

Leçon 6 - Calculs et opérations avec  $\sum$  (ou  $\prod$ )

Leçon 6 - Calculs et opérations avec ∑ (ou ∏)

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

roblèmes

2. Symboles ∑ et [

. Coefficients

du binôme

3.2 Triangle de Pascal

s.z. mangie de nascai

3.3. Formule du binôme

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- 3.1 Factorialles et coefficients hinomiauv

- 3. Coefficients binomiaux et formule du binôme
  - 3.1. Factorielles et coefficients binomiaux
  - 3.2. Triangle de Pascal

1. Quelques problèmes

2. Symboles  $\Sigma$  et  $\Pi$ 

3.3. Formule du binôme

Lecon 6 - Calculs et opérations avec ∑

- 3.1 Factorialles et coefficients hinomiauv

2. Symboles  $\Sigma$  et  $\Pi$ 

1. Quelques problèmes

- 3. Coefficients binomiaux et formule du binôme
  - 3.1. Factorielles et coefficients binomiaux

## Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ , on pose :

$$0!=1$$
 et pour  $n\geqslant 1, n!=n\times (n-1)\times \cdots \times 1$  qui se lit "factorielle  $n$ "  $\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$  qui se lit «  $p$  parmi  $n$  »

On généralise la notation à tout  $p \in \mathbb{Z}$ , si on n'a pas  $0 \le p \le n$ , alors  $\binom{n}{p} = 0$ 

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - . Coefficients inomiaux et formule
- 3.1. Factorielles et coefficients binomiaux
  - .2. Triangle de Pascal
- 3.3. Formule du binôme

3.1 Factorialles et coefficients

hinomiauv

#### 4 D > 4 同 > 4 豆 > 4 豆 > 豆 め Q (~

### Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ , on pose :

$$0!=1$$
 et pour  $n\geqslant 1, n!=n\times (n-1)\times \cdots \times 1$  qui se lit "factorielle  $n$ "  $\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$  qui se lit «  $p$  parmi  $n$  »

On généralise la notation à tout  $p \in \mathbb{Z}$ , si on n'a pas  $0 \le p \le n$ , alors  $\binom{n}{n} = 0$ 

Remarque Plus tard...

#### Python Calcul de la factorielle avec une boucle

1. Quelques problèmes

2. Symboles ∑ et ∏

Coefficients nomiaux et formul

du binôme
3.1. Factorielles et coefficients

binomiaux

. Triangle de Pascal

3.3. Formule du binôme

Pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ ,

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
- binomiaux et formule du binôme
- 3.1. Factorielles et coefficients binomiaux
  - .2. Triangle de Pascal

4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q C

Proposition - Propriétés

2. Symboles ∑ et ∏

binomiaux et formule du binôme

3.1. Factorielles et coefficients binomiaux

2. Triangle de Pascal

# Démonstration

Pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$   $\text{pour } p \leqslant n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \text{ et } \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \binom{n}{p}$   $\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n-1, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ 

4□ > 4□ > 4∃ > 4∃ > ∃ 900

 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$ 

pour  $1 \le p \le n-1$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ 

Proposition - Propriétés

Pour tout nombre  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}$ ,

hinomiauv

#### Démonstration

### Exercice

Pour n, p, simplifier  $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{p}$ . On pourra y « voir »un télescopage

pour  $p \le n$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ , et  $\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1} \binom{n}{p}$ 

binomial

3.1 Factorialles et coefficients

- ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial
- problèmes
- 2. Symboles ∑ et []
  - 3. Goefficients binomiaux et formule
- 3.1. Factorielles et coeffic
- 3.2. Triangle de Pascal
- 2.2 Formula du binâma
- 3.3. Formule du binôme

- 3. Coefficients binomiaux et formule du binôme
  - 3.1. Factorielles et coefficients binomiaux
  - 3.2. Triangle de Pascal

1. Quelques problèmes

2. Symboles  $\Sigma$  et  $\Pi$ 

3.3. Formule du binôme

#### Construction

De ces propriétés on déduit un moyen simple de calculer les coefficients binomiaux :

Leçon 6 - Calculs et opérations avec  $\sum$  (ou  $\prod$ )

- ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial
- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - Coefficients
- 3.1. Factorielles et coeffic
- 3.2. Triangle de Pascal
- .3. Formule du binôme

On peut alors construire le triangle de Pascal pour pouvoir calculer facilement (addition et non multiplication) les coefficients binomiaux. On écrit ainsi dans un tableau :

```
2=1+1
^{(5)}
                5
                                                               5
                                                                          10
                                                                                    10
```

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- problèmes
- z. Symboles Z. et []
  - Coefficients
- du binôme
- binomiaux
- 3.2. Triangle de Pascal

### problèmes

2. Symboles 2\_ et []

#### . Goefficients inomiaux et formule

3.1. Factorielles et coefficie

#### 3.2. Triangle de Pascal

3. Formule du binôme

### Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \le n$ , n! et  $\binom{n}{p}$  sont des entiers naturels.

#### 1. Quelques problèmes

2. Symboles ∑ et [

#### Coefficients

du binôme

#### binomiaux

3.2. Triangle de Pascal

3. Formule du binôme

### Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \le n$ , n! et  $\binom{n}{p}$  sont des entiers naturels.

**Remarque** Convention

Python Triangle de Pascal

```
2. Symboles 2_ et [
```

oinomiaux et formu

3.1. Factorielles et coeffi

3.2. Triangle de Pascal

3. Formule du binôme

```
de créer la n<sup>e</sup>ligne du triangle de Pascal.
      def Pascal(n):
           L = [0] * (n+1)
   2
           for h in range(n+1):
   3
                L[h]=[1]+[0]*n
   4
           print(L)
   5
           for h in range(n):
   6
                for k in range(h+1):
   7
                     L[h+1][k+1]=L[h][k]+L[h][k+1]
   8
           return(L)
   9
```

En exploitant des listes (de listes) en informatique, il est possible

- ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- 3.3. Formule du binôme

2. Symboles  $\Sigma$  et  $\Pi$ 

1. Quelques problèmes

- 3. Coefficients binomiaux et formule du binôme

  - 3.3. Formule du binôme

binomial

Symboles ∑ et [

nomiaux et formule

inomiaux

3.3. Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec a = b = 1:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - pinomiaux et formule lu binôme
  - oinomiaux
- 3.2. Triangle de Pascal
  3.3. Formule du binôme

3.3. Formule du binôme

#### Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec a = b = 1:

### Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

#### Démonstration

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et a, b deux réels (ou deux complexes). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec a = b = 1:

#### Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

#### Démonstration

#### Exercice

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- oroblèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - Coeπicients nomiaux et formule ι binôme
  - inomiaux
- 3.2. Triangle de Pascal
  3.3. Formule du binôme

### Conclusion

# Leçon 6 - Calculs et opérations avec ∑ (ou ∏)

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- Quelques problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - 3. Coeπicients binomiaux et formule du binôme
  - binomiaux
  - .2. Triangle de Pascal
  - 3.3. Formule du binôme

### **Objectifs**

 $\Rightarrow$  Manipulation autour du coefficient binomial

#### ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial
  - $n! = \prod_{k=1}^{n} k, \text{ et } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- problèmes
  - z. Symboles Z et []
    - Coefficients
  - du binôme
  - binomiaux
    - Triangle de Pasca

◆ロト 4周ト 4 至 ト 4 至 ト 至 めなべ

# ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \text{ et } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Des relations fondamentales : dont la symétrie et la relation de Pascal  $\binom{a+1}{b-1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$ 

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - s. Coefficients pinomiaux et formule
- 3.1. Factorielles et coefficients
  - 2. Triangle de Pascal

◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ ● 夕久○

### ⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \text{ et } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Des relations fondamentales : dont la symétrie et la relation de Pascal  $\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1}$
- Formule du binôme :  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - inomiaux et formule
  - binomiaux
  - .2. Triangle de Pascal
- 3.3. Formule du binôme

- problèmes
- 2. Symboles ∑ et ∏
  - Coefficients
- 3.1 Factorielles et coefficien
- binomiaux
- 3.2. Triangle de Pascal
- 3.3. Formule du binôme

#### **Objectifs**

⇒ Manipulation autour du coefficient binomial

#### Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 : Ensembles.
- Exercices 45 & 46