

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Problème - Optimisation par FERMAT. Raisonement prédérivatoire

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

**Problème - Optimisation par FERMAT. Raisonement
prédérivatoire**

Problème - Optimisation

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

**Problème - Optimisation par FERMAT. Raisonement
prédériveratoire**

Problème - Optimisation

Problème - Dérivation : concept local ou global ?

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Problème - Dérivations de fonctions usuelles et des opérations

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Problème - Dérivations de fonctions usuelles et des opérations

Problème - Se concentrer sur un problème

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Problème - Dérivations de fonctions usuelles et des opérations

Problème - Se concentrer sur un problème

Problème - Etude de fonctions (à valeurs) complexes

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Remarque Connaissance a priori

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Remarque Connaissance a priori

Heuristique. Infinitésimaux

Le calcul différentiel et le calcul intégral ont été finalisés indépendamment et associés par Leibniz (1684) et Newton (1671, publié en 1736).

Leurs raisonnement repose sur une notion floue d'infinitésimaux (ou de fluente), notion non convaincante à l'époque.

Johan Bernoulli (1692) popularise auprès de toute sa dynastie, du marquis de L'Hospital et surtout d'Euler, la découverte de Leibniz (« une énigme plutôt qu'une explication ») et pense que des explications trop abondantes au sujet de l'infiniment petit pourrait troubler l'entendement de ceux qui ne sont pas « accoutumés à de longues explications ».

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Remarque Connaissance a priori

Heuristique. Infinitésimaux

En fait, il manque la notion claire de limite, dont d'Alembert (1754) s'approche le plus. La bonne notion de limite est définie par Bolzano (1817), Cauchy (1823) ou Weierstrass (1861) et donnent ainsi une définition bien formalisée et solide mathématiquement (permettant de démontrer des résultats), abandonnant la notion d'Infinitésimaux.

Ce chapitre s'appuie sur des mathématiques du XVII. Nous ferons les démonstrations après avoir défini la notion de limite.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Remarque Connaissance a priori

Heuristique. Infinitésimaux

En fait, il manque la notion claire de limite, dont d'Alembert (1754) s'approche le plus. La bonne notion de limite est définie par Bolzano (1817), Cauchy (1823) ou Weierstrass (1861) et donnent ainsi une définition bien formalisée et solide mathématiquement (permettant de démontrer des résultats), abandonnant la notion d'Infinitésimaux.

Ce chapitre s'appuie sur des mathématiques du XVII. Nous ferons les démonstrations après avoir défini la notion de limite.

Remarque Cours de physique

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Remarque Connaissance a priori

Heuristique. Infinitésimaux

En fait, il manque la notion claire de limite, dont d'Alembert (1754) s'approche le plus. La bonne notion de limite est définie par Bolzano (1817), Cauchy (1823) ou Weierstrass (1861) et donnent ainsi une définition bien formalisée et solide mathématiquement (permettant de démontrer des résultats), abandonnant la notion d'Infinitésimaux.

Ce chapitre s'appuie sur des mathématiques du XVII. Nous ferons les démonstrations après avoir défini la notion de limite.

Remarque Cours de physique

Remarque Limite

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Définition - Nombre dérivée

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.
 f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, définie sur
 $I - \{x_0\}$, admet une limite finie en x_0 .

On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .
 $f'(x)$ s'appelle le nombre dérivé en x et la fonction qui à $x \in I$
associe $f'(x)$ s'appelle la (fonction) dérivée de f .

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Nombre dérivé

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Définition - Nombre dérivée

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.
 f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, définie sur
 $I - \{x_0\}$, admet une limite finie en x_0 .

On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .
 $f'(x)$ s'appelle le nombre dérivé en x et la fonction qui à $x \in I$
associe $f'(x)$ s'appelle la (fonction) dérivée de f .

Voir Nombre dérivée

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Définition de Weierstrass (équivalente)

On donne parfois une définition équivalent.

Avantage : elle cache la question de la limite dans l'hypothèse de continuité.

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Définition de Weierstrass (équivalente)

On donne parfois une définition équivalent.

Avantage : elle cache la question de la limite dans l'hypothèse de continuité.

Proposition - Définition de Weierstrass

Soit f définie sur un intervalle. Soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si

il existe $A \in \mathbb{R}$, $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue en x_0 avec $\epsilon(x_0) = 0$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(A + \epsilon(x))$$

On a alors $f'(x_0) = A$

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Définition de Weierstrass (équivalente)

On donne parfois une définition équivalent.

Avantage : elle cache la question de la limite dans l'hypothèse de continuité.

Proposition - Définition de Weierstrass

Soit f définie sur un intervalle. Soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en x_0 si et seulement si

il existe $A \in \mathbb{R}$, $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue en x_0 avec $\epsilon(x_0) = 0$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(A + \epsilon(x))$$

On a alors $f'(x_0) = A$

Démonstration

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Développements limités et calculs d'équivalents

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Application. Pour quelques fonctions usuelles (connaissant les dérivées en 0

On trouve avec $\epsilon_i(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + x\epsilon_1(x)$$

$$\ln(1+x) = x + x\epsilon_2(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\epsilon_3(x)$$

C'est le début du calcul des équivalents.

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Développements limités et calculs d'équivalents

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Application. Pour quelques fonctions usuelles (connaissant les dérivées en 0

On trouve avec $\epsilon_i(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + x\epsilon_1(x)$$

$$\ln(1+x) = x + x\epsilon_2(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\epsilon_3(x)$$

C'est le début du calcul des équivalents.

C'est le début du calcul des équivalents.

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Définition - Équation de la tangente

Soit f définie sur I , dérivable en $x_0 \in I$.

La droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle la tangente à la courbe représentative de f en $M(x_0, f(x_0))$

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Tangente

Définition - Équation de la tangente

Soit f définie sur I , dérivable en $x_0 \in I$.

La droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle la tangente à la courbe représentative de f en $M(x_0, f(x_0))$

Truc & Astuce pour le calcul. A propos de la tangente

On notera :

- ▶ qu'il s'agit bien de l'équation d'une droite ($y = ax + b$)
- ▶ qu'elle passe bien par le point M :
 $f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$
- ▶ que sa pente vaut $f'(x_0)$

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Démontrés plus tard dans l'année (but : se former pour le calcul !)

Proposition - Résultats

Si u, v sont dérivables en x_0 ,

- ▶ $u + v, uv, u^n, \exp u$ sont dérivables en x_0 ;
- ▶ si, en outre, u ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 , alors $\frac{1}{u}, \ln |u|$ sont dérivables en x_0 ;
- ▶ si, en outre, v ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 et alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 ;
- ▶ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si, en outre, u est strictement positive sur un intervalle contenant x_0 , alors u^α est dérivable en x_0 ;
- ▶ si $u \circ \phi$ est définie, si ϕ est dérivable en x_0 et u dérivable en $\phi(x_0)$ alors $u \circ \phi$ est dérivable en x_0 et $(u \circ \phi)'(x_0) = \phi'(x_0) \times u'(\phi(x_0))$.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Proposition - Résumé des formules usuelles de dérivation

fonction f de la forme	fonction dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$u_1 u_2 \dots u_n$	$u_1' u_2 \dots u_n + u_1 u_2' u_3 \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n'$
u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ \phi$	$\phi' \times u' \circ \phi = u' \circ \phi \times \phi'$
$u_1 \circ \dots \circ u_n$	$(u_1' \circ u_2 \circ \dots \circ u_n) \times (u_2' \circ u_3 \circ \dots \circ u_n) \times \dots \times u_n'$
$\exp u$	$u' \times \exp u$
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
u^α où $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Sous réserve de dérivabilité des fonctions ...

Proposition - Résumé des formules usuelles de dérivation

fonction f de la forme	fonction dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$u_1 u_2 \dots u_n$	$u'_1 u_2 \dots u_n + u_1 u'_2 u_3 \dots u_n + \dots + u_1 u_2 \dots u_{n-1} u'_n$
u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$nu' u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ \phi$	$\phi' \times u' \circ \phi = u' \circ \phi \times \phi'$
$u_1 \circ \dots \circ u_n$	$(u'_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_n) \times (u'_2 \circ u_3 \circ \dots \circ u_n) \times \dots \times u'_n$
$\exp u$	$u' \times \exp u$
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
u^α où $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Sous réserve de dérivabilité des fonctions ...

Exercice

Avec les résultats admis en début de chapitre, démontrer la formule de dérivation de $u \times v$.

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

**2.5. Dérivation de fonctions
usuelles**

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Savoir-faire. Encadrement pour le calcul de limite

Pour obtenir des résultats sur les limites (indéterminées), la meilleure stratégie est l'encadrement :

si $a(x) \leq b(x) \leq c(x)$ et que a et c admettent la même limite en x_0 égale à ℓ ,

alors b admet également une limite en x_0 , égale à ℓ .

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles**
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Fonctions exponentielles

Savoir-faire. Encadrement pour le calcul de limite

Pour obtenir des résultats sur les limites (indéterminées), la meilleure stratégie est l'encadrement :

si $a(x) \leq b(x) \leq c(x)$ et que a et c admettent la même limite en x_0 égale à ℓ ,

alors b admet également une limite en x_0 , égale à ℓ .

Analyse. Exponentielle (naturelle) en 0.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Fonctions exponentielles

Savoir-faire. Encadrement pour le calcul de limite

Pour obtenir des résultats sur les limites (indéterminées), la meilleure stratégie est l'encadrement :

si $a(x) \leq b(x) \leq c(x)$ et que a et c admettent la même limite en x_0 égale à ℓ ,

alors b admet également une limite en x_0 , égale à ℓ .

Analyse. Exponentielle (naturelle) en 0.

Proposition - Dérivation des fonctions exponentielles

\exp est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Si $f : x \mapsto a^x$, alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f'(x) = \ln a \times a^x$.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Savoir-faire. Transférer un problème exponentiel « en a »,
vers « en 0 »

Si on étudie \exp au voisinage de a , donc des points de la forme
 $a + h$ avec h proche de 0,

on exploite $\exp(a + h) = \exp a \times \exp(h)$.

Donc on factorise (à l'extérieur) par $\exp a$ et on se concentre sur
une étude en ϵ , ϵ proche de 0

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Savoir-faire. Transférer un problème exponentiel « en a »,
vers « en 0 »

Si on étudie \exp au voisinage de a , donc des points de la forme
 $a + h$ avec h proche de 0,

on exploite $\exp(a + h) = \exp a \times \exp(h)$.

Donc on factorise (à l'extérieur) par $\exp a$ et on se concentre sur
une étude en ϵ , ϵ proche de 0

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions
usuelles
- 2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Par addition et composition (démontrée plus loin)

Proposition - Fonction trigonométrique hyperbolique

Les fonctions ch , sh et th sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}x, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}x \text{ et}$$
$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}x}.$$

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Par addition et composition (démontrée plus loin)

Proposition - Fonction trigonométrique hyperbolique

Les fonctions ch , sh et th sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}x, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}x \text{ et}$$
$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}x}.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Par addition et composition (démontrée plus loin)

Proposition - Fonction trigonométrique hyperbolique

Les fonctions ch , sh et th sont dérivables sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}x, \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}x \text{ et}$$
$$\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}x}.$$

Démonstration

Remarque $\frac{\partial}{\partial x} e^{-x}$?

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Logarithme

Analyse Logarithme (naturel) en 1

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

**2.5. Dérivation de fonctions
usuelles**

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Analyse Logarithme (naturel) en 1

Proposition - Dérivation des fonctions logarithmes

\ln est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Si $g : x \mapsto \ln_a(x)$, alors g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
 $g'(x) = \frac{1}{(\ln a) \times x}$.

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles**
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Logarithme

Analyse Logarithme (naturel) en 1

Proposition - Dérivation des fonctions logarithmes

\ln est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Si $g : x \mapsto \ln_a(x)$, alors g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
 $g'(x) = \frac{1}{(\ln a) \times x}$.

Savoir-faire. Transférer un problème logarithme « en a », vers « en 1 »

Si on étudie \ln au voisinage de a , donc des points de la forme $a + h$ avec h proche de 0,

on factorise (à l'intérieur) par a : $a + h = a(1 + \frac{h}{a})$ et exploite
 $\ln(a + h) = \ln a + \ln(1 + \frac{h}{a})$.

Et on se concentre sur une étude en $1 + \epsilon$, ϵ proche de 0

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Logarithme

Analyse Logarithme (naturel) en 1

Proposition - Dérivation des fonctions logarithmes

\ln est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Si $g : x \mapsto \ln_a(x)$, alors g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
 $g'(x) = \frac{1}{(\ln a) \times x}$.

Savoir-faire. Transférer un problème logarithme « en a », vers « en 1 »

Si on étudie \ln au voisinage de a , donc des points de la forme $a + h$ avec h proche de 0,

on factorise (à l'intérieur) par $a : a + h = a(1 + \frac{h}{a})$ et exploite
 $\ln(a + h) = \ln a + \ln(1 + \frac{h}{a})$.

Et on se concentre sur une étude en $1 + \epsilon$, ϵ proche de 0

Démonstration

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Proposition - Fonctions puissances

La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition (privé de 0, si besoin : $\alpha - 1 < 0$ alors que $\alpha > 0$), de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Proposition - Fonctions puissances

La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition (privé de 0, si besoin : $\alpha - 1 < 0$ alors que $\alpha > 0$), de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Fonctions puissances

Proposition - Fonctions puissances

La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition (privé de 0, si besoin : $\alpha - 1 < 0$ alors que $\alpha > 0$), de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

Par sommation :

Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sont dérivables sur \mathbb{R} et précisément,

si $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k a_k x^{k-1}$.

On notera qu'il s'agit encore d'un polynôme, de degré $\deg f - 1$.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Proposition - Fonction trigonométrique

\sin , \cos et \tan sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin x. \quad \text{et pour}$$
$$\text{tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Proposition - Fonction trigonométrique

\sin , \cos et \tan sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin x. \quad \text{et pour}$$
$$\text{tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

⇒ **Les bases de la dérivation de fonctions réelles**

⇒ **Dérivation de fonctions usuelles**

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...

Dérivations successives

Définition - Dérivables

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I .

On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I , on note f'' la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').

Si f'' est encore dérivable sur I , on dit que f est trois fois dérivable sur I et on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ sa dérivée troisième, et ainsi de suite.

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Dérivations successives

Définition - Dérivables

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I .

On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I , on note f'' la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').

Si f'' est encore dérivable sur I , on dit que f est trois fois dérivable sur I et on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ sa dérivée troisième, et ainsi de suite.

Définition - Fonction de classe \mathcal{C}^k

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 ou continûment dérivable si elle est dérivable et que f' est continue, de classe \mathcal{C}^2 ou 2 fois continûment dérivable si elle est deux fois dérivable et que f'' est continue...

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Proposition - Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles vues précédemment sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition (sauf les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ qui peuvent perdre le 0 dans l'ensemble à la dérivée n -ième si $n > \alpha \dots$).

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

- ▶ Nombre dérivée (une limite) - *en un point*

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

- ▶ Nombre dérivée (une limite) - *en un point*
- ▶ Fonctions dérivée - *puis sur un intervalle*

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Objectifs

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

- ▶ Nombre dérivée (une limite) - *en un point*
- ▶ Fonctions dérivée - *puis sur un intervalle*
- ▶ Relation avec la tangente

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

- ▶ Nombre dérivée (une limite) - *en un point*
- ▶ Fonctions dérivée - *puis sur un intervalle*
- ▶ Relation avec la tangente
- ▶ Dérivation de l'application réciproque d'une fonction bijective :

$$(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1})}$$

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles
 - ▶ \exp' et toutes les exponentielles

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles
 - ▶ \exp' et toutes les exponentielles
 - ▶ \ln' et toutes les logarithmes.

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles
 - ▶ \exp' et toutes les exponentielles
 - ▶ \ln' et toutes les logarithmes.
 - ▶ \arccos , \arcsin \arctan

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Objectifs

- ⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles
- ⇒ Dérivation de fonctions usuelles

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

1. Problèmes

2. Dérivation

- 2.1. Approche historique
- 2.2. Dérivabilité
- 2.3. Approximation linéaire
- 2.4. Règles de dérivation
- 2.5. Dérivation de fonctions usuelles
- 2.6. Dérivées seconde, troisième...

Conclusion

⇒ Les bases de la
dérivation de
fonctions réelles

⇒ Dérivation de
fonctions usuelles

Objectifs

⇒ Les bases de la dérivation de fonctions réelles

⇒ Dérivation de fonctions usuelles

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 6
3. Utilisation de la dérivation
- ▶ Exercice n° 168

1. Problèmes

2. Dérivation

2.1. Approche historique

2.2. Dérivabilité

2.3. Approximation linéaire

2.4. Règles de dérivation

2.5. Dérivation de fonctions
usuelles

2.6. Dérivées seconde,
troisième...