



Leçon 16 - Fonctions à la Euler

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales
4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière relative

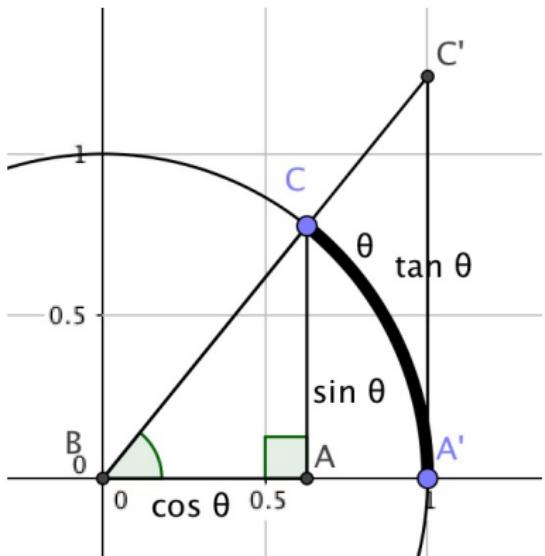
4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance rationnelle

Cercle trigonométrique



On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

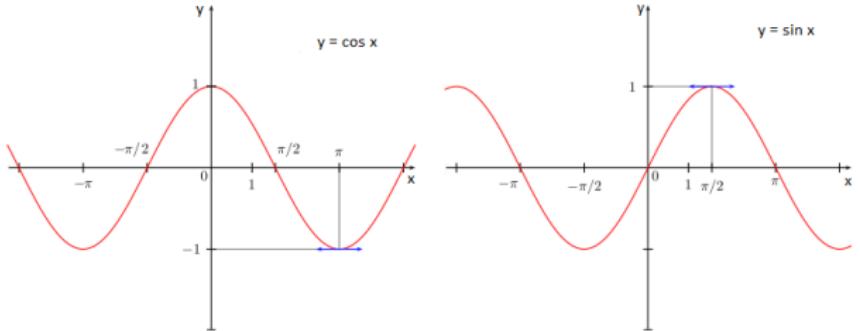
4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonctions cosinus et sinus



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

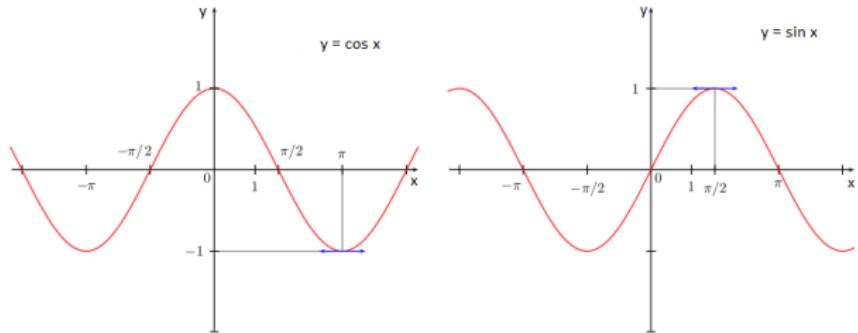
4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonctions cosinus et sinus



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

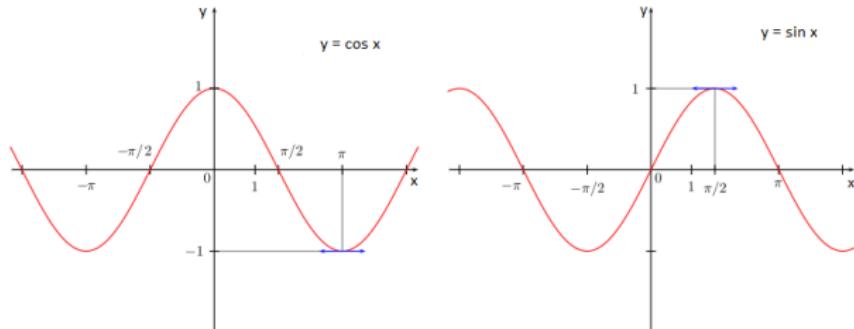
4.3. Fonction puissance rationnelle

Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques.

\sin est une fonction impaire alors que \cos est une fonction paire.

Fonctions cosinus et sinus



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Proposition - Aspect analytique

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques.

\sin est une fonction impaire alors que \cos est une fonction paire.

Savoir-faire. Transférer un problème trigonométrique « en a » vers « en 0 ».

Il faut exploiter les formules trigonométriques

$$\sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h \text{ et}$$

$$\cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h, \text{ à connaître par coeur.}$$

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité

Analyse Inégalité fondamentale

Proposition - Inégalité

On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

Exemple Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

Exercice

En majorant le module de $e^{ix} - 1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 \leq x^2$.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (\mathbb{R} privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
tan est impaire, π -périodique

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

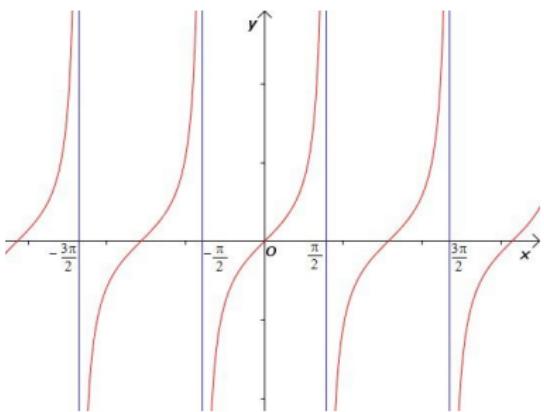
4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (\mathbb{R} privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
 tan est impaire, π -périodique



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

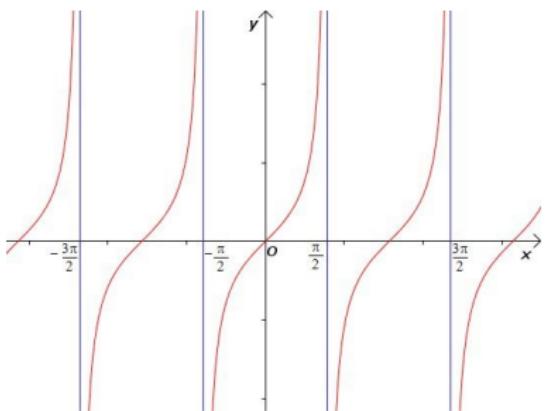
4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Tangente

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique

La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (\mathbb{R} privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
tan est impaire, π -périodique



Exercice

Etudier et représenter la fonction tan

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

- 1. Problèmes**
 - 2. Généralités sur les fonctions**
 - 3. Fonctions trigonométrique**
 - 3.1. Fonctions circulaires**
 - 3.2. Fonctions circulaires réciproques
 - 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles**
 - 4.1. Fonction puissance entière relative
 - 4.2. Fonctions polynomiales
 - 4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arcsin

Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

La bijection réciproque s'appelle arcsinus,

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arcsin

Définition - Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque s'appelle arcsinus,
 $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right)$$

Proposition - Rappels

On a :

- ▶ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin x) = x$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- ▶ $\forall x \in]-1, 1[, \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

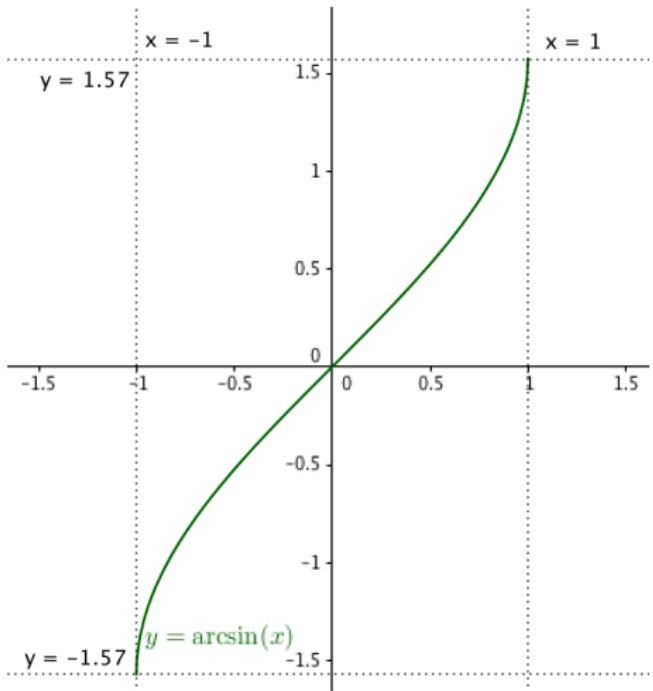
4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arcsin



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes
 2. Généralités sur les fonctions
 3. Fonctions trigonométrique
 - 3.1. Fonctions circulaires
 - 3.2. Fonctions circulaires réciproques
 4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles
 - 4.1. Fonction puissance entière relative
 - 4.2. Fonctions polynomiales
 - 4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arcsin

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Questions

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arcsin

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Questions

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arccos

Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

La bijection réciproque s'appelle arccosinus,
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow (\cos t = x \text{ et } t \in [0, \pi])$$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arccos

Définition - Arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

La bijection réciproque s'appelle arccosinus,
 $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow (\cos t = x \text{ et } t \in [0, \pi])$$

Proposition - Rappels

On a :

- ▶ $\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos x) = x$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- ▶ $\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

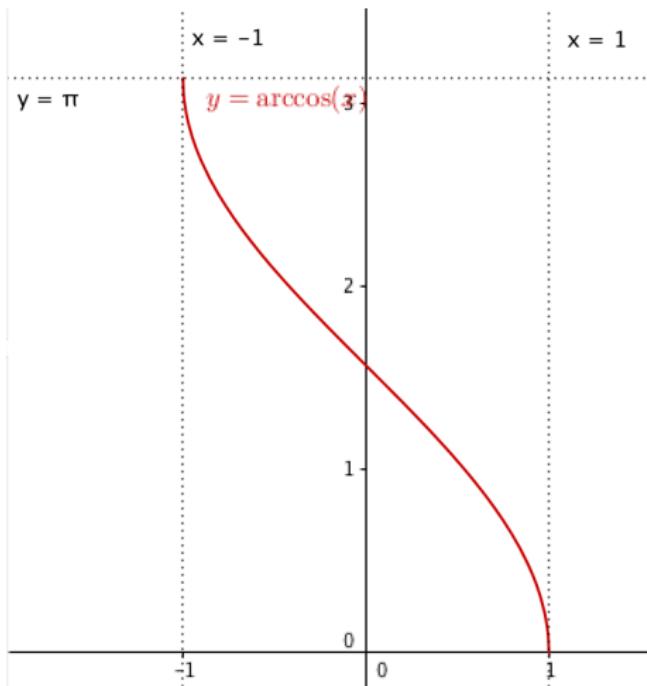
4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arccos



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arccos

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arctan

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Définition - Arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

La bijection réciproque s'appelle arctangente,
 $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arctan

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Rappels

On a :

- ▶ $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

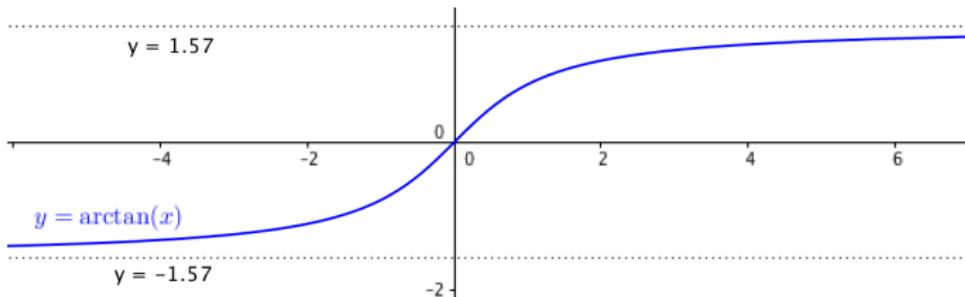
4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arctan



⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Fonction arctan

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est \mathbb{R} . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est \mathbb{R} . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative

l'application $x \mapsto x^m = \frac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par

$x \mapsto \frac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est \mathbb{R}^* . C'est une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définitions

Définition - Puissance entière > 0

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est \mathbb{R} . C'est une fonction continue.

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Définition - Puissance entière < 0

Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative

l'application $x \mapsto x^m = \frac{1}{x^{-n}}$, i.e. définie par récurrence par

$x \mapsto \frac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.

Son ensemble de définition est \mathbb{R}^* . C'est une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .

Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole \mathcal{C} associé à $x \mapsto \frac{1}{x}$ ($m = -1$).

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Morphisme

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Vrai également en $x = 0$ si $m, n > 0$.

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Morphisme

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Morphisme

On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Vrai également en $x = 0$ si $m, n > 0$.

Exercice A démontrer

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R} .

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R} .

Démonstration

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités de croissance

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.

Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < (x')^n$, soit la croissance de $x \rightarrow x^n$ sur \mathbb{R} .

Démonstration

Exercice Faire la démonstration par récurrence.

On fera bien attention aux variables fixées et à celles qui sont libres.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité de Bernoulli

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité de Bernoulli

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalité de Bernoulli

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Proposition - Inégalités de Bernoulli

Soit $x \in]-1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$

Démonstration

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances rationnelles.

Exercice

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^n = 1$, puis la continuité à droite de $t \mapsto t^n$ en 1 et en tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définition

Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) ;

Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x . On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.

On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définition

Définition - Fonction polynomiale

On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

où $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) ;

Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x . On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.

On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Remarque Notations

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- ▶ $f + g$ est une fonction polynomiale
- ▶ $f \times g$ est une fonction polynomiale
- ▶ $f \circ g$ est une fonction polynomiale.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Stabilité opératoire

Par propriétés calculatoires sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales

Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :

- ▶ $f + g$ est une fonction polynomiale
- ▶ $f \times g$ est une fonction polynomiale
- ▶ $f \circ g$ est une fonction polynomiale.

Démonstration

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n . Soit $p \leq n$

Si x_1, x_2, \dots, x_p , p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).

Alors il existe g_p , fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p) \times g_p(x)$$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Factorisation multiple

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple

Soit f une fonction polynomiale de degré n . Soit $p \leq n$

Si x_1, x_2, \dots, x_p , p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).

Alors il existe g_p , fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p) \times g_p(x)$$

Corollaire - Nombre maximal de solution

Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonction puissance et polynomiale

⇒ Fonctions
trigonométriques et
réciproque

⇒ Puissance et
polynôme

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

2. Généralités sur les
fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3. Fonctions
trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires
réciproques

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4. Fonctions
polynomiales et
puissances
rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.1. Fonction puissance entière
relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

4.3. Fonction puissance
rationnelle

Racine

Analyse Bijection de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Racine

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Bijection de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+

Définition - Racine n -ième

On note $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est pair} \quad \sqrt[n]{x} &= x^{1/n} && \text{pour } x \geq 0 \\ \text{si } n \text{ est impair} \quad \sqrt[n]{x} &= \begin{cases} x^{1/n} & \text{pour } x \geq 0 \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} & \text{pour } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour n impair on a donc $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Puissance fractionnaire

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$. Son ensemble de définition est \mathbb{R}_+ . C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Puissance fractionnaire

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Définition - Puissance rationnelle

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$. Son ensemble de définition est \mathbb{R}_+ . C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

Exemple $5^{2/3}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités complémentaires

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités complémentaires

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.

Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités complémentaires

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.

Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Démonstration

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Inégalités complémentaires

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Analyse Image de $[0, 1[$ et image de $]1, +\infty[$ par $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances

Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.

Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Démonstration

Attention. Ne pas confondre les variables x et n

Dès maintenant, on fait bien attention lorsqu'on compare à x fixé x^r et x^s et lorsqu'on compare à r fixé : x^r et x'^r .

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier
 $t \mapsto e^{it}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : cos et partie imaginaire : sin.
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- ▶ Fonction tangente

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

- ▶ Petit point sur les fonctions à valeurs complexes et en particulier $t \mapsto e^{it}$
- ▶ Partie réelle : \cos et partie imaginaire : \sin .
- ▶ Propriétés trigonométriques à bien connaître !! (cf TD précédent)
- ▶ Fonction tangente
- ▶ Inégalité fondamentale : pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ (et impарité)

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative
4.2. Fonctions polynomiales
4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

► Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- ▶ L'application $x \mapsto x^r$ est continue.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$.
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- ▶ L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- ▶ Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative
4.2. Fonctions polynomiales
4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$.
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- ▶ L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- ▶ Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative
4.2. Fonctions polynomiales
4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- ▶ L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- ▶ Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- ▶ Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires
3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative
4.2. Fonctions polynomiales
4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque
- ⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

- ▶ Par récurrence, on définit $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
- ▶ Par bijectivité de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}_+ , on définit $x \mapsto (x^n)^{-1} = x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$
- ▶ On note alors pour $x > 0$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q}$.
- ▶ L'application $x \mapsto x^r$ est continue.
- ▶ Si $r < r'$. Si $x > 1$, alors $x^r < x^{r'}$, si $x < 1$, alors $x^r > x^{r'}$.
- ▶ Polynômes : Stabilité par addition, multiplication et composition des fonctions polynomiales
- ▶ Polynômes (rappels) : factorisation et nombre maximale de racines.
- ▶ Inégalités : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in]-1, +\infty[$, $(1+x)^n \leq 1 + nx$
et pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \geq \frac{1}{1-nx}$

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle

Conclusion

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Puissance et polynôme

Objectifs

⇒ Fonctions trigonométriques et réciproque

⇒ Fonctions puissances, fonctions polynomiales

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : chapitre 3. Fonctions à la Euler
 - 5. Fonctions exponentielles (et logarithmes)
- ▶ Exercice N°152 & 155

1. Problèmes

2. Généralités sur les fonctions

3. Fonctions trigonométrique

3.1. Fonctions circulaires

3.2. Fonctions circulaires réciproques

4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

4.1. Fonction puissance entière relative

4.2. Fonctions polynomiales

4.3. Fonction puissance rationnelle