



## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Problème - Fonctions définies sur des angles nules et droits. Et plus loin ?

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

**Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits.  
Et plus loin ?**

**Problème - Unicité de mesures d'angles**

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

**Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits.  
Et plus loin ?**

**Problème - Unicité de mesures d'angles**

**Problème - Relation entre les formules de trigonométrie**

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

**Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits.  
Et plus loin ?**

**Problème - Unicité de mesures d'angles**

**Problème - Relation entre les formules de trigonométrie**

**Problème - Equation polynomiale et trigonométrie**

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

**Problème - Fonctions définies sur des angles nulles et droits.  
Et plus loin ?**

**Problème - Unicité de mesures d'angles**

**Problème - Relation entre les formules de trigonométrie**

**Problème - Equation polynomiale et trigonométrie**

**Problème - Fonction réciproque**

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

#### 2.1. Construction historique

#### 2.2. Fonctions sinus et cosinus

#### 2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

#### 3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## **Analyse** Triangles rectangles semblables

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

**Analyse** Triangles rectangles semblables

**Analyse** Simplification : hypoténuse égale à 1

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

**Analyse** Triangles rectangles semblables

**Analyse** Simplification : hypoténuse égale à 1

**Analyse** Mesure naturelle d'angle

## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

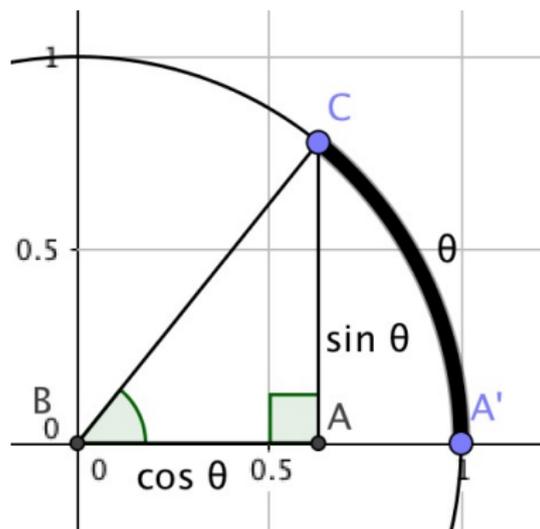
3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Représentation

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus



1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Périodicité et symétrie

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

On a alors les résultats suivants (à savoir retrouver)

## Exercice

Compléter les résultats suivants :

$$\sin(-\theta) = \quad \cos(-\theta) = \quad \sin(\theta + \pi) = \quad \cos(\theta + \pi) =$$

$$\sin(\pi - \theta) = \quad \cos(\pi - \theta) = \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

## Définition - Congruence modulo $\alpha$

Soient  $\theta, \theta'$  et  $\alpha$  trois réels.

On dit que  $\theta$  est congru à  $\theta'$  modulo  $\alpha$

s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \theta' + k\alpha$  tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \theta' + k\alpha$$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Définition - Congruence modulo $\alpha$

Soient  $\theta, \theta'$  et  $\alpha$  trois réels.

On dit que  $\theta$  est congru à  $\theta'$  modulo  $\alpha$

s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \theta' + k\alpha$  tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \theta' + k\alpha$$

## Proposition - Propriétés des congruences

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$  :

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$  (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$  (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha] \text{ et } \theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$  (transitivité)

On dit que la congruence modulo  $\alpha$  est une relation d'équivalence.

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Congruence

## Définition - Congruence modulo $\alpha$

Soient  $\theta, \theta'$  et  $\alpha$  trois réels.

On dit que  $\theta$  est congru à  $\theta'$  modulo  $\alpha$

s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\theta = \theta' + k\alpha$  tel que

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \theta' + k\alpha$$

## Proposition - Propriétés des congruences

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$  :

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$  (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$  (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha] \text{ et } \theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$  (transitivité)

On dit que la congruence modulo  $\alpha$  est une relation d'équivalence.

## Démonstration

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$\sin \theta = \sin \theta' \iff$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \iff$$

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Savoir-faire. Cas d'égalité de sinus ou de cosinus

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$\sin \theta = \sin \theta' \iff$$

$$\cos \theta = \cos \theta' \iff$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Définition

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Définition - Tangente d'un angle

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ . On appelle *tangente* de  $\theta$  le réel, noté  $\tan \theta$ , défini par :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Définition

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Définition - Tangente d'un angle

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ . On appelle *tangente* de  $\theta$  le réel, noté  $\tan \theta$ , défini par :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

**Remarque** Fonction cotangente

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ . On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Proposition - (Im)parité et périodicité

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ . On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

## Démonstration

## Exercice

Etudier et représenter la fonction  $\tan$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

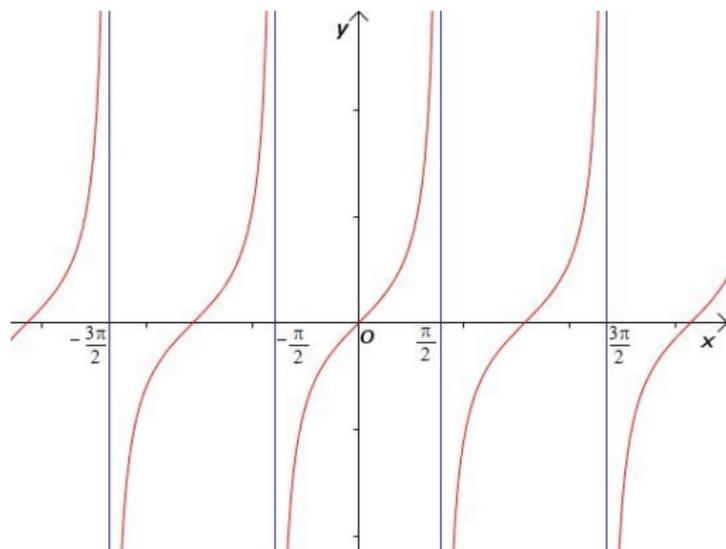
**2.3. Fonction tangente**

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Exercice

Etudier et représenter la fonction  $\tan$



⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

**2.3. Fonction tangente**

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Proposition - Cas d'égalité de tangentes

Pour tout  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$  on a :

$$\tan \theta = \tan \theta' \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [\pi]$$

## ⇒ Construction historique de la trigonométrie

## ⇒ Formule de Regiomontanus

### 1. Problèmes

### 2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

### 3. Formules trigonométriques

3.1. Formules de Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# A savoir !!!

Très important ! A connaître par coeur, absolument ! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi...

## Proposition. Formules fondamentales

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{où } \cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Piste pour retenir. . .

## Trucs et astuces. Exploiter les symétries du calcul

Une piste pour retrouver la formule  $\cos(a + b)$ .

Nous savons qu'il existe une relation, mais laquelle. Notons

$$\varphi(a, b) = \cos(a + b).$$

La relation doit vérifier :

- ▶  $\varphi(b, a) = \varphi(a, b)$ , cela ne peut donc pas être  $\varphi(a, b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ .
- ▶  $\varphi(-a, -b) = \varphi(a, b)$ , cela ne peut donc pas être  $\varphi(a, b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .
- ▶  $\varphi(a, -a) = \cos(0) = 1$ , cela ne peut donc pas être  $\varphi(a, b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ , dans ce cas  $\varphi(a, -a) = \cos^2 a - \sin^2 a \neq 1$  (pour la plupart des  $a$ )

# Démonstration

## Démonstration

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus



# Autre démonstration

## Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note  $f : x \mapsto \cos(a + x)$ . Montrer que  $f$  est solution du

$$\text{problème de Cauchy : } \begin{cases} y'' + y &= & 0 \\ y(0) &= & \cos a \\ y'(0) &= & -\sin(a) \end{cases} .$$

En déduire une expression de  $f$ .

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Autre démonstration

### Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note  $f : x \mapsto \cos(a + x)$ . Montrer que  $f$  est solution du

$$\text{problème de Cauchy : } \begin{cases} y'' + y &= & 0 \\ y(0) &= & \cos a \\ y'(0) &= & -\sin(a) \end{cases} .$$

En déduire une expression de  $f$ .

Nouveau moyen mnemotechnique

### Trucs et astuces. Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \cos(a + x)$  est une fonction, combinaison linéaire de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

Il existe  $A, B$  indépendant de  $x$  tel que

$$\cos(a + x) = A \cos x + B \sin x.$$

En particulier pour  $x = 0$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  :  $\cos a = A \times 1 + B \times 0$  et

$$\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a = A \times 0 + B \times 1.$$

Donc pour tout  $a, x \in \mathbb{R}$  :  $\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$ .

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Autre démonstration

Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note  $f : x \mapsto \cos(a + x)$ . Montrer que  $f$  est solution du

$$\text{problème de Cauchy : } \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = \cos a \\ y'(0) = -\sin(a) \end{cases} .$$

En déduire une expression de  $f$ .

Nouveau moyen mnemotechnique

Trucs et astuces. Combinaison linéaire en  $\cos x$  et  $\sin x$ 

$x \mapsto \sin(a + x)$  est une fonction, combinaison linéaire de  $\cos x$  et  $\sin x$ .

Il existe  $C, D$  indépendant de  $x$  tel que

$$\sin(a + x) = C \cos x + D \sin x.$$

En particulier pour  $x = 0$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  :  $\sin a = C \times 1 + D \times 0$  et

$$\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos a = C \times 0 + D \times 1.$$

Donc pour tout  $a, x \in \mathbb{R}$  :  $\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$ .

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

### Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

## Formules essentielles

Savoir les déduire ou les retrouver.

### Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

### Exercice

Démontrer ces formules

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

- ▶ Définition bancaire de  $\sin$  et  $\cos$  (à partir d'un triangle rectangle).  
Puis  $\tan$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Construction historique de la trigonométrie

- ▶ Définition bancaire de  $\sin$  et  $\cos$  (à partir d'un triangle rectangle).  
Puis  $\tan$
- ▶ Définition naturelle de la mesure d'angle en radian

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Construction historique de la trigonométrie

- ▶ Définition bancaire de  $\sin$  et  $\cos$  (à partir d'un triangle rectangle).  
Puis  $\tan$
- ▶ Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- ▶ Inégalité fondamentale :  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Construction historique de la trigonométrie

- ▶ Définition bancaire de  $\sin$  et  $\cos$  (à partir d'un triangle rectangle).  
Puis  $\tan$
- ▶ Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- ▶ Inégalité fondamentale :  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$
- ▶ Extension de  $\cos$  et  $\sin$  pour des angles non compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Construction historique de la trigonométrie

- ▶ Définition bancaire de  $\sin$  et  $\cos$  (à partir d'un triangle rectangle).  
Puis  $\tan$
- ▶ Définition naturelle de la mesure d'angle en radian
- ▶ Inégalité fondamentale :  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$
- ▶ Extension de  $\cos$  et  $\sin$  pour des angles non compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$
- ▶ Propriétés simples de symétrie et parité (à savoir retrouver)

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- ▶ Base :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

- ▶ Base :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .
- ▶  $\tan(a + b)$ ,  $\cos 2\theta \dots$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

▶ Base :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .

▶  $\tan(a + b)$ ,  $\cos 2\theta$ ...

▶ Connaître l'usage de la tangente moitié :  $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,  
 $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$  et  $\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

▶ Base :  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  et  
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .

▶  $\tan(a + b)$ ,  $\cos 2\theta$ ...

▶ Connaître l'usage de la tangente moitié :  $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,  
 $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$  et  $\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$ ,

▶ Savoir effectuer la transformation du physicien :  
 $A \cos t + B \sin t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(t - \varphi)$ ...

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques

3.1. Formules de  
Regiomontanus

# Conclusion

⇒ Histoire

⇒ Regiomontanus

## Objectifs

⇒ Construction historique de la trigonométrie

⇒ Formule de Regiomontanus

## Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 3  
4. Trigonométrie réciproque
- ▶ Exercice n° 67 & 74
- ▶ TD : 8h-10h : 71, 68a ( $T_n$ ), 70b, 76, 72, 78  
10h-12h : 69, 68b ( $U_n$ ), 70a, 75, 73, 79

1. Problèmes

2. Fonctions  
trigonométriques

2.1. Construction historique

2.2. Fonctions sinus et cosinus

2.3. Fonction tangente

3. Formules  
trigonométriques3.1. Formules de  
Regiomontanus