CONCOURS BLANC

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème de probabilité.

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

BON COURAGE

Problème

Préliminaires

Dans cette partie, on démontre deux résultats qui seront exploités indépendamment dans la suite du devoir.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

(c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

2. On considère la série $\sum_{n \geq 0} a_n$, une série absolument convergente.

(a) Justifier que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ existe bien.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{+\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

(c) Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, une bijection (permutation) de $\mathbb{N}$. On note $\bar{N} = \max\{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1) \dots \varphi^{-1}(N)\}$.
Montrer que pour tout $k \leq \bar{N}$, $\varphi(k) \leq N$.

(d) En déduire que pour tout $n \geq \bar{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)} - S \right| < \epsilon$$

On déduit de cette seconde question que si une série converge absolument, alors la somme des termes de la série est inchangée, même si on change l'ordre de sommation

A. Probabilité discrètes

On considère un univers d'expérience Ω infini.

On note $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω .

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que

— $\mathcal{T}$ contient Ω ,

— $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$,

— $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de partie de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$.

On suppose qu'il existe une fonction $\mathbf{P}$ à valeurs dans $[0, 1]$ et définie sur $\mathcal{T}$ telle que :

— $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,

— pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints, la série $\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(A_i)$ converge et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité discret.

1. (a) Justifier que, si $A \in \mathcal{T}$, alors $\mathbf{P}(\bar{A})$ a un sens et vaut $1 - \mathbf{P}(A)$.
- (b) Montrer que, si $(A, B) \in \mathcal{T}^2$, alors $\mathbf{P}(A \cup B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B)$ ont un sens et

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$$

Une application $X : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ si

- $\Omega' \in \mathcal{T}$ vérifie $\mathbf{P}(\Omega') = 1$,
- il existe une suite réelle $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$X(\Omega') = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, X^{-1}(\{x_k\}) \in \mathcal{T}$$

Une variable aléatoire n'est donc pas nécessairement définie sur l'univers mais au moins sur le complémentaire d'un événement négligeable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera $(X = x)$ l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

La condition $X(\Omega') = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ signifie que l'image de X est dénombrable et l'hypothèse $X^{-1}(\{x_k\}) \in \mathcal{T}$ garantit que $\mathbf{P}(X = x_k)$ a un sens ce qui permet de parler de la probabilité de l'événement $(X = x_k)$.

2. Montrer que, si $X : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle discrète d'image $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1 .$$

On admet que réciproquement, si $\Omega' \in \mathcal{T}$ vérifie $\mathbf{P}(\Omega') = 1$ et si $X : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ est une application telle qu'il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant

- $X(\Omega') = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X = x_k) \in \mathcal{T}$,
- $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$,

alors X est une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ d'image $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

- X admet une espérance si $\sum_{k \geq 0} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente et, dans ce cas elle vaut

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k).$$

- X admet un moment d'ordre 2 si $\sum_{k \geq 0} x_k^2 \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente et, dans ce cas il vaut

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2 \mathbf{P}(X = x_k).$$

Dans la suite de cette partie, on considère (sauf en 3.b) des variables aléatoires **entières** (c'est-à-dire réelles discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$ si bien que l'on peut prendre la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour décrire l'image de ces variables aléatoires). Pour ce type de variable,

- X admet une espérance si $\sum_{k \geq 0} k \mathbf{P}(X = k)$ est absolument convergente et, dans ce cas elle vaut

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k).$$

- X admet un moment d'ordre 2 si $\sum_{k \geq 0} k^2 \mathbf{P}(X = k)$ est absolument convergente et, dans ce cas il vaut

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathbf{P}(X = k).$$

3. Soit X une variable aléatoire entière discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. On suppose dans cette question que X admet un moment d'ordre 2.

- (a) Montrer que X admet une espérance.
- (b) Montrer que, la série $\sum_{k \geq 1} (k - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = k)$ converge.

Sa somme est appelée **la variance de X** et notée $\mathbf{V}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = k)$.

(c) Montrer que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)$.

4. Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs entières telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

(a) Montrer que Y n'admet pas d'espérance.

(b) Justifier que $\sqrt{Y} = \sqrt{\cdot} \circ Y$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$. Que dire de l'existence d'une espérance et d'une variance pour $\sqrt{Y}$?

5. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On admet l'existence d'une application $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(Z = k) \in \mathcal{T}$ et $\mathbf{P}(Z = k) = A(\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$.

(a) Pour quelle valeur de $A(\lambda) \in \mathbb{R}$, l'application Z est-elle une variable aléatoire réelle à **valeurs entières** ?

(b) Montrer alors que Z admet une espérance et un moment d'ordre 2 et donner explicitement les valeurs de $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$ en fonction de λ .

B. Un premier problème aléatoire

Soient n , un entier non nul et $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.

Un joueur dispose de n dés pipés identiques dont la probabilité d'apparition du 6 vaut p .

L'expérience consiste à effectuer des lancers successifs jusqu'à ce que tous les dés donnent des 6. À l'issue de chaque lancer, les dés ayant donné 6 sont laissés immobiles, seuls sont relancés ceux n'ayant jamais donné 6.

On note,

- pour tout $h \in \mathbb{N}$, S_h la variable aléatoire réelle égale au nombre de dés qui ont donné 6 à l'issue des h premiers jets (S_0 est la variable aléatoire certaine égale à 0),
- pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $X_h = S_h - S_{h-1}$ la variable aléatoire réelle égale au nombre de nouveaux dés qui donnent 6 lors du h^e jet.

On souhaite « mesurer » le nombre de lancers successifs nécessaires pour que tous les dés aient donné un 6.

On note $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ l'espace probabilisé discret correspondant à la modélisation de cette expérience.

1. On s'intéresse au premier jet.

On note S_1 , le nombre de succès (nombre de dés ayant donné 6) à l'issue de ce premier jet. Quelle est la loi de S_1 ?
On précisera/justifiera soigneusement les hypothèses prises.

2. On s'intéresse au second jet. On suppose qu'à l'issue du premier jet, on a obtenu $S_1 = s$ ($0 \leq s \leq n$).

On relance alors les $n - s$ dés n'ayant pas donné de 6.

X_2 est le nombre de succès lors de cette nouvelle série de lancers.

(a) Quelle est la loi conditionnelle de X_2 sachant $(S_1 = s)$?

(b) Montrer que S_2 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. On pourra utiliser le lien existant entre S_1 , S_2 et X_2 .

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On s'intéresse maintenant au k^e jet. On note X_k le nombre de (nouveaux) succès lors de ce k^e jet.

(a) Que valent $S_{k-1}(\Omega)$ et $X_k(\Omega)$?

(b) Donner, pour tout $(s, r) \in S_{k-1}(\Omega) \times X_k(\Omega)$, la valeur de $\mathbf{P}_{(S_{k-1}=s)}(X_k = r)$.

(c) Montrer, par récurrence que $S_k \leftrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^k)$.

Posons $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{N}^* : S_k(\omega) = n\}$.

Considérons l'application T définie sur Ω' par

$$\forall \omega \in \Omega', T(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = n\}$$

4. (a) i. Décrire deux issues de l'univers Ω , l'une dans Ω' , l'autre dans l'événement contraire.

ii. Justifier que T est bien définie sur Ω' .

iii. À quoi correspond $T(\omega)$ pour l'issue $\omega \in \Omega'$ dans notre expérience aléatoire ?

On admet que $\Omega' \in \mathcal{T}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{T}$ ce qui donne un sens à $\mathbf{P}(\Omega')$ et à la probabilité de l'événement $(T = k)$ notée $\mathbf{P}(T = k)$.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T = k) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n$.

(c) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(T = k)$ converge et préciser sa somme.

D'après l'introduction de la partie A, que peut-on en déduire concernant $\mathbf{P}(\Omega')$ et T ?

(d) Calculer un équivalent de $\mathbf{P}(T = k)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ puis en déduire que T admet une espérance.

(e) i. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^N k(u_k - u_{k-1}) = Nu_N - \sum_{k=1}^{N-1} u_k$$

ii. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^N kP(T = k) = N(1 - q^N)^n - \sum_{k=1}^{N-1} (1 - q^k)^n$$

puis que

$$\sum_{k=1}^N kP(T = k) = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} \left[Nq^{iN} - \frac{q^i - q^{iN}}{1 - q^i} \right]$$

iii. Conclure en donnant la valeur de $\mathbf{E}(T)$ (que l'on pourra laisser sous la forme d'une somme finie).

C. Structure préhilbertienne sur les variables admettant un moment d'ordre 2

On considère $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité discret.

Deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y définies sur Ω sont égales presque sûrement, noté $X = Y$ p.s. si $\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$.

On note $\mathcal{L}^2(\Omega)$, l'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω à valeurs réelles qui admettent un moment d'ordre 2 sur Ω pour la probabilité $\mathbf{P}$.

On admet que $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est un espace vectoriel ce qui signifie que pour tout $(X, Y) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs réelles, discrète, qui admet un moment d'ordre 2. On admet de plus que, XY admet une espérance et $|\mathbf{E}(XY)|^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$.

Enfin, on admet que l'espérance est une **forme linéaire** (sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires discrètes qui admettent une espérance).

1. Étude de la relation d'équivalence $=$ p.s.

(a) Montrer que l'égalité presque sûrement est une relation d'équivalence sur l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω .

(b) Montrer que si $X_1 = X_2$ p.s. et $Y_1 = Y_2$ p.s. alors :

i. $X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$ p.s.

ii. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X_1 = \lambda X_2$ p.s.

Les résultats ci-dessus permettent de justifier que l'ensemble $L^2(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^2(\Omega)}{= \text{p.s.}}$ des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ pour la relation d'égalité presque sûre peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois suivantes : pour tout $(X, Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega)^2$, en notant $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ leurs classes respectives dans $L^2(\Omega)$,

$$\bar{X} + \bar{Y} = \overline{X + Y} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \bar{X} = \overline{\lambda X}$$

Pour tout $(X, Y) \in \mathcal{L}^2(\Omega)^2$ et $(X', Y') \in \mathcal{L}^2(\Omega)^2$ tels que $X = X'$ p.s. et $Y = Y'$ p.s., on admet que

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X'Y')$$

ce qui permet de définir l'application

$$\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle = \mathbf{E}(XY)$$

puisque le résultat ne dépend pas du couple de représentants choisis dans les classes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$.

Finalement, les classes sont manipulées via le choix d'un représentant et « tout se passe bien » (à l'image des calculs dans les anneaux de congruence $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$).

2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $L^2(\Omega)$.

D. Optimisation pour des inconnues aléatoires

On considère dans cette partie deux variables aléatoires X et Y réelles discrètes, définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ admettant chacune des moments d'ordre 1 et 2 ce qui permet de considérer leur espérance et leur variance.

On se place sur l'espace préhilbertien réel $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire : $\langle Z_1, Z_2 \rangle = \mathbf{E}(Z_1 Z_2)$ (puisque les classes d'équivalences sont manipulées via le choix de l'un de leur représentant, on s'affranchit de la notation de la classe considérée).

On cherche à mesurer l'éventuelle influence d'une variable aléatoire X sur une variable aléatoire Y .

On suppose de plus que $X \neq 0$ p.s.

1. On suppose dans cette première question que l'on peut décrire Y sous forme d'une fonction affine de X , notée $Z = aX + b$.

On cherche à minimiser $f(a, b) = \|Y - Z\|^2 = \mathbf{E}((Y - Z)^2)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On note $F = \text{vect}(1, X)$ sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$.

(a) On note X^* , la variable aléatoire centrée réduite obtenue à partir de X .

Montrer que $(1, X^*)$ est une base orthonormée de F .

(b) Décrire explicitement la projection orthogonale $p_F^\perp$ sur F en fonction de $(1, X^*)$.

En déduire que $p_F^\perp(Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbf{V}(X)}X + \frac{\mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(XY)\mathbf{E}(X)}{\mathbf{V}(X)}$

(c) Montrer que $\mathbf{E}(p_F^\perp(Y)) = \mathbf{E}(Y)$ et que le produit : $\langle Y - p_H^\perp(Y), p_F^\perp(Y) - \mathbf{E}(Y) \rangle$ est nul.

(d) En déduire que $\min_{a, b \in \mathbb{R}} f(a, b) = \mathbf{V}(Y) - \mathbf{V}(p_F^\perp(Y))$.

Conclure que $\min_{a, b \in \mathbb{R}} f(a, b) = (1 - \rho^2(X, Y))\mathbf{V}(Y)$, où $\rho(X, Y)$ est le coefficient de corrélation de X et Y .

2. On suppose maintenant que X est une variable aléatoire réelle discrète connue.

En revanche, Y ne nous est connue que par la valeur de son espérance sous condition $X = x$, pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{E}(Y|X = x) := \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y)$$

On cherche donc Z , une variable aléatoire définie à partir de X , la plus proche possible de Y .

On suppose que $Z \in \text{vect}((\mathbf{1}_{(X=x)})_{x \in X(\Omega)})$ et $\|Y - Z\|$ minimal.

(a) Montrer que la famille $((\frac{\mathbf{1}_{(X=x)}}{\sqrt{\mathbf{P}(X=x)}})_{x \in X(\Omega)})$ est une famille orthonormale.

(b) Calculer $\langle Y, \frac{\mathbf{1}_{(X=x)}}{\sqrt{\mathbf{P}(X=x)}} \rangle$. On suppose donc désormais que $Z = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{E}(Y|X = x) \mathbf{1}_{(X=x)}$.

(c) Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(Y)$.

On admettra qu'on peut appliquer le lemme de Fubini ici :
$$\sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} a_{x,y} \right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} a_{x,y} \right)$$

(d) On reprend les notations de la partie B.

On considère $X = S_1 (= X_1)$ et $Y = X_2$.

i. Montrer que $\forall k \leq n, \mathbf{E}(Y|X = k) = \mathbf{E}(X_2|S_1 = k) = (n - k)p$

ii. Exprimer alors la variable aléatoire Z et calculer $\mathbf{E}(Z)$.

iii. Retrouver alors $\mathbf{E}(X_2)$ de deux façons (avec Z et $S_2 - S_1$)

La première méthode présentée ici correspond, en statistiques, à la recherche par la méthode des moindres carrés.

La seconde méthode correspond à une définition naturelle de l'espérance conditionnelle : meilleure approximation de Y sur l'espace des combinaisons linéaires des indicatrices constituant X .