MPSI 3 - Fermat Le 11.06.19
2018-2019

Devoir à la maison n°13
CORRECTION

Problème - Série de Fourier et problème de Bâle

On considère $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions numériques 2π-périodique
puis la forme définie sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $C_n : t\mapsto \cos(nt)$ et pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $S_m : t\mapsto \sin(nt)$.
On considère pour tout le problème, l'application $\varphi\in\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que :

$$\forall\ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\qquad \varphi(x)=x,\qquad \forall\ x\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}],\qquad \varphi(x)=\pi-x$$

I. Espace préhilbertien réel

1. C_n et S_m sont clairement continues et 2π-périodique.
   La troisième propriété est vérifiée, par continuité.

   $$\boxed{\text{Donc pour tout } n\in\mathbb{N},\ C_n\in\mathcal{C}_{2\pi} \text{ et tout } m\in\mathbb{N}^*,\ S_m\in\mathcal{C}_{2\pi}.}$$

   φ est clairement continue sur $]-\pi,\pi[$, elle est 2π-périodique par définition.
   Enfin : $\lim_{x\to 0^+}\varphi(\pi-x)=\lim_{x\to0^+}\pi-x=\pi$, car dans ce cas $\pi-x\in]-\pi,\pi[$,
   Et $\lim_{x\to0^+}\varphi(\pi+x)=\lim_{x\to0^+}(\pi+x-2\pi)=-\pi$, car dans ce cas $\pi+x\in]\pi,3\pi[$.
   et donc pour connaitre sa valeur, il faut exploiter la 2π-périodicité.
   Ainsi $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\big(\varphi(\pi+x)+\varphi(\pi-x)\big)=0=\varphi(\pi)$

   $$\boxed{\text{Donc } \varphi\in\mathcal{C}_{2\pi}.}$$

2. C'est une forme (à valeurs dans $\mathbb{R}$),
   - symétrique : $\forall\ f,g\in\mathcal{C}_{2\pi}$, $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)\mathrm{d}t=\langle g|f\rangle$
   - bilinéaire : linéaire à gauche par linéarité du produit sur $\mathbb{R}$ puis celle de l'intégrale.
     Elle est, par symétrie, également linéaire à droite.
   - positive : pour tout $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$

   $$\langle f|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f^2(t)}_{\geqslant 0}\mathrm{d}t\geqslant 0$$

   - définie : si $\langle f|f\rangle=0$, alors comme $f^2\geqslant0$ et est continue : $f^2=0$ sur $]-\pi,\pi[$.
     donc $f=0$ sur $]-\pi,\pi[$, puis $f(\pi)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\big(f(\pi+x)+f(\pi-x)\big)=0$, également,
     et enfin, par 2π-périodicité : f est nulle sur $\mathbb{R}$.

   $$\boxed{\text{Finalement } \langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{C}_{2\pi}.}$$

   On note $\|\cdot\|$, la norme (euclidienne) associée.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{N}^*$,

$$\pi\|C_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nt)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2nt)\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4n}\sin(2nt)\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\pi\|C_0\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}1\mathrm{d}t=2\pi$$

$$\pi\|S_m\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nt)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2nt)\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{4n}\sin(2nt)\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour } n\in\mathbb{N}^*,\ \|C_n\|=\|S_n\|=1, \text{ alors que } \|C_0\|=\sqrt{2}}$$

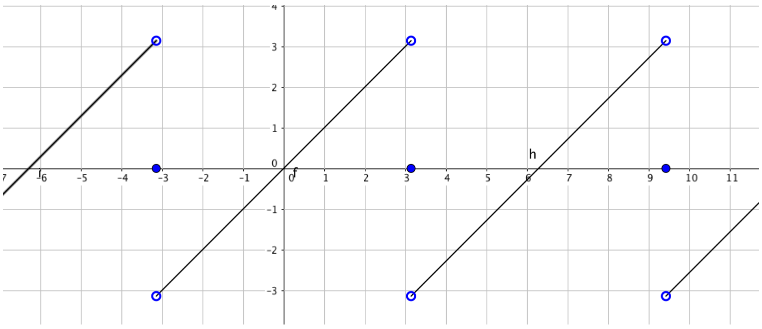
4. Soit $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$.

$$\begin{aligned}\pi\langle C_n|S_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin\left((m+n)t\right) - \sin\left((m-n)t\right)]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{m+n}\cos\left((m+n)t\right) + \frac{-1}{m-n}\cos\left((m-n)t\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

car cos est paire.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \neq m,\ \langle C_n|S_m\rangle.}$$

II. Etude de φ

1. 

2. $\pi a_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = 0$, donc $a_0 = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\left(\pi\sin(n\pi) - (-\pi)\sin(-n\pi)\right) + \frac{1}{n^2}\left[\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \cos(-n\pi) = 0\end{aligned}$$

par imparité de sin et parité de cos.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = 0}$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on réalise également une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\pi b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{-t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{n}\left(\pi\cos(n\pi) - (-\pi)\cos(-n\pi)\right) + \frac{1}{n^2}\left[\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2\times 0}{n^2}\end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}$$

III. Sous-espace $\mathcal{C}_{2\pi}^n$ et valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{2\pi}^n = \mathrm{vect}(C_0, C_1, \ldots C_n, S_1, \ldots S_n)$.

1. On a vu dans la première partie que la famille $(C_0, C_1, \ldots C_n, S_1, \ldots S_n)$ est une famille orthogonale, donc libre.
Elle est génératrice de $\mathcal{C}_{2\pi}^n$, par définition de cet espace. Il s'agit donc d'une base

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{C}_{2\pi}^n \text{ est un espace euclidien de dimension } 2n+1, \text{ sous-espace de } \mathcal{C}_{2\pi}, \\ \text{de base orthonormée : } (\frac{C_0}{\sqrt{2}}, C_1, \ldots C_n, S_1, \ldots S_n).\end{array}}$$

On note, pour toute $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, $f_n = p_{\mathcal{C}_{2\pi}^n}(f)$, la projection orthogonale de f sur $\mathcal{C}_{2\pi}^n$.

2. La projection orthogonale s'exprime directement lorsqu'on a une base orthonormée :

$$\varphi_n = \langle f|\frac{C_0}{\sqrt{2}}\rangle\frac{C_0}{\sqrt{2}} + \sum_{m=1}^{n}\langle f|C_m\rangle C_m + \sum_{m=1}^{n}\langle f|S_m\rangle S_m$$

$$\boxed{p_{\mathcal{C}_{2\pi}^n}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_n C_m + b_n S_m)}$$

3. On note $g_n = f - f_n$, alors par définition de la projection orthogonale : $\langle g_n|f_n\rangle = 0$. Avec le théorème de Pythagore :

$$\|f\|^2 = \langle f_n + (f-f_n)|f_n + (f-f_n)\rangle = \langle f_n + g_n|f_n + g_n\rangle = \langle f_n|f_n\rangle + \langle g_n|g_n\rangle + 2\langle f_n|g_n\rangle$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \|f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f-f_n\|^2}$$

4. On note $d(f,F) = \inf_{g\in F}\|f-g\|$.
Soit $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^n$, alors, avec les mêmes notations que la question précédente :

$$\|f-g\|^2 = \|\underbrace{g_n}_{\in(\mathcal{C}_{2\pi}^n)^\perp} + \underbrace{f_n - g}_{\in\mathcal{C}_{2\pi}^n}\|^2 = \|g_n\|^2 + \|f_n - g\|^2$$

Donc, pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}^n$, $\|f-g\|^2 \geqslant \|g_n\|^2$, donc $[d(f,\mathcal{C}_{2\pi}^n)]^2 \geqslant \|g_n\|^2$.
Par ailleurs, avec $g = f_n$, cette égalité devient une inégalité.

$$\boxed{\text{Ainsi } [d(f,\mathcal{C}_{2\pi}^n)]^2 = \|g_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f_n\|^2.}$$

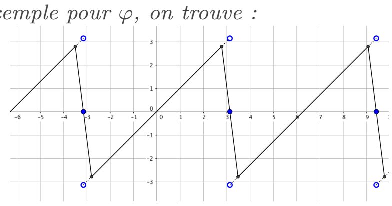
On admet le théorème de Weierstrass :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \epsilon > 0, \text{ pour toute fonction continue et } 2\pi\text{-périodique } f(\in \mathcal{C}_{2\pi}),\\ \quad \text{il existe } P, Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \forall\, x \in [0,2\pi],\ \Big|f(x) - [P(\cos(x)) + Q(\sin(x))]\Big| < \epsilon\end{array}}$$

5. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^n$). f n'est pas nécessairement continue en π (ailleurs, elle l'est).
Soit $\epsilon > 0$.
f est nécessairement bornée car f est continue sur $]-\pi,\pi[$ et admet des limites en π.
On note $M = \sup|f|$ et on considère $a = \dfrac{\pi\epsilon}{16M^2}$.
Soit

$$\hat{f}_a : x \mapsto \left\{\begin{array}{cll} f(x) = x - 2k\pi & \text{si } x \in & [(2k-1)\pi + a, (2k+1)\pi - a] \\ \pi - a + \frac{a-\pi}{a}(x - (2k+1)\pi + a) & \text{si } x \in & [(2k+1)\pi - a, (2k+1)\pi + a] \end{array}\right.$$

Remarques !
Graphiquement : on tronque une partie de la courbe de f, et on lie les deux parties qui restent de manière à avoir une fonction continue.
Par exemple pour φ, on trouve :



Alors $\hat{f}_a$ est continue :

$$\text{en } (2k+1)\pi - a : \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f([(2k+1)\pi - a] - x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2k+1)\pi - a - x - 2k\pi = \pi - a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f([2k+1)\pi - a] + x) = \pi - a + \dfrac{a-\pi}{a} \times 0 = \pi - a \end{array}\right.$$

$$\text{en } (2k+1)\pi + a : \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f([(2k+1)\pi + a] + x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[(2k+1)\pi + a] + x - 2(k+1)\pi = a - \pi \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f([2k+1)\pi + a] - x) = \pi - a + \dfrac{a-\pi}{a} \times (2a) = a - \pi \end{array}\right.$$

et partout ailleurs.
Puis, les intégrales sont proches. En effet, en notant $M = \sup_{]-\pi,\pi[}|f|$ (qui existe bien...) :

$$\|f - \hat{f}_a\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+a}(f - \hat{f}_a)^2 + \frac{1}{\pi}\int_{\pi-a}^{\pi}(f - \hat{f}_a)^2 \leqslant \frac{8}{\pi} \times aM^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Par ailleurs, comme $\hat{f}_a$ est continue :

Alors il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall\ x \in [-\pi, \pi]$, $\left|\hat{f}_a(x) - [P(\cos(x)) + Q(\sin(x))]\right| < \dfrac{\epsilon^2}{8\pi}$. Notons $N = \max(\deg(P, Q))$.

donc il existe $(\lambda_i, \mu_i) \in \mathbb{R}^{2N}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \lambda_i X^i$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \mu_i X^i$.

Ainsi $P(\cos x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \lambda_i (\cos x)^i$ et $Q(\sin x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \mu_i (\sin x)^i$.

En exploitant les formules d'Euler, puis en développant, on trouve :

$$\exists\ (a_k)_{k\geqslant N} \in \mathbb{R}^{N+1}, (b_k)_{k\geqslant N} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \text{tels que } P(\cos(x)) + Q(\sin(x)) = \sum_{k=0}^{N} \left(a_k \cos^k x + b_k \sin^k x\right)$$

Ainsi, il existe $g_N \in \mathcal{C}_{2\pi}^N$ telle que $\forall\ x \in [-\pi, \pi]$, $\left|\hat{f}_a(x) - g(x)\right| < \dfrac{\epsilon^2}{8\pi}$

On a alors $\|\hat{f}_a(x) - g_N(x)\|^2 \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}_a - g|(t)\mathrm{d}t \leqslant 2\pi \times \dfrac{\epsilon^2}{4\pi} = \dfrac{\epsilon^2}{4}$.

Puis, par inégalité triangulaire :

$$\exists\ g_N \mathcal{C}_{2\pi}^N \text{ tel que } \|f - g_N\| \leqslant \epsilon$$

Comme $\mathcal{C}_{2\pi}^n \subset \mathcal{C}_{2\pi}^{n+1}$, alors $\forall\ n \geqslant N$, $\|f - g_n\| \leqslant \epsilon$.

$$\boxed{[d(f, \mathcal{C}_{2\pi}^n)]^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

6. On applique le résultat précédent à φ.

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$$

Et, puisque les (S_i) sont orthogonaux :

$$\varphi_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2}$$

On a d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} = 0$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$