxed{Q(x_i) - P(x_i) > 0.}$$

(b) Par hypothèse dans le raisonnement suggéré par l'énoncé, $\|f-Q\|_\infty < \|f-P\|_\infty$ donc $\|f-P\|_\infty > 0$.
L'hypothèse d'équioscillation de $f-P$ en les $n+2$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ garantit que

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n+1\}\ , |f(x_i) - P(x_i)| = \|f-P\|_\infty > 0$$

et impose que,

$$\forall k \in \{1,2,\dots,n+1\}\ , f(x_i) - P(x_i) = -(f(x_{i-1}) - P(x_{i-1}))$$

donc la fonction $f-P$ prend, pour tout $i \in \{1,\dots,n+1\}$, des valeurs non nulles de signes opposés en les extrémités du segment $[x_{i-1}, x_i]$. Or d'après la question précédente, le signe (au sens strict) en x_i de $Q-P$ est le même que celui (au sens strict) de $f-P$ en x_i donc $Q-P$ prend, pour tout $i \in \{1,\dots,n+1\}$, des valeurs non nulles de signes opposés en les extrémités du segment $[x_{i-1}, x_i]$. $Q-P$ est une fonction continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ (car polynomiale sur $[-1,1]$) donc le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $Q-P$ s'annule au moins une fois sur $[x_{i-1}, x_i]$ or ce n'est ni en x_{i-1}, ni en x_i donc

$$\forall i \in \{1,2,\dots,n+1\}\ ,\ \exists z_i \in]x_{i-1}, x_i[\ :\ (Q-P)(z_i) = 0\ .$$

Par conséquent, $Q-P$ est un polynôme de degré inférieur ouégal à n (différence de deux polynômes de E_n) qui s'annule en au moins $n+1$ valeurs distinctes $z_1 < z_2 < \ldots < z_n$ donc c'est le polynôme nul donc

$$\boxed{P = Q.}$$

Reprenons le raisonnement proposé par l'énoncé.
P est un élément de E_n tel que $f-P$ équioscille sur $n+2$ points.
Supposons qu'il existe $Q \in E_n$ tel que $\|f-Q\|_\infty < \|f-P\|_\infty$ (*hyp*).
Alors nous venons de prouver que $P = Q$ donc $\|f-Q\|_\infty = \|f-P\|_\infty$ ce qui contredit l'hypothèse (*hyp*).
Par conséquent,

$$\forall Q \in E_n \ , \ \|f-Q\|_\infty \geq \|f-P\|_\infty$$

ce qui caractérise (propriété (ii) de la définition de l'énoncé) le fait que

$$\boxed{P \in E_n \text{ est un PMAT de } f \text{ d'ordre } n.}$$

3. ⋆ D'après la question I-2(c), T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ dont le coefficient dominant est 2^n donc $2^{-n}T_{n+1}$ est unitaire de degré $n+1$ si bien que $q_n : x \mapsto x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n : $q_n \in E_n$.
   ⋆ Dans cette question, fonction $f-q_n$ est la fonction $2^{-n}T_{n+1}$, or d'après la question V-1(b), T_{n+1} équioscille sur $(n+2)$ points donc, en observant que la propriété d'équioscillation sur k points est préservée par multiplication du polynôme considéré par un scalaire, $f-q_n$ équioscille sur $(n+2)$ points.

   Le résultat de la question V-2 précédente s'applique :

$$\boxed{q_n \text{ est un PMAT d'ordre } n \text{ de } f.}$$

4. Soit P un polynôme unitaire de degré $n+1$.
   Posons $R = P - X^{n+1} \in E_n$ de sorte que $P = X^{n+1} + R$, et $a_n = X^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1} + R = P - 2^{-n}T_{n+1}$.
   ⋆ Nous avons vu dans la question précédente que $q_n : x \mapsto x^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}(x)$ appartient à E_n, or $R \in E_n$ donc $a_n = q_n - R \in E_n$.
   ⋆ Dans cette question, fonction $P-a_n$ est la fonction $2^{-n}T_{n+1}$, donc (voir question précédente) $P-a_n$ équioscille sur $(n+2)$ points.

   Le résultat de la question V-2 précédente s'applique : a_n est un PMAT d'ordre n de P donc (propriété (ii) de la définition)

$$\begin{aligned} \forall\, Q \in E_n \ , \quad \underbrace{\|P-a_n\|_\infty}_{=\|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty} &\leqslant \|P-Q\|_\infty \end{aligned}$$

   En particularisant la relation ci-dessus pour $Q = 0 \in E_n$,

$$\|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$$

   Par homogénéité de la norme uniforme, $\|2^{-n}T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty$ et nous avons prouvé dans la question I-3(b) que $\|T_{n+1}\|_\infty = 1$ donc

$$\boxed{\text{pour tout polynôme } P \text{ unitaire de degré } n+1, \text{ on a } \|P\|_\infty \geqslant \frac{1}{2^n}.}$$

5. (a) Soit P est un polynôme de degré $n+1$ fixé.
   Notons $c \in \mathbb{R}^*$ son coefficient dominant.
   $c^{-1}.P$ est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc le raisonnement mené dans la question précédente prouve que $c^{-1}P - 2^{-n}T_{n+1}$ est un PMAT d'ordre n de $c^{-1}P$.
   Montrons que $P - c2^{-n}T_{n+1}$ est un PMAT d'ordre n de P.
   ⋆ Le degré de $P - c2^{-n}T_{n+1}$ est inférieur ou égal à n car P et $c2^{-n}T_{n+1}$ sont de degré $n+1$ et ont le même coefficient dominant.
   ⋆ Soit $Q \in E_{n-1}$ fixé quelconque. Par homogénéité de la norme,

$$\|P-Q\|_\infty = \|cc^{-1}P - Q\|_\infty = |c|\|c^{-1}P - c^{-1}Q\|_\infty$$

   or $c^{-1}P - 2^{-n}T_{n+1}$ est un PMAT de $c^{-1}P$ donc

$$\|P-Q\|_\infty = |c|\|c^{-1}P - c^{-1}Q\|_\infty \geq \underbrace{|c|\|c^{-1}P - (c^{-1}P - 2^{-n}T_{n+1})\|_\infty}_{\text{homogénéité de la norme}} = \|P - (P - 2^{-n}cT_{n+1})\|_\infty$$

$$\boxed{\text{Ainsi, un PMAT d'ordre } n \text{ de } f \text{ est } P - 2^{-n}cT_{n+1}.}$$

   (b) Appliquons le résultat de la question précédente pour $P = 5X^3 + 2X - 3$, $n = 2$, sachant que $T_3 = 4X^3 - 3X$,

$$\boxed{\text{Ainsi, un PMAT d'ordre 2 de } f : x \mapsto 5x^3 + 2x - 3 \text{ est } x \mapsto \frac{23}{4}X - 3.}$$