Leçon 5 - Calculs et opérations avec $\sum$ (ou $\prod$)

⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

⇒ **Sommes doubles**

Sommation par paquets. Relation de Chasles

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r\in S}$ une famille d'ensembles indexés par S.
On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints :
$\forall\ r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset$.

Alors : $$\sum_{r\in S}\left(\sum_{k\in E_r} a_k\right) = \sum_{k\in \uplus_{r\in S} E_k} a_k$$

On voir apparaître ici une double somme. On en reparlera plus loin.

Sommation par paquets. Savoir-faire

Remarque Interversion des symboles $\sum$.

Sommation par paquets. Savoir-faire

Remarque Interversion des symboles $\sum$.

Savoir-faire. Exploiter une sommation par paquets

On a parfois intérêt à découper l'ensemble E en (réunion de) m sous-ensembles disjoints $E = E_1 \uplus E_2 \cdots \uplus E_m$.

On calculer alors la somme par paquets : $\displaystyle\sum_{k\in E} a_k = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k\in E_i} a_k \right)$.

Télescopage

La seule méthode qui donne une formule explicite (une forme fermée de la somme)

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Télescopage

La seule méthode qui donne une formule explicite (une forme fermée de la somme)

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir »le télescopage

Télescopage

La seule méthode qui donne une formule explicite (une forme fermée de la somme)

Savoir-faire. Méthode du télescopage (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$

Alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir »le télescopage

Exercice

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k}$.

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

⇒ **Sommes doubles**

Somme avec Pÿthon

Pour calculer $S = \sum_{i \in I} a_i$, la méthode est simple.

On exploite un raisonnement (calcul) par récurrence :

- avec une boucle `for` si I est bien connu (par exemple $\mathbb{N}_n$)
- avec une boucle `while` si I se découvre au fur et à mesure du calcul.

Somme avec Python

Python $\sum_{k=n}^{m} a(k)$

```
1  def Somme1(n,m):
2      S=0
3      for k in range(n,m+1):
4          S=S+a(k)
5      return(S)
```


⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

Somme avec Python

Python $\sum_{k=n}^{m} a(k)$

```
1  def Somme1(n,m):
2      S=0
3      for k in range(n,m+1):
4          S=S+a(k)
5      return(S)
```

Python $\sum_{i \mid f(i) \leqslant n} a(i)$

```
1  def Somme2(n):
2      S,i=0,0
3      while f(i)<=n:
4          S=S+a(i)
5          i=i+1
```


⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

Faire un programme

Remarque L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?

⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

Faire un programme

Remarque L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?

Truc & Astuce pour le calcul. Écrire un programme

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul. C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.
  Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Faire un programme

Remarque L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?

Truc & Astuce pour le calcul. Écrire un programme

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul. C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.
  Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Exercice

Ecrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$

Faire un programme

Remarque L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?

Truc & Astuce pour le calcul. Écrire un programme

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul. C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.
  Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Exercice

Ecrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$

Remarque Varier les paramètres et informatique

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

⇒ **Sommes doubles**

Trois sommes à connaître

⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Trois sommes à connaître

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à utiliser le télescopage.

Trois sommes à connaître

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à utiliser le télescopage.

Démonstration

Trois sommes à connaître

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à utiliser le télescopage.

Démonstration

Exercice Faire la récurrence

Invariant de boucle

Savoir-faire. Se passer du formalisme d'une récurrence ou invariant de boucle

On peut souvent se passer de la formalisation de la récurrence (mais avec les mêmes calculs).

Ici, on considère la suite $(u_n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On note que (calculs) : $u_{n+1} = u_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $u_1 = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. CQFD.

Somme arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de trm successifs= (nb de trm)×(moyenne des trm extrêmes)

Somme arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :
somme de trm successifs= (nb de trm)×(moyenne des trm extrêmes)

Démonstration

Somme arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de trm successifs= (nb de trm)×(moyenne des trm extrêmes)

Démonstration

Exercice

Et avec la méthode de Gauss (double somme inversée)

⇒ Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts

⇒ Sommes doubles

Somme géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Somme géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Démonstration

Somme géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Démonstration

Exercice

Calculer $1+2+4+8+16+32+64+128$

Une généralisation

On se rappelle avec les petits Bernoullis :

Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{b_a^{n-1}(b)}$$

Une généralisation

On se rappelle avec les petits Bernoullis :

Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{b_a^{n-1}(b)}$$

Exercice

Ecrire $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Une généralisation

On se rappelle avec les petits Bernoullis :

Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{b_a^{n-1}(b)}$$

Exercice

Ecrire $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$.

Une généralisation

On se rappelle avec les petits Bernoullis :

Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{b_a^{n-1}(b)}$$

Exercice

Ecrire $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$.

Démonstration

Une généralisation

On se rappelle avec les petits Bernoullis :

Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{b_a^{n-1}(b)}$$

Exercice

Ecrire $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$.

Démonstration

Exercice Peut-on factoriser $a^n + b^n$? Si oui, faites-le.

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

⇒ **Sommes doubles**

Heuristique. Somme matricielle

Heuristique. Somme à multiples indices

On peut faire une somme d'éléments pris dans un ensemble fini.
Mais la description de ces éléments n'est pas toujours naturellement données sous la forme $x_i, i \in [\![0, n]\!]$.
Parfois les éléments apparaissent comme les éléments d'un tableau (*matrice*) et sont donc doublement (ou plus) indexés : $x_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m$.
Les choses se présentent différemment selon que i et j sont « indépendants »entre eux ou non.

Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Analyse Du sens des formules

Comment décrire avec $\sum$ la somme

$$S = a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,m}+a_{2,1}+\cdots+a_{2,m}+\cdots+a_{n,1}+\cdots+a_{n,m} \text{ ?}$$

Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Analyse Du sens des formules

Comment décrire avec $\sum$ la somme

$S = a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,m}+a_{2,1}+\cdots+a_{2,m}+\cdots+a_{n,1}+\cdots+a_{n,m}$?

Définition - Somme double

On considère une famille de nombres réels ou complexes $(a_{i,j})$ indexée par deux indices i et j, i compris entre 1 et n, j compris entre 1 et m où n et m sont deux entiers non nuls donnés :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{array}$$

Leur somme est notée $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,j]\!]} a_{i,j}.$

Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Savoir-faire. Somme multiple (indépendance)

Première façon : sommer des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j},$$

Seconde façon : sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Savoir-faire. Somme multiple (indépendance)

Première façon : sommer des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j},$$

Seconde façon : sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque Diagonale

Factorisation

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} ij$

Factorisation

Exercice

Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} ij$ Comme le montre l'exercice précédent :

Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)

Soient des réels (ou des complexes) a_i et b_j, $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i b_j$$

Factorisation

Exercice

Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} ij$ Comme le montre l'exercice précédent :

Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)

Soient des réels (ou des complexes) a_i et b_j, $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i b_j$$

Démonstration

Cas i et j dépendants

Heuristique. Cas : i et j dépendants

Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire $a_{i,j}$.
Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre !
Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par j (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par i (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord i ou d'abord j).

Cas i et j dépendants

Heuristique. Cas : i et j dépendants

Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire $a_{i,j}$.
Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre !
Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par j (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par i (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord i ou d'abord j).

Analyse $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$

Cas i et j dépendants

Proposition - Somme double classique $\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}$

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famillle de nombres réels ou complexes :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

Exercices

Exercice

Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

Exercices

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

Savoir-faire. Somme multiple (dépendance)

On ordonne les indices de sommation :

1. On choisit celle qui sera la plus à l'extérieur (à gauche) des symboles $\sum$. Elle ne dépend que des paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent.

...

Exemple : $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j},$

Exercices

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$

Savoir-faire. Somme multiple (dépendance)

On ordonne les indices de sommation :

1. On choisit celle qui sera la plus à l'extérieur (à gauche) des symboles $\sum$. Elle ne dépend que des paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent.

...

Exemple : $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j},$

Analyse Sens de ces modes de sommations

⇒ **Savoir manipuler des sommes. Résultats exacts**

⇒ **Sommes doubles**

Exercices

Exercice

Retrouver la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} k$, en notant que $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} 1$.

Exercices

Exercice

Retrouver la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} k$, en notant que $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} 1$.

Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} d_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d_i d_j$.

Exercices

On peut aussi démontrer l'inégalité célèbre de Cauchy-Schwarz :

Exercice

1. En développant $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (a_i b_j - a_j b_i)^2$, montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{3} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^2\right).$$
2. De même, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
3. A quelle condition a-t-on :
$$\sum_{k=1}^{n} (a_i b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2 ?$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences
- Sommation par paquets

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences
- Sommation par paquets
- Exploiter le télescopage (parfait pour un résultat exact)

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

- Utiliser le changement d'indices
- Exploiter des récurrences
- Sommation par paquets
- Exploiter le télescopage (parfait pour un résultat exact)
- Quelques sommes à connaître : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\sum_{k=1}^{n} q^k$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

- Sens de $\sum_{i,j \in A} a_{i,j}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

- Sens de $\sum_{i,j\in A} a_{i,j}$
- Si i et j indépendants : le calcul est simple (factorisation ou succession)

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

- Sens de $\sum_{i,j\in A} a_{i,j}$
- Si i et j indépendants : le calcul est simple (factorisation ou succession)
- Si i et j sont liés : on s'adapte (c'est plus compliqué)

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

- Sens de $\sum_{i,j\in A} a_{i,j}$
- Si i et j indépendants : le calcul est simple (factorisation ou succession)
- Si i et j sont liés : on s'adapte (c'est plus compliqué)
- Un savoir faire : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

- Sens de $\sum_{i,j\in A} a_{i,j}$
- Si i et j indépendants : le calcul est simple (factorisation ou succession)
- Si i et j sont liés : on s'adapte (c'est plus compliqué)
- Un savoir faire : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$
- Cauchy-Schwarz

Conclusion

Objectifs

⇒ Savoir manipuler des sommes. Calculs exacts

⇒ Sommes doubles

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours :
  Chap 7 : Calculs avec des sommes et des produits.
  3. Coefficients binomiaux et formule du binôme
- Exercices 30 & 32
- TD de jeudi :
  8h-10h : 31, 34, 36, 38, 40, 44
  10h-12h : 33, 35, 37, 39, 41, 42, 43