

Leçon 27 - Système linéaire

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- l. Quelque: roblàmes
- Systèmes inéaires. Equivalence
  - . Vocabulaire
- 2 Svetámac ánu
- 3. Résolution explicite. cas des
  - 1. Vers la formule de Crame
- 4. Algorithme du pivo
  - .1. Opérations élémen
- Gauss
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
   problèmes
  - . Systèmes
    - ncabulaire
    - uetàmos áquiunh
- 3. Résolution
  - plicite. cas des stèmes n = p = 2
  - Vers la formule de Cran
- de Gauss
- 4.1. Opérations éléments
- AUSS
- 4.3. Applications

- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
    - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
    - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
   problèmes
  - . Systèmes
    - Vocabulaire
  - 0.000
- 3. Résolution
  - 1. Vors la formula da Cramor
- o. i. vois la loi liulo de Graniei
- e Gauss
- 4.1. Opérations élémentair
   4.2. Algorithme du pivot de
- 4.3 Annlinations

Problème Résolution d'un système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes

Problème Résolution d'un système linéaire

Problème Résolution « au petit bonheur »

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes
  - ocabulaire
- 2 Svetámac ánuir
- . Résolution
- 1. Vorm in formula do Cramor
- Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivo
  - Opérations élément
- 4.2. Algorithme du pivot
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelaues problèmes

- ◆□▶◆骨▶◆団▶◆団▶ 釣@@

- Problème Résolution d'un système linéaire
- Problème Résolution « au petit bonheur »
- **Problème** Forme de l'ensemble des solutions

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes
  - ocabulaire
  - . vocabulaire
- . Résolution
- Vers la formule de Cramer
- Gauss
- I. Opérations élément
- GAUSS
- 4.3. Applications

- Problème Résolution d'un système linéaire
- Problème Résolution « au petit bonheur »
- Problème Forme de l'ensemble des solutions
- Problème Impact des paramètres

- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
    - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
    - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques
- . Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
  - Vocabulaire
- B. Résolution explicite, cas des
- Vare la formula de Cramor
- 4. Algorithmo du pivot
  - e Gauss
  - .2. Algorithme du pivo
- 4.3. Applications

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

> I. Quelques problèmes

. Systèmes néaires, Equivaler

#### 2.1. Vocabulaire

. . . . . . . .

B. Résolution explicite. cas des

Vers la formule de Cramer

4. Algorithmo du nive

e Gauss

4.1. Opérations éléme

GAUSS

4.3. Application

### Remarque Formalisme de LEIBNIZ

On commence par **paramétrer notre problème** : on l'élargit en donnant une écriture symbolique (paramétre lettré) aux nombres. Puis on élargit la problème : pourquoi seulement trois équations et trois inconnues?

## Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficient dans  $\mathbb{K}=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un système S d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p &= b_2 \\ \vdots &\vdots &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$
 où

- ▶ les  $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ ;
- ►  $(b_1, b_2, ... b_n) \in \mathbb{K}^n$  est appelé le second membre de l'équation;
- ►  $(x_1, x_2...x_p) \in \mathbb{K}^p$  est appelé l'inconnue du système.

On appelle système homogène le système obtenu en remplaçant chaque  $b_i$  par 0 (second membre nul).

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- Systèmes linéaires. Equivalence
- 2.1. Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des
  - . Vers la formule de Cramer
- 1. Algorithme du pivo
- de GAUSS
- 4.1. Opérations éléments
- 4.0 A--1:--1:---

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

# Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

On appelle solution du système S, l'ensemble  $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^p$  des p-uplets  $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots \overline{x}_p)$  qui vérifient les n équations :

 $\forall i \in \mathbb{N}_n, a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{i,n}\overline{x}_n = b_i$ 

2.1. Vocabulaire

## Remarques

**Remarque** Notations

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques
- Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
  - i. vocabalanc
- B. Résolution explicite. cas des
- 3.1. Vers la formule de Gramer
- e Gauss
- 4.1. Operations element
- 4.2 Applications

## Remarques

Remarque Notations
Remarque Solution(s) du système homogène

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- oblèmes
- Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
  - Vocabulaire
- B. Résolution explicite. cas des
- 1 Vers la formule de Cramer
- de Gauss
- 4.1. Opérations élémen
- Gauss
- 4.3. Applications

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

2.1 Vocabulaire

**Remarque** Notations Remarque Solution(s) du système homogène

## Heuristique - Résolution

Il y a en gros deux méthodes pour résoudre un tel système. La méthode de Leibniz (fin du XVII) fonctionne très bien pour les petites dimensions  $n, p \le 3$ . Elle s'appuie sur les symétries du système. Elle marche bien également en théorie pour les grandes dimensions

La méthode (dite) de Gauss est algorithmique, nous la privilégierons pour les plus grandes dimensions.

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence

  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des

Lecon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 2.2. Systèmes équivalents

# **Implication**

**Analyse** Sens des flèches ⇒, ←

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- I. Quelques problèmes
- 2. Systèmes
  - i. vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des
- 3.1 Vers la formule de Cramer
- 4. Almonishman du mirro
  - Opérations élémen
- 4.2. Algorithme du pir
- 4.3. Applications

# Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  sont dits équivalents, notée  $S_1 \Longleftrightarrow S_2$  si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes :  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ .

### Exercice

Les systèmes  $S_1$ :  $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{array} \right.$  et  $S_2$ :  $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \end{array} \right.$  sont-ils équivalents ?

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- . Systèmes
- 2.1. Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des
  - NO.1100 10 P 2
- 4. Algorithma du pivot
  - de Gauss
- 4.1. Opérations éléments 4.2 Algorithme du pivot d
- 4.3 Applications

# Définition - Systèmes équivalents

Deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  sont dits équivalents, notée  $S_1 \iff S_2$ si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes :  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ .

### Exercice

Les systèmes  $S_1$ :  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = 0 \end{cases}$  et  $S_2$ :  $\begin{cases} 2x + y = 1 \end{cases}$  sont-ils équivalents?

### Attention, Pas d'abus

Typiquement ici, il ne faut pas abuser du symbole d'équivalence! Dans l'exercice, on écrit donc jamais :

$$S_1: \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{array} \right. \iff 2x+y=1$$

Il n'y a ici qu'une implication.

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 2.2. Systèmes équivalents

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des

Lecon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 3.1. Vers la formule de Cramer

3.1. Vers la formule de Cramer

On considère ici

$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et  $\alpha,\beta$  sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

Vocabulaire

. Systèmes équival

. Résolution

tèmes n=p=2

3.1. Vers la formule de Cramer

de Gauss

.1. Opérations élémen

Gauss

4.3. Application

On considère ici

$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a,b,c,d et  $\alpha,\beta$  sont des paramètres, alors que x,y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

3.1. Vers la formule de Cramer

On considère ici

$$S: \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d et  $\alpha, \beta$  sont des paramètres, alors que x, y sont les inconnues.

Analyse Etude « à la lycéenne »

Remarque Avons-nous trouver les solutions?

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Analyse Réciproque

- 3.1. Vers la formule de Cramer

# Réciproque

Lecon 27 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

Analyse Réciproque

Remarque  $a \neq 0$ ?

- 3.1. Vers la formule de Cramer

## Définition - Déterminant d'un système $2 \times 2$

On appelle déterminant du système  $2 \times 2$  (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

$$\text{le nombre } \delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \text{ souvent noté } \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right|.$$

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- 2.2. Systèmes équivale
- 3. Résolution explicite. cas des

#### 3.1. Vers la formule de Cramer

- 4. Algorithme du pivo
  - 4.1 Opérations élémer
- GAUSS
- 4.2 Application

## Définition - Déterminant d'un système $2 \times 2$

On appelle déterminant du système  $2 \times 2$  (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{array} \right.$$

le nombre 
$$\delta_S=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$$
 souvent noté  $\left|\begin{array}{cc}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{array}\right|.$ 

### Savoir-faire. Formule de CRAMER

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de  ${\mathscr S}$  de

(S) 
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{est} \mathscr{S} = \{ (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \} = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \left| \begin{array}{cc} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right| \right\} \right\}$$

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- oblèmes
- Systèmes réaires. Equivalence
  - /ocabulaire
  - Systèmes équivale
- 3. Résolution explicite, cas des
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- Algorithme du pivo de Gauss
  - 4.1. Opérations éléme
  - GAUSS
  - 4.3 Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

# Définition - Déterminant d'un système $2 \times 2$

On appelle déterminant du système  $2 \times 2$  (i.e. n = 2 et p = 2)

$$S = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

le nombre 
$$\delta_S=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$$
 souvent noté  $\left|\begin{array}{cc}a_{1,1}&a_{1,2}\\a_{2,1}&a_{2,2}\end{array}\right|.$ 

problèmes

- 2. Systèmes néaires. Equivalence
  - . Vocabulaire
  - vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des

#### 3.1. Vers la formule de Cramer

- 4. Algorithme du pivot
  - .1. Opérations élémen
- GAUSS
- 4.2 Application

roblèmes

inéaires. Equivalence

2.1. Vocabulaire

3. Résolution

terries n - p - 2

#### 3.1. Vers la formule de Cramer

- 4. Algorithme du pivo
  - 1.1. Opérations élément
- GAUSS
- 4.3. Application

## Définition - Déterminant d'un système $3 \times 3$

On appelle déterminant du système  $3 \times 3$  (i.e. n = 3 et p = 3)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

le nombre  $\delta_S=a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$  souvent noté

$$\left[ egin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array} 
ight].$$

## Formule de Cramer

### Savoir-faire. Formule de CRAMER

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de  ${\mathscr S}$  de

(S) 
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{est} \mathscr{S} = \{ (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \} = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{1,2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- roblèmes
- Systèmes inéaires. Equivalence
  - Vocabulaire
- D (--|--|---
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2

#### 3.1. Vers la formule de Cramer

- 4. Algorithme du pivot
  - 1.1. Opérations élément
- GAUSS
- 4.3. Applications

⇒ Systèmes équivalents ⇒ Méthode de

Cramer ⇒ Algorithme du

Si le déterminant du système S est non nul, la solution de  $\mathscr S$  de

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

 $a_{1.3}$ 

 $a_{2.3}$ 

 $a_{3,3}$ 

est 
$$\mathcal{S} = \{(\overline{x}_1, \overline{x}_2), \overline{x_3}\} =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}$$

 $a_{1.2}$ 

 $a_{2,2}$ 

 $a_{3.2}$ 

 $a_{1.1}$ 

 $a_{2.1}$ 

 $a_{3,1}$ 

$$\overline{\left|\begin{array}{c}a_{1,1}\\a_{2,1}\end{array}\right|}$$

 $a_{11}$ 

 $a_{3.1}$ 

 $a_{2.1}$ 

$$egin{array}{cccc} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \ \end{array}$$

 $b_2$ 

 $b_3$ 

 $a_{1.2}$ 

$$\begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{bmatrix}$$

 $a_{1.3}$ 

 $a_{2,3}$ 

 $a_{3,3}$ 

$$egin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} \ a_{2,1} & a_{2,2} \ \end{array}$$

 $a_{11}$ 

 $a_{2.1}$ 

 $a_{3.1}$ 

$$a_{2,1}$$
  $a_{2,2}$   $a_{2,3}$   $a_{3,1}$   $a_{3,2}$   $a_{3,3}$ 

 $a_{2.3}$ 

 $a_{2.2}$ 

 $a_{3,2}$ 

 $b_1$ 

 $b_2$ 

 $b_3$ 

 $a_{1.3}$ 

pivot de Gauss

Résolution

explicite, cas des

3.1. Vers la formule de Cramer

- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques oblèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- 12 Suntàmon Anuis
- 3. Résolution
  - 1. Vom in formula de Cramor
  - Vers la formule de Cramer
- e Gauss
- 4.1. Opérations élémentaires
- .2. Algorithme du più l'AUSS
- 4.3 Applications

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques oblèmes
- Systèmes
  - /ocabulaire
- 2 Systèmes équival
- Résolution explicite. cas des
- Vers la formule de Cramer
- de Gauss
- 4.1. Opérations élémentaires
- GAUSS
- 4.3. Applications

### Définition - Opérations élémentaires

On appelle opérations élémentaires sur le système dont la ligne i est noté  $L_i$ , les opérations suivantes :

- ▶ pour tout  $i, j \le n$ , échange des lignes  $L_i$  et  $L_j$  codé :  $L_i \leftrightarrow L_j$
- ▶ pour tout  $i \le n$ ,  $\lambda \ne 0$ , la multiplication de la ligne  $L_i$  par  $\lambda$  codé :  $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- ▶ pour tout  $i, j \le n$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ , l'ajout à la ligne  $L_i$  de  $\alpha$  fois la ligne  $L_j$  codé :  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- oblèmes
- . Systèmes néaires. Equivalence
- 2.1. Vocabulaire
- 2.2. Systèmes équivale
- Résolution xplicite. cas des
  - Vers la formule de Crar
- . Algorithme du pivo
- 4.1. Opérations élémentaires
- 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
- 4.3 Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

### Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

- Quelques oblèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- . vocabulaire
- 8. Résolution explicite. cas des
- 1. Vors la formula da Cramar
- le Gauss
- 4.1. Opérations élémentaires
- 4.2. Algorithme du pivot Gauss
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

### Proposition - Invariant des solutions

Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

### Démonstration

- 4.1. Opérations élémentaires

- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des

Leçon 27 - Système linéaire

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- oblèmes
- . Systèmes
  - Vocabulaire
- 0.000
- 3. Résolution
- ystèmes n = p = 2
- Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme au piv de Gauss
  - 1.1. Opérations élément
- 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- Systèmes
  - ocabulaire
- 2 Svetámas ánuiva
- 3. Résolution explicite. cas des
  - 4. Van la farmula de Comuna
- o.i. void la formate de oranier
  - A G I II III
- 4.2. Algorithme du pivot de
- GAUSS

# Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

Pour résoudre un système linéaire, on applique des opérations élémentaires pour le rendre triangulaire.

- On cherche un coefficient non nul dans la 1ere colonne (devant la 1ere inconnue) le plus simple (on va devoir diviser par ce nombre).
   Si tous les coefficients sont nuls, on passe à l'inconnue suivante.
- 2. On échange la ligne où l'on a trouvé ce coefficient avec  $L_1$ .
- 3. Pour  $j \in [\![2,n]\!]$ , on effectue l'opération  $L_j \leftrightarrow L_j \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} L_1$  (ce qui permet d'annuler le coefficient de  $x_1$  en ligne j puis pour toute la colonne).
- On recommence la première étape, en oubliant la première équation et en s'intéressant à l'inconnue suivante, tant qu'il reste des inconnues.

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques oblèmes
- 2. Systèmes inéaires. Equivalence
- Vocabulaire
- 2. Systèmes équiva
- 3. Résolution explicite. cas des
  - I. Vers la formule de Crame
- Algorithme du pivot de Gauss
- 4.1. Opérations élémentaire 4.2. Algorithme du pivot de
- GAUSS
- 4.3. Applications

# Savoir-faire. Algorithme du pivot de GAUSS

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Après avoir appliqué cet algorithme, le système obtenu est triangulaire, et l'on peut déterminer ses solutions en partant de la dernière équation et en remontant à la première.

Il peut arriver que l'on retrouve en dernière équation plus d'une inconnue. Dans ce cas, on garde une seule inconnue, les autres deviennent des variables libres que l'on considère alors en second membre.

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- roblèmes
- 2. Systèmes inéaires, Equivalence
  - Vocabulaire
  - Systèmes équivale
- 3. Résolution explicite. cas des
  - Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
  - I.1. Opérations élémen
- 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
- 4.3. Applications

- 2. Systèmes linéaires. Equivalence
  - 2.1. Vocabulaire
  - 2.2. Systèmes équivalents
- 3. Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires
  - 4.2. Algorithme du pivot de GAUSS
  - 4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

Leçon 27 - Système linéaire

⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques oblèmes
- . Systèmes
  - aires. Equivalenc
  - /ocabulaire
- 2.2. Systèmes és
- 3. Résolution explicite. cas des
  - Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivot
- e GAUSS I.1. Opérations élémentaire
- .2. Algorithme du pi iAUSS
- 4.3. Applications

# Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \end{array} \right. \text{et}$$
 
$$C_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$

#### ⇒ Systèmes équivalents

⇒ Méthode de Cramer

⇒ Algorithme du pivot de Gauss

1. Quelques problèmes

2. Systèmes

ocabulaire

.2. Systèmes équivale

3. Résolution explicite. cas des

Vers la formule de Cramer

4. Algorithme du pivot

4.1. Opérations éléme

GAUSS

4.3. Applications

# Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array} \right.$$
 et 
$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$
 Remarque Nombre de solution

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques problèmes
- 2. Systèmes
  - Vocabulaire
- 3. Résolution explicite. cas des
  - 1 Vers la formule de Cramer
- 4 Algorithme du pivot
  - 4.1. Opérations élémer
- 4.1. Operations eleme
   4.2. Algorithme du piv
- 4.3. Applications

## Application Trois systèmes à résoudre :

$$S_1: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{array} \right., S_2: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{array} \right.$$
 et 
$$S_3: \left\{ \begin{array}{ccccc} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{array} \right.$$

Remarque Nombre de solution

### Attention. Lorsqu'il y a infinité de solution...

il n'y a pas unicité d'écriture de cet ensemble

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- roblèmes
- Systèmes
   linéaires, Equivalence
  - . vocabulaire
  - Systèmes équival
- Résolution explicite. cas des systèmes n = p = 2
  - 1. Vers la formule de Cran
- 4. Algorithme du pivo
  - Opérations éléments
- 4.1. Operations elements 4.2. Algorithme du pivot d
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques
- Systèmes
  - Vocabulaire
- . . . . .
- 3. Résolution explicite. cas des
- N. Marrie formula de Comune
- - e GAUSS
- 4.1. Operations elemen
- 40 4 5 5
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- **Objectifs**
- ⇒ Systèmes équivalents
  - Définition de systèmes équivalents

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques
- Systèmes
  - Vocabulaire
- . . . . . . . .
- 3. Résolution
- 1 Vors la formula da Cramar
- o.i. void la formate de oranier
- de Gauss
  - .1. Opérations élémen
- Gauss
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
  - Définition de systèmes équivalents
  - Attention, en règle générale, la substitution ne donne qu'une implication (et un inclusion d'ensemble).

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- . Systèmes
  - /ocabulaire
- 2.2 Systèmes équiva
- 3. Résolution explicite. cas des
- 1 Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivo
  - .1. Opérations élémen
- Gauss
- 4.3. Application



- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques
- Systèmes
  - Vocabulaire
- . . . . .
- 3. Résolution explicite. cas des
- N. Marrie formula de Comune
- - e GAUSS
- 4.1. Operations elemen
- 40 4 5 5
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
  - lacktriangle Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille  $2 \times 2$

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- Systèmes
  - /ocabulaire
- 2 Svetámac ánuir
- B. Résolution
- 1. Vara la formula da Cramor
- de Gauss
- 4.1. Opérations élémen
- Gauss
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
  - lacktriangle Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille  $2 \times 2$
  - Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- 2 Suntàmon Anuium
- 3. Résolution explicite. cas des
- 1 Vors la formula da Cramar
- - GAUSS
- 4.1. Operations elements
   4.2. Algorithme du pivot
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
  - ightharpoonup Déterminant d'un système ou d'une matrice de taille  $2 \times 2$
  - Résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues par les formules de Cramer (fraction de déterminant de matrices)
  - Généralisation en plus grande dimension?

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- oblèmes
- 2. Systèmes
  - ocabulaire
- .2. Systèmes équivale
- 3. Résolution explicite. cas des
  - 1. Vare la formula da Cramor
- 4. Algorithme du pivot
  - 1.1 Onérations élément
- 4.2. Algorithme du pivot d
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- 1. Quelques
- 2. Systèmes
  - Vocabulaire
- 2.2 Svetámac ánu
- 3. Résolution
- explicite. cas des systèmes n = p = 2
- 3.1. Vers la formule de Cramer
- 4. Algorithme du pivo
  - .1. Opérations élémen
- 4.2. Algorithme du p
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
  - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- . Quelques roblèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- 0 0 Continue (m.)
- 3. Résolution explicite. cas des
- 1. Vors la formula da Cramor
- 4. Algorithme du pivo
  - Opérations élémen
- 4.2. Algorithme du pivot
- 4.2 Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
  - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
  - Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques roblèmes
- . Systèmes
  - ocabulaire
- 0.0-12------
- 3. Résolution explicite. cas des
- 1. Vore la formula da Cramor
- - 1 Opérations éléments
- Uperations elemen
   A.2. Algorithme du pivol
- 4.3. Applications

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss
  - Pour avoir des systèmes équivalents, exploitons que des opérations élémentaires
  - Bien diriger ses opérations élémentaires : appliquons l'algorithme du pivot de Gauss.
  - En déduire les formes générales possibles de l'ensemble de solutions.

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- Quelques oblèmes
- . Systèmes
  - Vocabulaire
- 2 Systèmes équiva
- . Résolution xplicite. cas des
- . . . . . . . . . . .
- Vers la formule de Cramer
- . Algorithine du pivoi e Gauss
- I.1. Opérations élémen
- GAUSS
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

- l. Quelques problèmes
- . Systèmes
  - Vocabulaire
  - Continue design
- 3. Résolution explicite. cas des

  - .1. Vers la tormule de Crami
- de Gauss
  - Opérations élément
- Gauss
- 4.3. Application

- ⇒ Systèmes équivalents
- ⇒ Méthode de Cramer
- ⇒ Algorithme du pivot de Gauss

### Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap. 9 : Primitives et équations différentielles
- Exercices: 52, 54, 57 & 58