Leçon 13 - Utilisation de la dérivation

19 septembre 2025

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Tableau de variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systématiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases !)

Tableau de variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systématiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases !)

Théorème - Monotonie et fonction dérivée

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I.
Alors :
f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) = 0$;
f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$;
f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$.
Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sauf en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Attention !

Attention. Intervalle

Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D, dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D, f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D.

Attention !

Attention. Intervalle

Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D, dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D, f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D.

Exercice

Donner une tel contre-exemple

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Théorème

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective de I sur J.
On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$ et on a alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Théorème

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective de I sur J. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$ et on a alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Remarque Se souvenir

Application : trigonométriques réciproques

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions $\arcsin$, $\arccos$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$,

avec $\forall\ x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $\arctan$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sir $\mathbb{R}$,

avec $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Application : trigonométriques réciproques

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions $\arcsin$, $\arccos$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$,

avec $\forall\ x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction $\arctan$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sir $\mathbb{R}$,

avec $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration

Théorèmes (3)

Corollaire

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est :

- continue strictement monotone sur l'intervalle I,
- dérivable sur I et
- $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$,

f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Savoir-faire

Savoir-faire. Bilan : f $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

Dans de nombreuses situations (mais pas toute), on étudie f si :

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (donc continue)
- f' ne s'annule pas (donc de signe constant)

alors f établit une bijection de I sur J.
Elle admet une application réciproque $f^{-1} : J \to I$, de classe $\mathscr{C}^1$ également sur J,
et $\forall\ t \in J$, $(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$.
Graphiquement : $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Bilan : f $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

Dans de nombreuses situations (mais pas toute), on étudie f si :

- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (donc continue)
- f' ne s'annule pas (donc de signe constant)

alors f établit une bijection de I sur J.
Elle admet une application réciproque $f^{-1} : J \to I$, de classe $\mathscr{C}^1$ également sur J,
et $\forall\ t \in J$, $(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$.
Graphiquement : $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$.

<u>Exercice</u>

Réciproque du sinus hyperbolique

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.
Compléter le tableau :

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)$	
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$	

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.
Compléter le tableau :

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)$	$f'(u)$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$	

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.
Compléter le tableau :

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)$	$f'(u)$
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$	$(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$

Du bon sens de la notation physicienne

On considère l'approche physicienne :

$$u \longrightarrow t$$

où u et t sont à la fois des variables *physiques*.
On note f la relation de u à t : $t = f(u)$. On suppose f (localement) bijective.
Compléter le tableau :

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)$	$f'(u)$
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}}$	$(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$

⇒ **Utilisation de la dérivation**

⇒ **Règle de L'Hospital et conséquences**

Obtenir une inégalité

Savoir-faire. Obtenir une inégalité

Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

Obtenir une inégalité

Savoir-faire. Obtenir une inégalité

Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

<u>Exercice</u>

Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, x - \frac{x^3}{6} \geqslant \sin x \geqslant x.$$

Obtenir un maximum

Savoir-faire. Obtenir un maximum

Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I, on résout $f'(x) = 0$.
On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).

- si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

Obtenir un maximum

Savoir-faire. Obtenir un maximum

Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I, on résout $f'(x) = 0$.
On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).

- si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

Remarque Convexité

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Limite du taux de variation

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d’une fonction dérivable connue.

Limite du taux de variation

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d'une fonction dérivable connue.

Exercice

Rappeler les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I, dérivables en $x_0 \in I$.
On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0.
Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I, dérivables en $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

On fait la démonstration dans le cas $g'(x_0) \neq 0$.
Sinon, on la refera en exploitant l'égalité des accroissements finis.
Démonstration

Règle de L'Hospital

Règle de L'Hôpital

Soient f et g deux fonctions définies sur I, dérivables en $x_0 \in I$. On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0.

Alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

On fait la démonstration dans le cas $g'(x_0) \neq 0$.
Sinon, on la refera en exploitant l'égalité des accroissements finis.
Démonstration

Attention. Pas d'abus

Cela ne s'applique pas en cas d'indetermination

$$-4 = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} \neq \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Application

Savoir-faire. Lever une indétermination par la règle de L'Hospital

1. On vérifie bien qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital :

$$f = \frac{n}{d} \text{ avec } n, d \to 0.$$

2. On calcule $n^{(k)}$ jusqu'à ce que $n^{(k_0)}(x) \not\to 0$.

De même on calcule $d^{(h)}$ jusqu'à ce que $d^{(h_0)}(x) \not\to 0$.

3. On note $m = \min(k_0, h_0)$, on connait $\lim \dfrac{n^{(m)}}{d^{(m)}}$.

4. Puis on remonte en répétant $m-1$ fois la règle de L'Hospital.

On sait seulement à ce stade que la (première) limite existe et on connait sa valeur.

Application

Savoir-faire. Lever une indétermination par la règle de L'Hospital

1. On vérifie bien qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital :
$f = \frac{n}{d}$ avec $n, d \to 0$.
2. On calcule $n^{(k)}$ jusqu'à ce que $n^{(k_0)}(x) \not\to 0$.
De même on calcule $d^{(h)}$ jusqu'à ce que $d^{(h_0)}(x) \not\to 0$.
3. On note $m = \min(k_0, h_0)$, on connait $\lim \dfrac{n^{(m)}}{d^{(m)}}$.
4. Puis on remonte en répétant $m-1$ fois la règle de L'Hospital.
On sait seulement à ce stade que la (première) limite existe et on connait sa valeur.

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{x^3 + 5x^2}$

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Locale !

Heuristique. Approximation polynomiale LOCALE

Nos fonctions usuelles ne sont pas des polynômes, on ne cherche par à remplacer une fonction usuelle par une fonction polynomiale sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant une infinité de points.
Mais on peut faire des comparaison au voisinage d'un point.
La définition de Weierstrass de la dérivabilité de φ en x_0 avec pour valeur $A(=\varphi'(x_0))$ exprime :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \epsilon : I \to \mathbb{R} \text{ continue en } x_0 \text{ avec } \epsilon(x_0) = 0 \text{ tel que :}$$

$$\forall\, x \in I, \varphi(x) = \varphi(x_0) + A(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x)$$

On va donc chercher une fonction polynomiale f de degré n tel que

$$\varphi(x) = f(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x) \qquad \text{avec } \epsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

On commence par étudier les cas $x_0 = 0$.

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère φ de classe C^{n+1} sur I, contenant 0.
On note $T : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Alors : $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - T(x)}{x^n}$.
Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = T(x) + x^n \epsilon(x)$.

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère φ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, contenant 0.
On note $T : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Alors : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x) - T(x)}{x^n}$.
Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = T(x) + x^n \epsilon(x)$.

On commence par un lemme (qui sera enrichit dans la suite du cours)

Lemme - Dérivation monôme

Notons $m_s : x \mapsto x^s$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_s^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq s$ et $m_s^{(s)}(0) = s!$.

Autour de 0

Proposition - Développement polynomiale en 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère φ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, contenant 0.
On note $T : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Alors : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x) - T(x)}{x^n}$.
Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = T(x) + x^n \epsilon(x)$.

On commence par un lemme (qui sera enrichit dans la suite du cours)

Lemme - Dérivation monôme

Notons $m_s : x \mapsto x^s$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_s^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq s$ et $m_s^{(s)}(0) = s!$.

Démonstrations

Applications

Exemple DL de $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$

Applications

Exemple DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$

Exercice

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

- Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima...

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

- Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima...
- Dérivabilité d'une fonction réciproque et lien entre f' et $(f^{-1})'$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Utilisation de la dérivation

- Etude de la variation de la fonction en déduire les maxima...
- Dérivabilité d'une fonction réciproque et lien entre f' et $(f^{-1})'$.
- Généralisation d'inégalité (d'encadrement pour l'analyse)

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Utilisation de la dérivation

$\Rightarrow$ Règle de L'Hospital et conséquences

- Lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ pour $x \to a (\in \mathbb{R})$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

- Lever une indétermination du type $\frac{0}{0}$ pour $x \to a (\in \mathbb{R})$.
- Développement limité de toute fonction f autour de a, par une fonction polynomiale de Taylor $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Utilisation de la dérivation

⇒ Règle de L'Hospital et conséquences

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Fonctions à valeurs complexes
- Exercice n° 188 & 189