Leçon 7 - Calculs et opérations avec $\sum$ (ou $\prod$)

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Problème

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Problème

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Problème - Un simple langage ? Ou plus

Problème

Problème - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Problème - Un simple langage ? Ou plus

Problème -Inspiration

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Construction

Analyse - Formalisation

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
3. Formalisation (=légalisation) : définition

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
3. Formalisation (=légalisation) : définition
4. Manipulations : théorèmes et propositions

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
3. Formalisation (=légalisation) : définition
4. Manipulations : théorèmes et propositions
5. Démonstrations

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
3. Formalisation (=légalisation) : définition
4. Manipulations : théorèmes et propositions
5. Démonstrations
6. Manipulations : exercices, colles, devoirs. . .

Construction

Analyse - Formalisation

1. Quelques axiomes
2. Idées, images mentales, heuristiques, mots
3. Formalisation (=légalisation) : définition
4. Manipulations : théorèmes et propositions
5. Démonstrations
6. Manipulations : exercices, colles, devoirs...

Exercice Quelle proportion pour ces étapes au lycée ?

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Ensemble

Définition - Ensemble

Un ensemble est une "collection" d'objets appelés *éléments*. On introduit une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance* :

$x \in E$, ce qui se lit "x appartient à E" ou "x est un élément de E.

La négation de la relation d'appartenance s'écrit $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux.

Ensemble

Définition - Ensemble

Un ensemble est une "collection" d'objets appelés *éléments*. On introduit une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance* :

$x \in E$, ce qui se lit "x appartient à E" ou "x est un élément de E.

La négation de la relation d'appartenance s'écrit $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux.

Proposition - Propriété essentielle

Un ensemble est défini dés que pour tout objet x, on **peut dire** si x est, ou n'est pas, un élément de cet ensemble.

Exemples

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

$\exists x$ se lit « il existe x »,

$\exists! x$ se lit « il existe un unique x »,

Exemples

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

$\exists x$ se lit « il existe x »,

$\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

Attention. Pas d'abus

On n'abuse pas de ce formalisme dans un texte en français. Seul un « $x \in E$ » peut être toléré.

Exemples

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

$\exists x$ se lit « il existe x »,

$\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

Attention. Pas d'abus

On n'abuse pas de ce formalisme dans un texte en français. Seul un « $x \in E$ » peut être toléré.

Exemple Notation et lecture

Exemples

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

$\exists x$ se lit « il existe x »,

$\exists! x$ se lit « il existe un unique x »,

Attention. Pas d'abus

On n'abuse pas de ce formalisme dans un texte en français. Seul un « $x \in E$ » peut être toléré.

Exemple Notation et lecture

Exemple Ensembles classiques

Exemples

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,

$\exists x$ se lit « il existe x »,

$\exists ! x$ se lit « il existe un unique x »,

Attention. Pas d'abus

On n'abuse pas de ce formalisme dans un texte en français. Seul un « $x \in E$ » peut être toléré.

Exemple Notation et lecture

Exemple Ensembles classiques

Exercice Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1 \text{ mais } \exists x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1$$

« Petite »règles

Remarque Convention de notation

« Petite »règles

Remarque Convention de notation

Proposition - Règle de la théorie des ensembles

Quelques régles régissent les ensembles (dont certaines sont des axiomes de la théorie des ensembles) :

- régle n°1 : Deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux.
- régle n°2 : Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément, soit

$$\exists E \mid \forall x, x \notin E$$

D'après la règle n°1, cet ensemble est unique, on l'appelle *ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Descriptions

Définition - Singleton, paire

Soit a un objet mathématique. L'ensemble dont a est l'unique élément s'appelle un singleton, on le note $\{a\}$.
Soient a et b deux objets distincts. L'ensemble dont ce sont les deux seuls éléments s'appelle la paire formée de a et b. On le note $\{a, b\}$

Descriptions

Définition - Singleton, paire

Soit a un objet mathématique. L'ensemble dont a est l'unique élément s'appelle un singleton, on le note $\{a\}$.
Soient a et b deux objets distincts. L'ensemble dont ce sont les deux seuls éléments s'appelle la paire formée de a et b. On le note $\{a,b\}$

D'aprés la régle n°1, $\{a,b\}=\{b,a\}$, qu'il ne faut pas confondre avec le couple (a,b).
Si $a=b$, $\{a,b\}=\{a\}$.

Définition en extension

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Définition en extension

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

Définition en extension

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

Exercice

$\{1, 2, 3, \ldots\} =$, $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} =$

Définition en extension

Définition - en extension

On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ...intermédiaires.

Exemple Ensemble défini en extension

Exercice

$\{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}, \quad \{0,1,-1,2,-2,\ldots\} = \mathbb{Z}$

Définition en extension

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ (sous-entendu "tels que $P(x)$ soit vraie").

Définition en extension

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ (sous-entendu "tels que $P(x)$ soit vraie").

<u>Exercice</u>

$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} =$

$\{x \in \mathbb{N} | x + 1 = 0\} =$

$\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\} =$

$\{x \in \mathbb{Z} | x + 1 = 0\} =$

$\{a^2 + 2 | a \in [\![1, 5]\!]\} =$

Définition en extension

Définition - en compréhension

On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x de E, alors

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

est l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ (sous-entendu "tels que $P(x)$ soit vraie").

Exercice

$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{N} | x + 1 = 0\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\} = \{-i, i\}$

$\{x \in \mathbb{Z} | x + 1 = 0\} = \{-1\}$

$\{a^2 + 2 | a \in [\![1, 5]\!]\} = \{3, 6, 11, 18, 27\}$

Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition - Intervalles de $\mathbb{R}$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on définit les *intervalles* de $\mathbb{R}$, ce sont les ensembles suivants :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} \quad [a,b[,]a,b[\dots$$
$$]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\} \quad]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \quad [b,+\infty[,]b,+\infty[\dots$$

Les intervalles du type $[a,b],]-\infty,a], [b,+\infty[$ sont des *intervalles fermés*
Les intervalles du type $]a,b[,]-\infty,a[,]b,+\infty[$ sont des *intervalles ouverts*
Les intervalles du type $[a,b[$ ou $]a,b]$ sont dits *semi-ouverts (ou semi-fermés)*
$[a,b]$ s'appelle un *segment*.

Exemples d'intervalle

Exemple Autres exemples

Exemples d'intervalle

Exemple Autres exemples

Savoir-faire. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in I$,
$[a,b] := \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\} \subset I$.
C'est-à-dire :
« *Soient* $a, b \in I$ *(quelconques puis fixés).*
Soit $t \in [a,b]$ *(i.e.* $a \leqslant t \leqslant b$*) alors. . . .. .et donc* $t \in I$ ».

Exemples d'intervalle

Exemple Autres exemples

Savoir-faire. Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in I$,
$[a, b] := \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\} \subset I$.
C'est-à-dire :
« Soient $a, b \in I$ (quelconques puis fixés).
Soit $t \in [a, b]$ (i.e. $a \leqslant t \leqslant b$) alors. . .. . .et donc $t \in I$ ».

Exercice
Montrer que $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x + e^x \leqslant 10\}$ est un intervalle.

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Nécessité des quantificateurs

Heuristique. Quantificateurs nécessaires

En mathématiques classiques, deux quantificateurs sont essentiels :

- $\forall$, lu « pour tout » ou « quel que soit », pour désigner qu'une propriété a un certain degré d'universalité :
  $\forall\, x, \mathscr{P}(x)$. La propriété $\mathscr{P}$ est donc toujours vraie, puisque vraie pour tout point.
  $\forall\, x \in E, x \in F$. Tous les éléments de E sont dans F. Dans sa totalité : $E \subset F$.
- $\exists$ lu « il existe » est la négation du précédent.

Nécessité des quantificateurs

Heuristique. Quantificateurs nécessaires

En mathématiques classiques, deux quantificateurs sont essentiels :

- $\forall$, lu « pour tout » ou « quel que soit », pour désigner qu'une propriété a un certain degré d'universalité :
  $\forall\ x, \mathscr{P}(x)$. La propriété $\mathscr{P}$ est donc toujours vraie, puisque vraie pour tout point.
  $\forall\ x \in E, x \in F$. Tous les éléments de E sont dans F. Dans sa totalité : $E \subset F$.
- $\exists$ lu « il existe » est la négation du précédent.

Remarque Existence ET unicité

Exemples de non commutativité

Analyse Non commutativité des connecteurs

Exemples de non commutativité

Analyse Non commutativité des connecteurs

Exemple Suite majorée, ou rien

Exemples de non commutativité

Analyse Non commutativité des connecteurs

Exemple Suite majorée, ou rien

Exercice

On considère la suite de FIBONACCI : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.

Que pensez-vous des deux assertions suivantes :

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- $\exists\ A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Noter les dépendances

Savoir-faire. Noter les dépendances

Si l'on écrit $\forall\ a, \exists\ b \dots$, le nombre b en second dépend grandement de a. On devrait noter $b(a)$ ou b_a.
En revanche, si on écrit $\exists\ b$ tel que $\forall\ a \dots$, le nombre a ne dépend pas (plus particulièrement que les autres) de b. La notation a_b ou $a(b)$ n'aurait pas d'intérêt.
De nombreux problèmes rencontrés en mathématiques en MPSI par les élèves reposent sur la non compréhension de cette (in)dépendance.

Une autre stratégie est de faire comme en Python, des indentations dans la démonstration. A chaque paramètre introduit, on fait apparaître un petit retrait dans l'écriture de la démonstration qui permet de voir comme ces paramètres dépendent mutuellement les uns des autres...

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Sous-ensemble

Définition - Partie d'un ensemble (sous ensemble)

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E.
On dit aussi que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Sous-ensemble

Définition - Partie d'un ensemble (sous ensemble)

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E.
On dit aussi que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Savoir-faire. Montrer que $F \subset E$

Pour montrer que $F \subset E$, on démontre :

$$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E).$$

Propriété d'ordre

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$ (l'inclusion est antisymétrique)

Propriété d'ordre

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$ (l'inclusion est antisymétrique)

Savoir-faire. Prouver l'égalité de deux ensembles

La dernière propriété sert souvent à prouver l'égalité de deux ensembles.

Propriété d'ordre

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :

- $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$ (l'inclusion est antisymétrique)

Savoir-faire. Prouver l'égalité de deux ensembles

La dernière propriété sert souvent à prouver l'égalité de deux ensembles.

Exercice

A quelle condition a-t-on : $\{a\} \subset E$? $\{a,b\} \subset E$? $\{a\} \subset \{b\}$?

Ensemble des parties

Définition - Ensemble des partes de E

$\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E :
$X \in \mathscr{P}(E)$ signifie donc à $X \subset E$.

Ensemble des parties

Définition - Ensemble des partes de E

$\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E :
$X \in \mathscr{P}(E)$ signifie donc à $X \subset E$.

Exemple Singleton…

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Produit cartésien de deux ensembles

Définition - Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F (dans cet ordre) :

$$E \times F = \{x | \exists a \in E, \exists b \in F ; x = (a,b)\} = \{(a,b) | a \in E \text{ et } b \in F\}.$$

Produit cartésien de deux ensembles

Définition - Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F (dans cet ordre) :

$$E \times F = \{x | \exists a \in E, \exists b \in F ; x = (a, b)\} = \{(a, b) | a \in E \text{ et } b \in F\}.$$

Remarque Rôle de la ponctuation

Produit cartésien de n ensembles

Produit cartésien de n ensembles

Soit $n \in \mathbb{N}$, si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in E_1, \dots, a_n \in E_n$.
Si les E_i désignent un même ensemble E, on note
$E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$ ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$...)

Produit cartésien de n ensembles

Produit cartésien de n ensembles

Soit $n \in \mathbb{N}$, si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in E_1, \ldots, a_n \in E_n$.
Si les E_i désignent un même ensemble E, on note
$E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$ ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$...)

Remarque Associativité du produit cartésien

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Opérations ensemblistes

Définition - Réunion, intersection, différence d'ensembles

Pour E et F deux ensembles on définit :

- la réunion (ou union) de E et F : $E \cup F = \{x | x \in E$ ou $x \in F\}$ (le "ou" est inclusif : on peut avoir les deux simultanément)
- l'intersection de E et F : $E \cap F = \{x | x \in E$ et $x \in F\}$
- la différence de E et de F : $E \setminus F = \{x | x \in E$ et $x \notin F\}$

Opérations ensemblistes

Définition - Réunion, intersection, différence d'ensembles

Pour E et F deux ensembles on définit :

- la réunion (ou union) de E et F : $E \cup F = \{x | x \in E$ ou $x \in F\}$ (le “ou” est inclusif : on peut avoir les deux simultanément)
- l'intersection de E et F : $E \cap F = \{x | x \in E$ et $x \in F\}$
- la différence de E et de F : $E \setminus F = \{x | x \in E$ et $x \notin F\}$

Remarque Interprétation avec une table de vérité

Complémentaire ensembliste

Définition - Complémentaire d'un ensemble (dans un ensemble plus gros)

Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé *complémentaire* de F dans E et noté $\complement_E F$.
On ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F que relativement à un ensemble « contenant » ce dernier. Toutefois, en l'absence d'ambiguïté sur E, on peut noter $\complement F$ ou F^c ou $\overline{F}$ (cette dernière notation ayant cependant différents sens suivant le domaine des mathématiques...)

Complémentaire ensembliste

Définition - Complémentaire d'un ensemble (dans un ensemble plus gros)

Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé *complémentaire* de F dans E et noté $\complement_E F$.
On ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F que relativement à un ensemble « contenant » ce dernier. Toutefois, en l'absence d'ambiguïté sur E, on peut noter $\complement F$ ou F^c ou $\overline{F}$ (cette dernière notation ayant cependant différents sens suivant le domaine des mathématiques...)

Attention. Le verbe contenir

Attention également à l'ambiguïté du verbe "contenir", parfois utilisé pour dire que x est élément de E, parfois pour dire que F est une partie de E.

Exercices

<u>Exercice</u>
Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.
Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

<u>Exercice</u>

On définit la différence symétrique de deux ensembles E et F par

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ecrire $E \Delta F$ à l'aide de $E \cup F$ et $E \cap F$.

Règles de calcul

Proposition - Quelques règles de calcul

E, F et G désignent trois ensembles quelconques et A et B deux parties de E.

$E \cup F = F \cup E$	(commutativité de la réunion)
$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$	(associativité de la réunion)
$\emptyset \cup E = E \cup \emptyset = E$	(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)
$E \cap F = F \cap E$	(commutativité de l'intersection)
$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$	(associativité de l'intersection)
$\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = \emptyset$	(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)
$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$	(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)
$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)

$$A \cap E = A$$
$$A \cup E = E$$
$$\complement_E(\complement_E A) = A$$
$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$
$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan*.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

- Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

- Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
- Notion importante d'assertions.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

- Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
- Notion importante d'assertions.
- Négation d'assertions ou implication et équivalence d'assertions

Conclusion

Objectifs

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

- Revoir les notions sur ensembles : appartenance, écriture d'ensembles, produit cartésien
- Notion importante d'assertions.
- Négation d'assertions ou implication et équivalence d'assertions
- Vérification de la combinatoire d'assertions par la table de vérité

Conclusion

Objectifs

⇒ Lien entre ensemble et raisonnements logiques

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 - Structure logique
  3. Vocabulaire sur les assertions
  4. Principales méthodes de démonstration
- Pour la prochaine fois : N° 229, 232