CONCOURS BLANC

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème

On note E, l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $[-1,1]$ sans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n où n est un entier naturel.
On pourra confondre les expressions : polynôme et fonction polynomiale.
Si f est un élément de E, on poe $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Préliminaires

Justifier d'une ou deux phrases, l'identification de $\mathbb{R}_n[X]$ et E_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I - Polynômes de Tchebychev

Dans cette partie, n désigne un entier naturel.

1. Existence et unicité.
   (a) Déterminer un polynôme T à coefficients réels de degré n vérifiant la propriété $(\star)$:
   $$\forall\ \theta \in \mathbb{R}, \qquad T(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad\qquad (\star)$$
   On pourra remarquer que $\cos(n\theta)$ *est la partie réelle de* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
   (b) Montrer que le polynôme vérifiant $(\star)$ est unique.

   On l'appelle le polynôme de Tchebychev d'indice n. On le note T_n.
   On définit alors une fonction polynomiale sur $[-1,1]$ par : $\forall\ x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

2. Relation de récurrence.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
   (b) Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3.
   (c) Donner le coefficient dominant de T_n.
3. Racines et extrema de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   On note, et jusqu'à la fin du devoir, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $c_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$ et pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $t_k = \cos\theta_k$.
   (a) Montrer que $T_n = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - t_k)$.
   (b) Calculer $\|T_n\|_\infty$, puis montrer que :
   $$\forall\ k \in \{0,1,\ldots,n\}, |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall\ k \in \{1,\ldots,n\}, T_n(c_k) = -T_n(c_{k-1})\ .$$
   Les $n+1$ réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont appelés les points de Tchebychev.
   (c) Dessiner le graphe de T_3. Préciser sur le dessin les valeurs de c_0, c_1, c_2, c_3.

II - Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Pour tout élément $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Ceci nous permet de définir la norme euclidienne induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur E : pour tout $h \in E$, $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle}$.

2. Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ selon les valeurs des entiers naturels m et n.
   En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ et une base orthogonale de E_n.

Dans toute la suite de cette partie, f désignera un élément de E et n un entier naturel.
On pose $d_2(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_2, Q \in E_n\}$.

3. (a) Enoncer un théorème justifiant l'existence et l'unicité d'un vecteur $t_n(f)$ de E_n tel que $\|f - t_n(f)\| = d_2(f, E_n)$.
   (b) Exprimer $t_n(f)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.

   On dit que $t_n(f)$ est le polynôme de meilleure approximation quadratique de f sur E.

4. Montrer que $d_2(f, E_n) = \sqrt{{\|f\|_2}^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}}$

5. (a) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}$ est convergente.
   (b) Que pensez-vous de la limite de $\displaystyle\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta$ lorsque n tend vers $+\infty$?

6. (a) Soit h un élément de E, montrer que $\|h\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\|h\|_\infty$.
   (b) On admet que pour toute fonction f de E,
   $$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, T \in \mathbb{R}[X] \mid \forall\, x \in [-1, 1],\ |f(x) - T(x)| < \varepsilon\ .$$
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f - t_n(f)\|_2 = 0$.

7. (a) En déduire que : $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle f, T_k\rangle^2}{{\|T_k\|_2}^2}}$.
   (b) Application : un théorème des moments.

   Caractériser les fonctions h de E telles que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta = 0$.

   (c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Caractériser les fonctions h de E telles que pour tout entier naturel $n > N$, $\displaystyle\int_0^\pi h(\cos\theta)\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta = 0$.

III - Étude d'un endomorphisme

Dans cette partie, nous considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n définie pour tout P dans E_n par
$$\forall x \in [-1, 1]\ ,\ \varphi_n(P)(x) = -xP'(x) + (1 - x^2)P''(x)$$

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est un endomorphisme de E_n. Déterminer la matrice M_2 de φ_2 dans la base canonique de E_2.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\varphi_n(T_k) = -k^2 T_k$. *On pourra dériver la propriété $(\star)$ par rapport à θ.*
3. En déduire que les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ et $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ sont semblables et expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = P^{-1}D_2P$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $H \in E_n$.
   (a) Déterminer une base de $\ker\varphi_n$.
   (b) Soient $(P, Q) \in E_n^2$. Montrer que
   $$\int_0^\pi \sin^2(\theta)P(\cos\theta)Q''(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos\theta P(\cos\theta)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^\pi \sin^2(\theta)P'(\cos\theta)Q'(\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
   puis en déduire que $\langle P, \varphi_n(Q)\rangle = \langle\varphi_n(P), Q\rangle$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\ \varphi_n = \ker\varphi_n^\perp$ puis que $H \in \mathrm{Im}\ \varphi_n \iff \displaystyle\int_0^\pi H(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 0$.
   (d) Résoudre, en fonction des coordonnées $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ de H dans $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ l'équation d'inconnue $P \in E_n$,
   $$\varphi_n(P) = H\ .$$

IV - Calcul exact d'une intégrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que l'on note, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $t_k = \cos \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} = \cos \theta_k$ les n racines du polynôme T_n.

Dans cette partie, à tout polynôme P, on fait correspondre le réel

$$I(P) = \int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta \ .$$

On cherche des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$\forall P \in E_k \ , \ \int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{j=1}^n a_j P(t_j) \tag{E}$$

où k est un entier, le plus grand possible.

1. Écrire matriciellement le système linéaire obtenu en évaluant (E) sur les polynômes de la base canonique de E_{n-1}.
   On ne calculera pas les intégrales $\overline{W_k} = \int_0^\pi \cos^k \theta d\theta$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
   En déduire l'existence et l'unicité d'une solution au problème posé pour $k = n-1$.
   Puis donner une expression explicite permettant de calculer les solutions en fonction de déterminants qui dépendent de t_1, t_2, ..., t_n, $\overline{W_0}$, $\overline{W_1}$, ... mais que l'on ne calculera pas.
2. Soient $P \in E_{2n-1}$, Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Calculer, pour tout $S \in E_{n-1}$, $\langle S, T_n \rangle$.
   (b) En déduire que $I(P) = I(R)$.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, t_1, t_2 et t_3 sont les trois racines réelles de T_3.
   (a) Déterminer le triplet de réels (a_1, a_2, a_3).
   (b) Soit $P \in E_5$. Montrer que
   $$I(P) = a_1 P(t_1) + a_2 P(t_2) + a_3 P(t_3) \ .$$
4. Nous revenons maintenant au cas général.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin x \neq 0$. Exprimer la somme $\sum_{j=1}^n \cos((2j-1)x)$ à l'aide de $\sin(2nx)$ et de $\sin x$.
   On pourra montrer que $\sin x \times \sum_{j=1}^n \cos((2j-1)x)$ *est une somme téléscopique.*
   (b) En déduire, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la valeur de $s_k = \sum_{j=1}^n T_k(t_j)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un réel α que l'on précisera tel que
   $$\forall P \in E_{2n-1} \ , \ \int_0^\pi P(\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \alpha \sum_{j=1}^n P(t_j)$$
   (d) Calculer explicitement $I(T_{2n})$ et $\sum_{j=1}^n T_{2n}(t_j)$.
   Répondre à la question posée en introduction de la partie.

Tournez la page

V - Polynômes de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et f un élément de E.

On note $d_\infty(f, E_n) = \inf\{\|f - Q\|_\infty, Q \in E_n\}$ la distance de f à E_n pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On dit qu'un élément P de E_n est un **polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev** (on notera en abrégé PMAT) **de** f **d'ordre** n s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

(i) $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$,

(ii) $\forall\, Q \in E_n,\ \|f - P\|_\infty \leqslant \|f - Q\|_\infty$.

On **admettra l'existence d'un PMAT pour toute fonction** $f \in E$ **et pour tout** $n \in \mathbb{N}$.

Soit h un élément de E. On dit que h équioscille sur $k+1$ points s'il existe $k+1$ réels $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ de l'intervalle $[-1, 1]$ tels que

$$\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, k\},\ |h(x_i)| = \|h\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, k\},\ h(x_i) = -h(x_{i-1})$$

(on dit que les extrema sont alternés).

1. Exemples
   (a) Dessiner le graphe d'une fonction φ de E telle que $\|\varphi\|_\infty = 1$ et φ équioscille sur 4 points.
   (On ne cherchera pas nécessairement à expliciter une telle fonction).
   (b) Montrer que le polynôme T_{n+1} de Tchebychev d'indice $n+1$ équioscille sur $n+2$ points.
2. Le but de cette question est de montrer le résultat suivant :

   Si P et un élément de E_n tel que $f - P$ équioscille sur $n+2$ points, alors P est un PMAT d'ordre n de f.

   Considérons $P \in E_n$ tel que $f - P$ équioscille sur $n+2$ points de $[-1, 1]$ que l'on note $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$.
   Soit $Q \in E_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$.
   (a) Soit $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$. Montrer que si $f(x_i) - P(x_i) > 0$, alors $Q(x_i) - P(x_i) > 0$.
   On admet qu'on a de même : si $f(x_i) - P(x_i) < 0$, alors $Q(x_i) - P(x_i) < 0$.
   (b) En déduire que $P = Q$. Conclure.
3. Dans cette question, on considère $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{n+1}$ et on pose $q_n : x \mapsto x^{n+1} - 2^{-n} T_{n+1}(x)$.
   Montrer que q_n est un PMAT d'ordre n de f.
4. En déduire que, pour tout polynôme P unitaire de degré $n+1$, on a $\|P\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^n}$.
   On cherchera à comparer $\|T_{n+1}\|_\infty$ et $\|P\|_\infty$.
5. (a) Dans cette question, f est un polynôme de degré $n+1$. Déterminer un PMAT d'ordre n de f.
   (b) Application : déterminer un PMAT d'ordre 2 de $f : x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$.