Leçon 6 - Calculs et opérations avec $\sum$ (ou $\prod$)

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

Factorielle

Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$, on pose :

$$0! = 1 \text{ et pour } n \geqslant 1, n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \text{ qui se lit "factorielle } n\text{"}$$
$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ qui se lit « } p \text{ parmi } n \text{ »}$$

On généralise la notation à tout $p \in \mathbb{Z}$, si on n'a pas $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} = 0$

Factorielle

Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$, on pose :

$0! = 1$ et pour $n \geqslant 1, n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ qui se lit "factorielle n"

$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ qui se lit « p parmi n »

On généralise la notation à tout $p \in \mathbb{Z}$, si on n'a pas $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} = 0$

Remarque Plus tard...

Programmation

Python Calcul de la factorielle avec une boucle

```python
def factorielle(n):
    f=1
    for k in range(1,n):
        f=f*(k+1)
    return(f)
```

Propriétés du coefficient binomiale

Proposition - Propriétés

Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$\text{pour } p \leqslant n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

$$\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Propriétés du coefficient binomiale

Proposition - Propriétés

Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$\text{pour } p \leqslant n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

$$\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration

Propriétés du coefficient binomiale

Proposition - Propriétés

Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$\text{pour } p \leqslant n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

$$\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration

Exercice

Pour n, p, simplifier $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$. *On pourra y « voir »un télescopage*

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

Construction

De ces propriétés on déduit un moyen simple de calculer les coefficients binomiaux :

Construction

Savoir-faire. Triangle de Pascal

On peut alors construire le triangle de Pascal pour pouvoir calculer facilement (addition et non multiplication) les coefficients binomiaux. On écrit ainsi dans un tableau :

$$\begin{array}{cccccc} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccc} 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & \mathbf{2}^{=\mathbf{1}+\mathbf{1}} & 1 \\ 1 & \underline{3} & \underline{3} & 1 \\ 1 & 4 & \underline{6^{=3+3}} & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}$$

Propriétés

Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$, $n!$ et $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels.

Propriétés

Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$, $n!$ et $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels.

Remarque Convention

Programmation

Python Triangle de Pascal

En exploitant des listes (de listes) en informatique, il est possible de créer la n^{e}ligne du triangle de Pascal.

```
def Pascal(n):
    L=[0]*(n+1)
    for h in range(n+1):
        L[h]=[1]+[0]*n
    print(L)
    for h in range(n):
        for k in range(h+1):
            L[h+1][k+1]=L[h][k]+L[h][k+1]
    return(L)
```

$\Rightarrow$ Manipulation autour du coefficient binomial

Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration

Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration

Exercice

Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p \leqslant n; p \text{ pair}} \binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{0 \leqslant p \leqslant n; p \text{ impair}} \binom{n}{p}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Manipulation autour du coefficient binomial

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Manipulation autour du coefficient binomial

- $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Des relations fondamentales : dont la symétrie et la relation de Pascal $\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Manipulation autour du coefficient binomial

- $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Des relations fondamentales : dont la symétrie et la relation de Pascal $\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1}$
- Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Manipulation autour du coefficient binomial

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 : Ensembles.
- Exercices 45 & 46