



## Leçon 16 - Fonctions *à la Euler*

### Leçon 16 - Fonctions *à la Euler*

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

#### 1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

#### 3. Fonctions trigonométrique

- 3.1. Fonctions circulaires
- 3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

#### 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

- 4.1. Fonction puissance entière  
relative
- 4.2. Fonctions polynomiales
- 4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

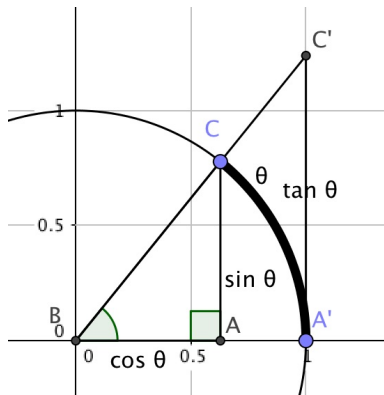
4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Cercle trigonométrique



On reprend, de manière analytique (où le paramètre  $x$  devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

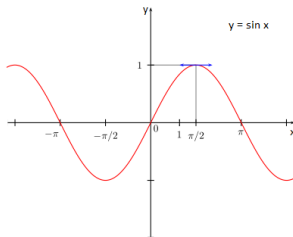
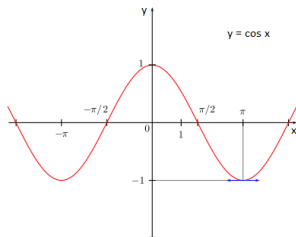
3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonctions cosinus et sinus



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## 1. Problèmes

## 2. Généralités sur les fonctions

## 3. Fonctions trigonométrique

### 3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

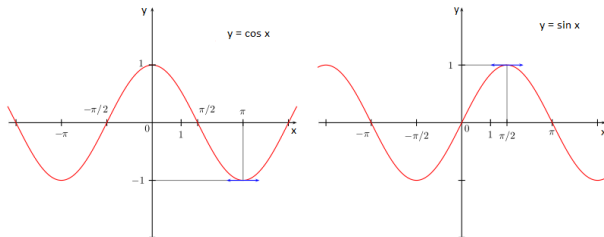
## 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonctions cosinus et sinus



## Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques.  
 $\sin$  est une fonction impaire alors que  $\cos$  est une fonction paire.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque  
 $\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

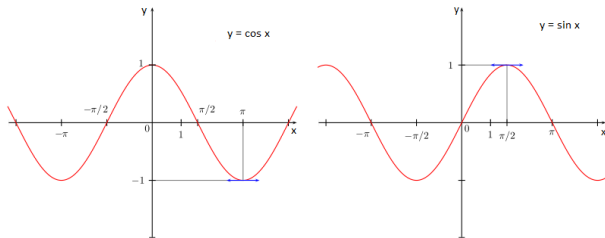
3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonctions cosinus et sinus



## Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques.

$\sin$  est une fonction impaire alors que  $\cos$  est une fonction paire.

Savoir-faire. Transférer un problème trigonométrique « en  $a$  » vers « en 0 ».

Il faut exploiter les formules trigonométriques

$\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$  et

$\cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$ , à connaître par cœur.

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## **Analyse** Inégalité fondamentale

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



## Analyse Inégalité fondamentale

### Proposition - Inégalité

On a pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Analyse Inégalité fondamentale

### Proposition - Inégalité

On a pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## Démonstration

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Analyse Inégalité fondamentale

### Proposition - Inégalité

On a pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## Démonstration

**Exemple** Calculatrice. Calculer  $\sin(0,01234)$

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Analyse Inégalité fondamentale

### Proposition - Inégalité

On a pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## Démonstration

**Exemple** Calculatrice. Calculer  $\sin(0,01234)$

### Exercice

En majorant le module de  $e^{ix} - 1$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 \leq x^2$ .

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  ( $\mathbb{R}$  privé des points de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 $\tan$  est impaire,  $\pi$ -périodique

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

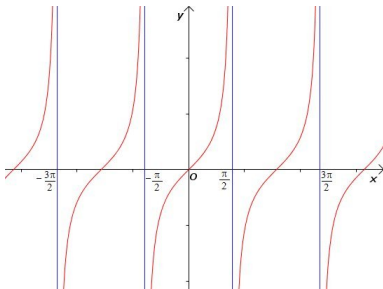
4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  ( $\mathbb{R}$  privé des points de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

$\tan$  est impaire,  $\pi$ -périodique



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

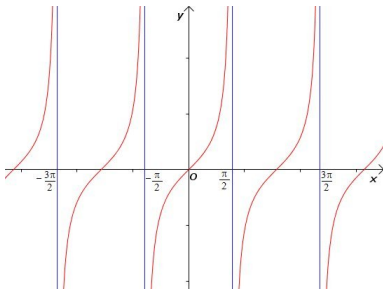
3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$  ( $\mathbb{R}$  privé des points de la forme  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).  
 $\tan$  est impaire,  $\pi$ -périodique



### Exercice

Etudier et représenter la fonction  $\tan$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



## Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  donc réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ .

La bijection réciproque s'appelle arcsinus,  
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left( \sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  donc réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ .

La bijection réciproque s'appelle arcsinus,  
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left( \sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

## Proposition - Rappels

On a :

- ▶  $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arcsin(\sin x) = x$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\sin(\arcsin x) = x$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- ▶  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

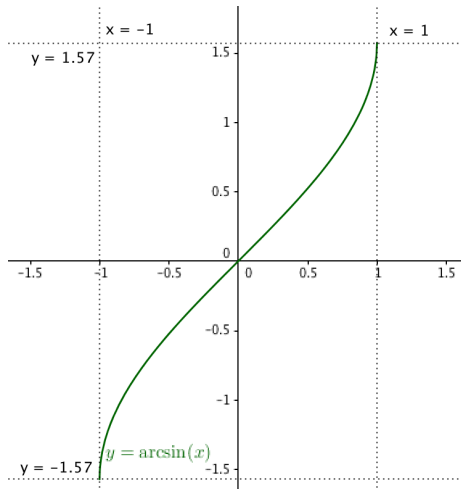
4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonction arcsin



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Analyse Questions

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Analyse Questions

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  donc réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .

La bijection réciproque s'appelle arccosinus,  
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left( \cos t = x \text{ et } t \in [0, \pi] \right)$$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonction arccos

## Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  donc réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .

La bijection réciproque s'appelle arccosinus,  
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ .

Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left( \cos t = x \text{ et } t \in [0, \pi] \right)$$

## Proposition - Rappels

On a :

- ▶  $\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos x) = x$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1], x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
- ▶  $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

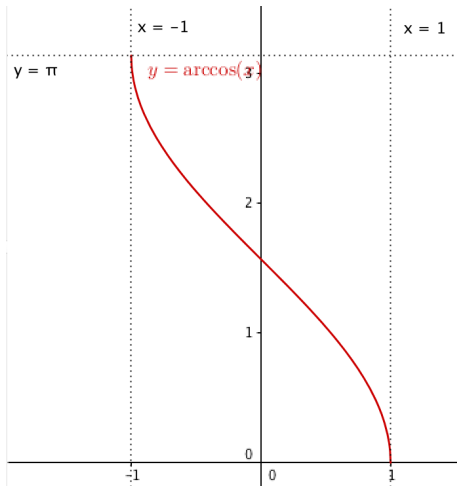
4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonction arccos



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



# Fonction arccos

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Définition - Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur  $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  donc réalise une bijection de  $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .

La bijection réciproque s'appelle arctangente,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left( \tan t = x \text{ et } t \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right)$$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Rappels

On a :

- ▶  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$        $\arctan(\tan x) = x$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R},$        $\tan(\arctan x) = x$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R},$        $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R},$        $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R},$        $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

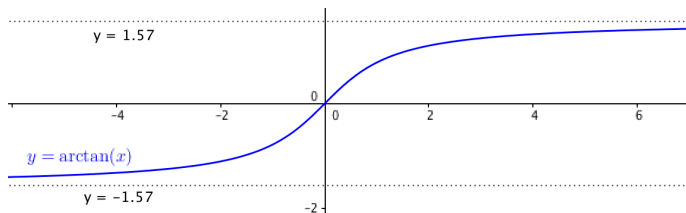
4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonction arctan

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme



1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Fonction arctan

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Puissance entière $> 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on qualifie de fonction puissance entière l'application  $x \mapsto x^n$ , i.e. définie par récurrence par  $x \mapsto x \times x^{n-1}$  et  $x^0 = 1$ .

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si  $n$  est pair, et impaire si  $n$  est impair.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Puissance entière $> 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on qualifie de fonction puissance entière l'application  $x \mapsto x^n$ , i.e. définie par récurrence par  $x \mapsto x \times x^{n-1}$  et  $x^0 = 1$ .

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si  $n$  est pair, et impaire si  $n$  est impair.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

## Définition - Puissance entière $< 0$

Soit  $m \in \mathbb{Z}_-$ , on qualifie de fonction puissance entière négative

l'application  $x \mapsto x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ , i.e. définie par récurrence par

$x \mapsto \frac{1}{x} \times x^{m+1}$  et  $x^0 = 1$ .

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}^*$ . C'est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Cette application est paire si  $n$  est pair, et impaire si  $n$  est impair.

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



## Définition - Puissance entière $> 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on qualifie de fonction puissance entière l'application  $x \mapsto x^n$ , i.e. définie par récurrence par  $x \mapsto x \times x^{n-1}$  et  $x^0 = 1$ .

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si  $n$  est pair, et impaire si  $n$  est impair.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

## Définition - Puissance entière $< 0$

Soit  $m \in \mathbb{Z}_-$ , on qualifie de fonction puissance entière négative l'application  $x \mapsto x^m = \frac{1}{x^{-n}}$ , i.e. définie par récurrence par

$x \mapsto \frac{1}{x} \times x^{m+1}$  et  $x^0 = 1$ .

Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}^*$ . C'est une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Cette application est paire si  $n$  est pair, et impaire si  $n$  est impair.

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole  $\mathcal{C}$  associé à  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ( $m = -1$ ).

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Morphisme

On a pour tout  $m, n \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $x^m \times x^n = x^{m+n}$ .

Vrai également en  $x = 0$  si  $m, n > 0$ .

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Morphisme

On a pour tout  $m, n \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $x^m \times x^n = x^{m+n}$ .

Vrai également en  $x = 0$  si  $m, n > 0$ .

Exercice A démontrer

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## 1. Problèmes

## 2. Généralités sur les fonctions

## 3. Fonctions trigonométrique

- 3.1. Fonctions circulaires
- 3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

## 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

- 4.1. Fonction puissance entière  
relative
- 4.2. Fonctions polynomiales
- 4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Pour la croissance de  $x \mapsto x^n$ , on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Pour la croissance de  $x \mapsto x^n$ , on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

## Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$ .

Avec  $a, x > 0$ , on a donc  $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$ , soit la croissance de  $x \rightarrow x^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Pour la croissance de  $x \mapsto x^n$ , on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

## Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$ .

Avec  $a, x > 0$ , on a donc  $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$ , soit la croissance de  $x \rightarrow x^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Démonstration

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Pour la croissance de  $x \mapsto x^n$ , on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

## Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$ .

Avec  $a, x > 0$ , on a donc  $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$ , soit la croissance de  $x \rightarrow x^n$  sur  $\mathbb{R}$ .

## Démonstration

Exercice Faire la démonstration par récurrence.

On fera bien attention aux variables fixées et à celles qui sont libres.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Pour  $x \in ]-1, \frac{1}{n}[$ ,  $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Pour  $x \in ]-1, \frac{1}{n}[$ ,  $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

Pour  $x \in ]-1, \frac{1}{n}[$ ,  $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

## Démonstration

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances rationnelles.

### Exercice

On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^n = 1$ , puis la continuité à droite de  $t \mapsto t^n$  en 1 et en tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

où  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) ;

Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable  $x$ . On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.

On dit que  $f(x) = b$  est une équation polynomiale si  $f$  est une fonction polynomiale.

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

où  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) ;

Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable  $x$ . On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.

On dit que  $f(x) = b$  est une équation polynomiale si  $f$  est une fonction polynomiale.

## Remarque Notations

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

Par propriétés calculatoires sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

Par propriétés calculatoires sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

## Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions polynomiales, alors :

- ▶  $f + g$  est une fonction polynomiale
- ▶  $f \times g$  est une fonction polynomiale
- ▶  $f \circ g$  est une fonction polynomiale.

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle



⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

Par propriétés calculatoires sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

## Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions polynomiales, alors :

- ▶  $f + g$  est une fonction polynomiale
- ▶  $f \times g$  est une fonction polynomiale
- ▶  $f \circ g$  est une fonction polynomiale.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Factorisation multiple

Rappelons :

## Théorème - Factorisation multiple

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré  $n$ . Soit  $p \leq n$

Si  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ,  $p$  solutions différentes de l'équation  $f(x) = 0$  (racines de  $f$ ).

Alors il existe  $g_p$ , fonction polynomiale de degré  $n - p$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Factorisation multiple

Rappelons :

## Théorème - Factorisation multiple

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré  $n$ . Soit  $p \leq n$

Si  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ,  $p$  solutions différentes de l'équation  $f(x) = 0$  (racines de  $f$ ).

Alors il existe  $g_p$ , fonction polynomiale de degré  $n - p$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

## Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré  $n$  admet au plus  $n$  solutions différentes

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ **Fonctions trigonométriques et réciproque**

⇒ **Fonction puissance et polynomiale**

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

**Analyse** Bijection de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

**Analyse** Bijection de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$

## Définition - Racine $n$ -ième

On note  $\sqrt[n]{\cdot}$  la bijection réciproque de  $x \mapsto x^n$ .

On a donc :

$$\begin{array}{ll} \text{si } n \text{ est pair} & \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \quad \text{pour } x \geq 0 \\ \text{si } n \text{ est impair} & \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{1/n} & \text{pour } x \geq 0 \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} & \text{pour } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Pour  $n$  impair on a donc  $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ .

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Définition - Puissance rationnelle

Soit  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$  (avec  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application  $x \mapsto x^r$  où  $x^r$  vérifie  $(x^r)^q = x^p$ . Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}_+$ . C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Définition - Puissance rationnelle

Soit  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$  (avec  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application  $x \mapsto x^r$  où  $x^r$  vérifie  $(x^r)^q = x^p$ . Son ensemble de définition est  $\mathbb{R}_+$ . C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

**Exemple**  $5^{2/3}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle



**Analyse** Image de  $[0, 1[$  et image de  $]1, +\infty[$  par  $x \mapsto x^r$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

**Analyse** Image de  $[0, 1[$  et image de  $]1, +\infty[$  par  $x \mapsto x^r$

## Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient  $r < r' \in \mathbb{Q}$ .

Alors pour tout  $x > 1$ ,  $x^r < x^{r'}$ . Et si  $x < 1$ ,  $x^r > x^{r'}$ .

$\Rightarrow$  Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

$\Rightarrow$  Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

**Analyse** Image de  $[0, 1[$  et image de  $]1, +\infty[$  par  $x \mapsto x^r$

## Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient  $r < r' \in \mathbb{Q}$ .

Alors pour tout  $x > 1$ ,  $x^r < x^{r'}$ . Et si  $x < 1$ ,  $x^r > x^{r'}$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

**Analyse** Image de  $[0, 1[$  et image de  $]1, +\infty[$  par  $x \mapsto x^r$

## Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient  $r < r' \in \mathbb{Q}$ .

Alors pour tout  $x > 1$ ,  $x^r < x^{r'}$ . Et si  $x < 1$ ,  $x^r > x^{r'}$ .

## Démonstration

**Attention.** Ne pas confondre les variables  $x$  et  $n$

Dès maintenant, on fait bien attention lorsqu'on compare à  $x$  fixé  $x^r$  et  $x^s$  et lorsqu'on compare à  $r$  fixé :  $x^r$  et  $x^{r'}$ .

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier  
 $t \mapsto e^{it}$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier  $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier  $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle



# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier  $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- ▶ Fonction tangente

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier  $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- ▶ Fonction tangente
- ▶ Inégalité fondamentale : pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin x \leq x \leq \tan x$  (et imparité)

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

## Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

► Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

► Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

► Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative  
4.2. Fonctions polynomiales  
4.3. Fonction puissance  
rationnelle



## Objectifs

## ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour  $x > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r = (x^p)^{1/q}$ .

⇒ Puissance et polynôme

3.1. Fonctions circulaires  
3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

#### 4.1. Fonction puissance entière relative

## 4.2. Fonctions polynomiales

#### 4.3. Fonction puissance rationnelle



## Objectifs

## ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour  $x > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r = (x^p)^{1/q}$ .
- ▶ L'application  $x \mapsto x^r$  est continue.
- ▶ Si  $r < r'$ . Si  $x > 1$ , alors  $x^r < x^{r'}$ , si  $x < 1$ , alors  $x^r > x^{r'}$ .

⇒ Puissance et polynôme

### 3.1. Fonctions circulaires

### 3.2. Fonctions circulaires réciproques

#### 4.1. Fonction puissance entière relative

## 4.2. Fonctions polynomiales

### 4.3. Fonction puissance rationnelle

## Objectifs

## ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour  $x > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r = (x^p)^{1/q}$ .
- ▶ L'application  $x \mapsto x^r$  est continue.
- ▶ Si  $r < r'$ . Si  $x > 1$ , alors  $x^r < x^{r'}$ , si  $x < 1$ , alors  $x^r > x^{r'}$ .
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales

⇒ Puissance et polynôme

### 3.2. Fonctions circulaires réciproques

#### 4.1. Fonction puissance entière relative

## 4.2. Fonctions polynomiales

### 4.3. Fonction puissance rationnelle

## Conclusion

## Objectifs

## ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour  $x > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r = (x^p)^{1/q}$ .
- ▶ L'application  $x \mapsto x^r$  est continue.
- ▶ Si  $r < r'$ . Si  $x > 1$ , alors  $x^r < x^{r'}$ , si  $x < 1$ , alors  $x^r > x^{r'}$ .
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- ▶ Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et polynôme

### 3.2. Fonctions circulaires réciproques

#### 4.1. Fonction puissance entière relative

## 4.2. Fonctions polynomiales

### 4.3. Fonction puissance rationnelle

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit  $x \mapsto x^n$  et  $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on définit  $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour  $x > 0$  et  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $x^r = (x^p)^{1/q}$ .
- ▶ L'application  $x \mapsto x^r$  est continue.
- ▶ Si  $r < r'$ . Si  $x > 1$ , alors  $x^r < x^{r'}$ , si  $x < 1$ , alors  $x^r > x^{r'}$ .
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- ▶ Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.
- ▶ Inégalités : pour  $n \in \mathbb{N}$  et pour  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $(1+x)^n \leq 1+nx$   
et pour  $x \in ]-1, \frac{1}{n}[$ ,  $(1+x)^n \geq \frac{1}{1-nx}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions  
trigonométriques et  
réciproque

⇒ Puissance et  
polynôme

## Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

## Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions à la Euler  
5. Fonctions exponentielles (et logarithmes)
- ▶ Exercice N°152 & 155

1. Problèmes

2. Généralités sur les  
fonctions

3. Fonctions  
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires  
réciproques

4. Fonctions  
polynomiales et  
puissances  
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière  
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance  
rationnelle