

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

- 2.1. Définition et représentation
- 2.2. Opérations
- 2.3. Vocabulaire
- 2.4. Bijections et réciproques
- 2.5. Branches infinies



Leçon 15 - Fonctions à la Euler

⇒ **Rappels généraux sur les fonctions**

⇒ **Bijection & Asymptotes**

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations sur les fonctions

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une
fonction ?

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une
fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?

1. Problèmes

2. Généralités

- 2.1. Définition et représentation
- 2.2. Opérations
- 2.3. Vocabulaire
- 2.4. Bijections et réciproques
- 2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?

Problème - Interpolation de la suite géométrique

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Problème - L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle une fonction ?

Problème - Comment calculer π^e ?

Problème - Interpolation de la suite géométrique

Problème - De la multiplication à l'addition

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ **Rappels généraux sur les fonctions**

⇒ **Bijection & Asymptotes**

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.2. Opérations sur les fonctions

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Fonction et ensemble de définition

Définition - Fonction

Une *fonction* d'une variable réelle, à valeurs réelles, est un "procédé" qui à chaque élément x d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ associe un réel $f(x)$ parfaitement déterminé. Une telle fonction est notée

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ est appelé *image* de x par f .

Si $y \in \mathbb{R}$, tout élément x de $\mathcal{D}$ vérifiant $f(x) = y$ est appelé un *antécédent* de y .

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Fonction et ensemble de définition

Définition - Fonction

Une *fonction* d'une variable réelle, à valeurs réelles, est un "procédé" qui à chaque élément x d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ associe un réel $f(x)$ parfaitement déterminé. Une telle fonction est notée

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ est appelé *image* de x par f .

Si $y \in \mathbb{R}$, tout élément x de $\mathcal{D}$ vérifiant $f(x) = y$ est appelé un *antécédent* de y .

Remarque Ensemble de définition

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Graphe d'une fonction

$\mathcal{C} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}_f\}$ s'appelle le *graphe* de f , le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle *représentation graphique* ou *courbe représentative de f* la représentation de cet ensemble dans le plan. La courbe représentative a pour équation $y = f(x)$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Image de $\mathcal{D}$ par une fonction. Fonction restreinte

Si $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_f$ ($\mathcal{D}'$ sous ensemble de $\mathcal{D}_f$), on note $f(\mathcal{D}')$ l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{D}'$: $f(\mathcal{D}') = \{f(x); x \in \mathcal{D}'\}$. $f(\mathcal{D}')$ s'appelle *l'ensemble image (ou image directe)* de $\mathcal{D}'$ par f .

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle *restriction* de f à I la fonction g définie sur I par :

$\forall x \in I, g(x) = f(x)$. On la note $f|_I$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Ensemble des applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on parle aussi d'applications de I dans $\mathbb{R}$)

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.2. Opérations sur les fonctions

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Opérations classiques

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes :

- ▶ Addition : si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction $f + g$ est définie sur I par : $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ▶ Multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est définie sur I par : $\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- ▶ Produit de deux fonctions : si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction $f g$ est définie sur I par : $\forall x \in I, (f g)(x) = f(x) \times g(x)$
- ▶ Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ la fonction $|f|$ est définie sur I par : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Opérations classiques

Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes :

- ▶ Addition : si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction $f + g$ est définie sur I par : $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ▶ Multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est définie sur I par : $\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- ▶ Produit de deux fonctions : si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction $f g$ est définie sur I par : $\forall x \in I, (f g)(x) = f(x) \times g(x)$
- ▶ Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ la fonction $|f|$ est définie sur I par : $\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$

Remarque Lois internes...

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition - Composée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Attention. Non commutativité

En général, même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Exercice

Définir proprement les deux composées (si cela est possible) des fonctions suivantes (ou de leurs restrictions) :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2 - 1 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ **Rappels généraux sur les fonctions**

⇒ **Bijection & Asymptotes**

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.2. Opérations sur les fonctions

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Vocabulaire (et propriétés)

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

- On dit que f est *paire* si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$

$\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à Oy

- On dit que f est *impaire* si $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$

$\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O .

- $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que

$\forall x \in D_f, x + T \in D_f, x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

T est une période de f . $\mathcal{C}_f$ est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Fonction croissante, décroissante et monotone

On dit qu'une fonction f

- ▶ est croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- ▶ est décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- ▶ est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .
- ▶ est *strictement* croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- ▶ est *strictement* décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Proposition - Composition et monotonie

La composée de deux applications monotones de même sens de variation (respectivement de sens contraire) est une application croissante (respectivement décroissante).

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Proposition - Composition et monotonie

La composée de deux applications monotones de même sens de variation (respectivement de sens contraire) est une application croissante (respectivement décroissante).

Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Fonction convexe, concave

On dit qu'une fonction f

- ▶ est convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- ▶ est strictement convexe sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- ▶ est concave sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- ▶ est strictement concave sur I si

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Fonctions (ou applications) bornées

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- ▶ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- ▶ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- ▶ est bornée si elle est majorée et minorée.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Fonctions (ou applications) bornées

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- ▶ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- ▶ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- ▶ est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition - Bilan

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée

si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Fonctions (ou applications) bornées

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées

On dit qu'une fonction f :

- ▶ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$.
- ▶ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, m \leq f(x)$.
- ▶ est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition - Bilan

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée

si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition - Maximum, minimum et extremum

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum sur I de f si

- $\forall x \in I, f(x) \leq M$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$
on dit que f présente un maximum en a .

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minimum sur I de f si

- $\forall x \in I, f(x) \geq m$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$
on dit que f présente un minimum en a .

On parle d'extremum lorsque l'on a un maximum ou un minimum.

On note

$$M = \max_{x \in I} f(x) \text{ et } m = \min_{x \in I} f(x)$$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$,
 $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et
 $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$,
 $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et
 $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

Remarque Voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Maximum local

On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)

s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$,
 $f(x) \leq f(a)$.

On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap D_f$ et
 $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

Remarque Voisinage de a (dans $\mathbb{R}$)

Remarque Extension de définition

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ **Rappels généraux sur les fonctions**

⇒ **Bijection & Asymptotes**

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.2. Opérations sur les fonctions

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- ▶ si tout élément de D a son image dans J
- ▶ si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- ▶ si tout élément de D a son image dans J
- ▶ si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$

Remarque Si, par convention $J = f(D)$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Définition -Bijection

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)

- ▶ si tout élément de D a son image dans J
- ▶ si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D

Formellement :

$$\forall x \in D, f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D, y = f(x).$$

Remarque Si, par convention $J = f(D)$

Exemple Application exponentielle

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Que dire de l'application réciproque ?

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Application (bijection) réciproque

Si f est bijective de D sur J , on définit une fonction g par

$$g : J \rightarrow D \\ y \mapsto x \quad | y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f)$$

Cette fonction g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f , et notée f^{-1} .

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Que dire de l'application réciproque ?

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Définition - Application (bijection) réciproque

Si f est bijective de D sur J , on définit une fonction g par

$$g : J \rightarrow D \\ y \mapsto x \quad | y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f)$$

Cette fonction g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f , et notée f^{-1} .

Exemple Application logarithmique

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Théorèmes (1)

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Proposition - Application (sens direct)

Si f est une bijection de D sur J , on a

$$\forall x \in D, (f^{-1} \circ f)(x) = x;$$

$$\forall y \in J, (f \circ f^{-1})(y) = y;$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Théorème - Réciproque et représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

Alors

- ▶ dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).
- ▶ Si f est monotone sur I alors f^{-1} est monotone sur J , de même sens de variations.

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Théorèmes (1)

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Théorème - Réciproque et représentation graphique

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection et $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

Alors

- ▶ dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).
- ▶ Si f est monotone sur I alors f^{-1} est monotone sur J , de même sens de variations.

Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Théorèmes (2)

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

On admet les théorèmes qui suivent et qui seront démontrés ultérieurement :

Théorème - Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur I , continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$),

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.

Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J .

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ **Rappels généraux sur les fonctions**

⇒ **Bijection & Asymptotes**

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et représentation d'une fonction

2.2. Opérations sur les fonctions

2.3. Vocabulaire d'analyse sur les fonctions

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Etude des branches infinies en ∞

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir-faire. Etude des branches infinies (et définition)

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

1. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Allure

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir-faire. Etude des branches infinies (et définition)

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on calcule $\frac{f(x)}{x}$.

2.1. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, il y a une **branche parabolique horizontale** (ou de direction Ox).

2.2 si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, il y a une **branche parabolique verticale** (ou de direction Oy).

2.3. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \in \mathbb{R}^*$, il faut calculer $f(x) - ax$.

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir-faire. Etude des branches infinies (et définition)

Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, on calcule $\frac{f(x)}{x}$.

2.3. si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, il faut calculer $f(x) - ax$.

2.3.1. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

2.3.2. si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty$ il y a une **branche parabolique oblique de direction** $y = ax$.

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Exercice

Énoncer des fonctions présentant :

1. une asymptote horizontale (on donnera l'équation de cette asymptote)
2. une branche parabolique horizontale
3. une branche parabolique verticale
4. une asymptote oblique (on donnera l'équation de cette asymptote)
5. une branche parabolique oblique (on donnera la direction), mais pas d'asymptote oblique

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

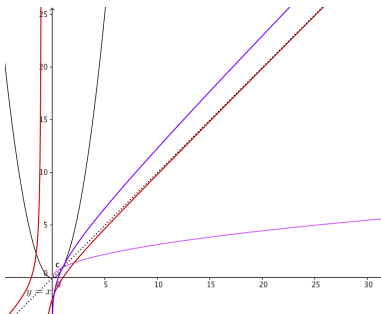
2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Exercice

Indiquer sous chacun des quatre graphiques suivants lesquels présentent des branches paraboliques, des asymptotes. . .



⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

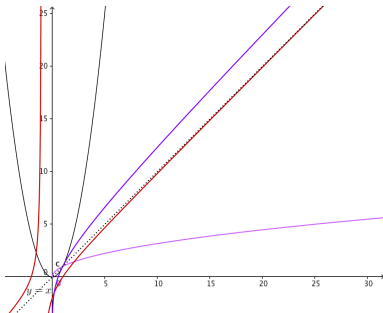
2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Exercice

Indiquer sous chacun des quatre graphiques suivants lesquels présentent des branches paraboliques, des asymptotes. . .



Remarque Courbe asymptote

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- ▶ Ensemble de définition, ensemble image

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- ▶ Ensemble de définition, ensemble image
- ▶ Représentation graphique et opérations sur les fonctions

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- ▶ Ensemble de définition, ensemble image
- ▶ Représentation graphique et opérations sur les fonctions
- ▶ Fonction restreinte

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- ▶ Ensemble de définition, ensemble image
- ▶ Représentation graphique et opérations sur les fonctions
- ▶ Fonction restreinte
- ▶ Parité, imparité, périodicité

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

- ▶ Ensemble de définition, ensemble image
- ▶ Représentation graphique et opérations sur les fonctions
- ▶ Fonction restreinte
- ▶ Parité, imparité, périodicité
- ▶ Applications bornées, et monotonie

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

- ⇒ Rappels généraux sur les fonctions
- ⇒ Bijection & Asymptotes
 - Fonctions bijectives et réciproque

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

- ⇒ Rappels généraux sur les fonctions
- ⇒ Bijection & Asymptotes
 - ▶ Fonctions bijectives et réciproque
 - ▶ Etude à l'infini :

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

▶ Fonctions bijectives et réciproque

▶ Etude à l'infini :

▶ a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

Objectifs

⇒ Rappels généraux sur les fonctions

⇒ Bijection & Asymptotes

▶ Fonctions bijectives et réciproque

▶ Etude à l'infini :

▶ a. $\lim_{x \rightarrow \ell} \frac{f(x)}{x} = \ell$

▶ b. $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) - \ell x \dots$

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies

⇒ Rappels généraux
sur les fonctions

⇒ Bijection &
Asymptotes

Objectifs

- ⇒ Rappels généraux sur les fonctions
- ⇒ Bijection & Asymptotes

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 5
 - 3. Fonctions circulaires et réciproques
 - 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
- ▶ Exercice N°142 & 146

1. Problèmes

2. Généralités

2.1. Définition et représentation

2.2. Opérations

2.3. Vocabulaire

2.4. Bijections et réciproques

2.5. Branches infinies