# Devoir à la maison n°13

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

---

## Problème - Série de Fourier et problème de Bâle

On considère $\mathcal{C}_{2\pi}$, l'espace vectoriel des fonctions $f$ numériques telles que :
- $f$ est $2\pi$-périodique.
- $f$ est continue sur $]-\pi,\pi[$
- $f(\pi)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(\pi+x)+f(\pi-x)\big)$

On considère également le produit définie sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ par : $\langle f|g\rangle=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $C_n: t\mapsto\cos(nt)$ et pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $S_m: t\mapsto\sin(nt)$.
On considère pour tout le problème, l'application $\varphi\in\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que :

$$\forall\ x\in]-\pi,\pi[,\qquad \varphi(x)=x \qquad\qquad \varphi(\pi)=0$$

### I. Espace préhilbertien réel

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $C_n\in\mathcal{C}_{2\pi}$ et tout $m\in\mathbb{N}^*$, $S_m\in\mathcal{C}_{2\pi}$.
   Montrer que $\varphi\in\mathcal{C}_{2\pi}$.
2. Montrer que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.
   On note $\|\cdot\|$, la norme (euclidienne) associée.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner la valeur de $\|C_n\|$ et pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $\|S_m\|$
4. Calculer pour tout $n\neq m$, $\langle C_n|S_m\rangle$.

### II. Etude de $\varphi$

1. Tracer $\varphi$.
2. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\langle\varphi|C_n\rangle$.
3. Montrer pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, $b_m:=\langle\varphi|S_n\rangle=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$.

### III. Sous-espace $\mathcal{C}_{2\pi}^n$ et valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{2\pi}^n=\mathrm{vect}(C_0,C_1,\dots C_n,S_1,\dots S_n)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_{2\pi}^n$ est un espace euclidien de dimension $2n+1$, sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$.
   Donner en une base orthonormée.

On note, pour toute $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, $f_n=p_{\mathcal{C}_{2\pi}^n}(f)$, la projection orthogonale de $f$ sur $\mathcal{C}_{2\pi}^n$.

2. Exprimer $\varphi_n=p_{\mathcal{C}_{2\pi}^n}(\varphi)$
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\|f\|^2=\|f_n\|^2+\|f-f_n\|^2$$

4. On note $d(f,F)=\inf_{g\in F}\|f-g\|$.
   Montrer que $[d(f,\mathcal{C}_{2\pi}^n)]^2=\|f\|^2-\|f_n\|^2$

On admet le théorème de Weierstrass :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } \epsilon>0,\text{ pour toute fonction continue et } 2\pi\text{-périodique } f(\in\mathcal{C}_{2\pi}),\\ \quad\text{il existe } P,Q\in\mathbb{K}[X] \text{ tel que } \forall\ x\in[-\pi,\pi],\ \Big|f(x)-[P(\cos(x))+Q(\sin(x))]\Big|<\epsilon\end{array}}$$

5. (*) En déduire que $[d(f,\mathcal{C}_{2\pi}^n)]^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
6. Donner la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$