Leçon 8 - Calculs et opérations avec $\sum$ (ou $\prod$)

⇒ Relation entre assertions (propositions)

⇒ Reprendre quelques principes de base de démonstration

⇒ **Relation entre assertions (propositions)**

⇒ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u>

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Exercices

Exercice

Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.

Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Exercice

Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Exercice

On définit la différence symétrique de deux ensembles E et F par

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ecrire $E \Delta F$ à l'aide de $E \cup F$ et $E \cap F$.

Règles de calcul

Proposition - Quelques règles de calcul

E, F et G désignent trois ensembles quelconques et A et B deux parties de E.

$E \cup F = F \cup E$	(commutativité de la réunion)
$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$	(associativité de la réunion)
$\emptyset \cup E = E \cup \emptyset = E$	(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)
$E \cap F = F \cap E$	(commutativité de l'intersection)
$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$	(associativité de l'intersection)
$\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = \emptyset$	(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)
$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$	(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)
$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)

$$A \cap E = A$$
$$A \cup E = E$$
$$\complement_E(\complement_E A) = A$$
$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$
$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan*.

⇒ **Relation entre assertions (propositions)**

⇒ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Assertions

Définition - Assertion (proposition) et prédicat

Dans ce paragraphe une *proposition*, ou *assertion* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
Si cette assertion dépend d'une variable x on parle alors de *prédicat*.

Assertions

Définition - Assertion (proposition) et prédicat

Dans ce paragraphe une *proposition*, ou *assertion* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
Si cette assertion dépend d'une variable x on parle alors de *prédicat*.

Exemple Propositions

Construction d'assertion

Comme on peut le voir dans les parties suivantes, à partir de deux assertions A et B, on en définit d'autres dont la valeur logique est donnée par une *table de vérité*

Construction d'assertion

Comme on peut le voir dans les parties suivantes, à partir de deux assertions A et B, on en définit d'autres dont la valeur logique est donnée par une *table de vérité*

Exercice

Que pensez-vous de $\mathscr{P}_n$ dans l'énoncé formel suivant ?

Notons, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $\exists\ k \in E$ tel que $a_n = k$ ».

⇒ **Relation entre assertions (propositions)**

⇒ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Définition

Définition - Négation d'une assertion

Considérons une assertion A.
On appelle négation de A l'assertion qui dit le contraire de A, c'est à dire qui est vraie exactement lorsque A est fausse, on la note "$\mathrm{non}A$" (ou $\neg A$ en logique).
La*table de vérité* de $\mathrm{non}A$:

A	non A
V	F
F	V

Exemple de négation

<u>Exercice</u>

La négation de « L'hiver dernier il a plu tous les jours à Toulouse » est :

La négation de « Chaque hiver, il neige au moins un jour en Aveyron » est :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

La négation de « $0 \in I$ » est

La négation de « $\forall x \in I, x > 0$ » est

La négation de « $\exists x \in I \,|\, x \geqslant 0$ » est

Négation d'une proposition avec quantificateurs

D'une manière plus générale il faut savoir nier une proposition écrite avec des quantificateurs :

Négation d'une proposition avec quantificateurs

D'une manière plus générale il faut savoir nier une proposition écrite avec des quantificateurs :

Exercice

P désignant une propriété dépendant de x ou de x, y suivant les cas, écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in E, P(x)$;
2. $\exists x \in E | P(x)$;
3. $\forall x \in E, \exists y \in E | P(x, y)$;
4. $\exists x \in E | \forall y \in E, P(x, y)$;
5. $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant r$ et $s \leqslant r$.

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Exercice

Compléter le tableau suivant :

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B
V	V	V	V				
V	F	F	V				
F	V	F	V				
F	F	F	F				

Quelle relation remarquez-vous ?

Avec une table de vérité

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.

Exercice

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B	non A et non B	non A ou non B
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

On démontre les lois de Morgan :

- non(A et B)$\Leftrightarrow$ (non A) ou (non B)
- non(A ou B)$\Leftrightarrow$ (non A) et (non B)

⇒ **Relation entre assertions (propositions)**

⇒ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Implication d'assertions

Heuristique. Comment exploiter une implication ?

On exploite une implication du type $A \Rightarrow B$ en règle générale lorsqu'on veut dire :

- A chaque fois que A est vraie, B est vraie (c'est le vrai $\Longrightarrow$)
- et, dans ce cas, A est vraie.

alors, on peut conclure que B est nécessairement vraie.

Implication d'assertions

Heuristique. Comment exploiter une implication ?

On exploite une implication du type $A \Rightarrow B$ en règle générale lorsqu'on veut dire :

- A chaque fois que A est vraie, B est vraie (c'est le vrai $\Longrightarrow$)
- et, dans ce cas, A est vraie.

alors, on peut conclure que B est nécessairement vraie.

1. Première conclusion : il faut différencier $A \Rightarrow B$ et $[A \Rightarrow B$ et $A]$.
   Si vous voulez exprimer ce deuxième fait, vous aurez le droit (provisoirement) d'écrire $A \overset{\&}{\Rightarrow} B$.
2. Deuxième conclusion : Si A est faux, alors on peut tout avoir concernant B (vrai ou faux). Il est donc possible d'avoir A faux et B vrai lorsque $A \Rightarrow B$. En revanche, la seule impossibilité lorsque $A \Rightarrow B$ et d'avoir A vrai et B faux.

Implication d'assertions

Définition - Implication d'assertions

Considérons deux assertions A et B.
Si, lorsque l'assertion A est vraie, alors, nécessairement, l'assertion B l'est également, on dit que A implique B et l'on écrit
$A \Rightarrow B$
(ce qui se lit donc “A implique B” ou “si A alors B”).
Plus précisément, la table de vérité de $A \Rightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$A \Rightarrow B$, et si A fausse ?

Remarque Et si A est fausse ?

$A \Rightarrow B$, et si A fausse ?

Remarque Et si A est fausse ?

Exercice

Quelle est l'assertion qui a même table de vérité que « $\text{non}(A \Rightarrow B)$ » ?

Définition

Définition - Equivalence d'assertions

Considérons deux assertions A et B.
On dit que A et B sont équivalentes si elles signifient la même chose, mais dite différemment, c'est à dire si, simultanément, A implique B et B implique A ;
on note alors $A \Leftrightarrow B$.
Plus précisément, la table de vérité de $A \Leftrightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exercice

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exercice

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Attention. A démontrer ?

Certaines équivalences correspondent en fait à la définition d'un objet mathématique, d'autres en revanche nécessitent une démonstration.

Exemple

Exemple Deux assertions équivalentes

Exercice

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Attention. A démontrer ?

Certaines équivalences correspondent en fait à la définition d'un objet mathématique, d'autres en revanche nécessitent une démonstration.

Attention. Ne pas abuser de $A \Longleftrightarrow B$

Les étudiants écrivent TROP souvent $A \Longleftrightarrow B$, en faisant un calcul dans leur tête (ou une démonstration) qui permet de passer de A à B, SANS vérifier si l'on passe aussi de B à A.
Il est important de ne pas faire cette erreur, surtout si l'on demande qu'une implication. . .. Il ne faut pas en faire trop, si c'est faux !

$\Rightarrow$ **Relation entre assertions (propositions)**

$\Rightarrow$ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Implication

Considérons deux assertions A et B. On veut démontrer que $A \Rightarrow B$.

Implication

Considérons deux assertions A et B. On veut démontrer que $A \Rightarrow B$.

Savoir-faire. $A \Rightarrow B$. Raisonnement direct

On suppose A vraie, par une succession d'implications connues (calculs, résultats de théorèmes...), on prouve qu'alors B est vraie.

Implication

Considérons deux assertions A et B. On veut démontrer que $A \Rightarrow B$.

Savoir-faire. $A \Rightarrow B$. Raisonnement direct

On suppose A vraie, par une succession d'implications connues (calculs, résultats de théorèmes...), on prouve qu'alors B est vraie.

Exercice

Montrer que si (x, y) est élément de $]0,2[\times]-2,0[$ alors $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 1$

Implication

Considérons deux assertions A et B. On veut démontrer que $A \Rightarrow B$.

Savoir-faire. $A \Rightarrow B$. Raisonnement direct

On suppose A vraie, par une succession d'implications connues (calculs, résultats de théorèmes...), on prouve qu'alors B est vraie.

<u>Exercice</u>

Montrer que si (x,y) est élément de $]0,2[\times]-2,0[$ alors $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>1$

<u>Exercice</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x+\frac{3}{2}|-\frac{1}{2}$. Montrer que

$$x \geqslant -1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$$

Implication avec disjonction de cas

On peut-être amené à faire une disjonction de cas :

Exercice

Compléter l'énoncé suivant pour que la démonstration nécessite l'étude de deux cas séparés.

Implication avec disjonction de cas

On peut-être amené à faire une disjonction de cas :

Exercice

Compléter l'énoncé suivant pour que la démonstration nécessite l'étude de deux cas séparés.

Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto |x + \frac{3}{2}| + |x - 1| - \frac{1}{2}$

Montrer que $x \geqslant -1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$.

Le chemin de la démonstration

Heuristique. Démontrer que . . .

Lorsqu'on cherche à démontrer un résultat, il y a fondamentalement deux attentes :

1. Trouver la (une) démonstration,
   satisfaisante i.e. qui donne la certitude du fait
2. Ecrire la démonstration,
   de sorte que toute personne qui lise la démonstration soit également persuadé du fait

Avec le temps du passage de 1 à 2, il faut donc trois temps dans la recherche d'une démonstration.

Attention

Attention. Premier piège

Le temps 1 est le temps de l'analyse.
Le temps 2 est le temps de la synthèse.
Ce sont deux choses très différentes. Lorsque vous lisez une démonstration d'un théorème faite par un professeur, un corrigé dans un livre. . .vous ne voyez que le second temps, celui de la synthèse. Après la lecture, vous pouvez vous dire : « et oui, je vois que c'est vrai », mais vous n'avez pas appris *comment on trouve* la démonstration ! ! !
La seule solution est de chercher, chercher, chercher. . .et de ne pas se précipiter sur la (une) solution.
De même, si pour vous écrire une démonstration de cours lors d'une colle est uniquement un exercice de mémoire, alors c'est que vous n'avez pas compris le premier point, ni le point $1 \to 2$ de la démonstration du fait considéré. *Un exemple ?*

Petit Poucet

Analyse La métaphore du petit poucet

Petit Poucet

Analyse La métaphore du petit poucet

Besoin de définitions

f *est surjective de* E *sur* F *si* $\forall\ y \in F, \exists\ x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.

f *est injective de* E *(sur* F*) si* $\forall\ x_1, x_2 \in E$,

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Petit Poucet

Analyse La métaphore du petit poucet

Besoin de définitions

f *est surjective de* E *sur* F *si* $\forall\ y \in F, \exists\ x \in E$ *tel que* $y = f(x)$.

f *est injective de* E *(sur* F*) si* $\forall\ x_1, x_2 \in E$,

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Exemple Exercice « de base »

Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$.

On suppose que f est surjective, montrer que $f^2 (= f \circ f)$ est surjective.

Petit Poucet

Analyse La métaphore du petit poucet

Besoin de définitions
f est surjective de E sur F si $\forall\ y \in F, \exists\ x \in E$ tel que $y = f(x)$.
f est injective de E (sur F) si $\forall\ x_1, x_2 \in E$,
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Exemple Exercice « de base »
Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$.
On suppose que f est surjective, montrer que $f^2 (= f \circ f)$ est surjective.
Exercice
Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$.
On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est injective alors f est surjective. Et réciproquement.

Contraposée

Proposition - Contraposée

$(\text{non}\, B \Rightarrow \text{non}\, A)$ s'appelle la contraposée de $(A \Rightarrow B)$.
Il est équivalent de prouver l'une ou l'autre de ces deux implications

Contraposée

Proposition - Contraposée

$(\text{non}\, B \Rightarrow \text{non}\, A)$ s'appelle la contraposée de $(A \Rightarrow B)$.
Il est équivalent de prouver l'une ou l'autre de ces deux implications

Démonstration

Utilisation de la contraposée

Savoir-faire. $A \Rightarrow B$. Raisonnement par contraposée

On suppose donc B fausse et on prouve qu'alors A est fausse, comme précédemment

Utilisation de la contraposée

Savoir-faire. $A \Rightarrow B$. Raisonnement par contraposée

On suppose donc B fausse et on prouve qu'alors A est fausse, comme précédemment

Le résultat de l'exercice suivant sera fréquemment exploité en analyse :

Exercice

On considére un nombre réel $x \geqslant 0$. Montrer que

$$(\forall \epsilon > 0, 0 \leqslant x \leqslant \epsilon) \Rightarrow x = 0.$$

⇒ **Relation entre assertions (propositions)**

⇒ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Une première méthode

Deux possibilités pour prouver l'équivalence $A \Leftrightarrow B$:

Une première méthode

Deux possibilités pour prouver l'équivalence $A \Leftrightarrow B$:

Savoir-faire. $A \Leftrightarrow B$. On procède en deux temps

1. On montre $A \Rightarrow B$
2. On montre $B \Rightarrow A$

Une première méthode

Deux possibilités pour prouver l'équivalence $A \Leftrightarrow B$:

Savoir-faire. $A \Leftrightarrow B$. On procède en deux temps

1. On montre $A \Rightarrow B$
2. On montre $B \Rightarrow A$

Exercice

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Montrer que

$$(f \text{ est une fonction paire et impaire }) \Leftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle }).$$

Une seconde méthode

Savoir-faire. $A \Leftrightarrow B$. On procède par équivalences connues successives.

Cette méthode est surtout utilisée pour des résolutions calculatoires.
Attention de ne pas en abuser : *il faut à chaque étape être sûr que l'on peut « remonter » les équivalences*.

Une seconde méthode

Savoir-faire. $A \Leftrightarrow B$. On procède par équivalences connues successives.

Cette méthode est surtout utilisée pour des résolutions calculatoires.
Attention de ne pas en abuser : *il faut à chaque étape être sûr que l'on peut « remonter » les équivalences*.

Exercice

Montrer que

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y)=(1,0)$$

Pas d'abus

Truc & Astuce pour le calcul. Ne pas abuser de $\Longrightarrow$

Il faut éviter le plus possible d'écrire $\Longleftrightarrow$ comme un tic de langage.

1. S'il n'est pas utile, on ne le note pas !
2. Si on choisit de le noter, on vérifie bien à chaque étape le sens $\Leftarrow$ tout particulièrement

$\Rightarrow$ **Relation entre assertions (propositions)**

$\Rightarrow$ **Reprendre quelques principes de base de démonstration**

Principe

Savoir-faire. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer un certain énoncé, on fait l'hypothèse qu'il est faux et on aboutit à une contradiction.

Principe

Savoir-faire. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer un certain énoncé, on fait l'hypothèse qu'il est faux et on aboutit à une contradiction.

Exercice

Montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel (i.e. n'est pas rationnel)

Principe

Savoir-faire. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer un certain énoncé, on fait l'hypothèse qu'il est faux et on aboutit à une contradiction.

Exercice

Montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel (i.e. n'est pas rationnel)

Remarque Différence avec la contraposée

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Relation entre assertions (propositions)

$\Rightarrow$ Reprendre quelques principes de base de démonstration

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion
- Négation

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

- Une assertion
- Négation
- Relations : implications, équivalences

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

⇒ Reprendre quelques principes de base de démonstration

- Implications, double implication et équivalence

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

⇒ Reprendre quelques principes de base de démonstration

- Implications, double implication et équivalence
- C.N. et C.S. Méthode analyse-synthèse.

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

⇒ Reprendre quelques principes de base de démonstration

- Implications, double implication et équivalence
- C.N. et C.S. Méthode analyse-synthèse.
- Contraposée voire raisonnement par l'absurde

Conclusion

Objectifs

⇒ Relation entre assertions (propositions)

⇒ Reprendre quelques principes de base de démonstration

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 10 Structure logique
  4. Principales méthodes de démonstration
- Exercices n°230 & 237