

Leçon 19 - Nombres complexes

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Problèmes

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

.1. Racine de polynômes

.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphiqu

2.4. Inégalités

B. GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de d

Moivre

3.3. Argument, fo trigonométrique

- $\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

- 1. Problèmes
- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

I. Racine de polynômes

O L L L C L

Représentation graphic

. Inégalités

### GAUSS

. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

8.3. Argument, for rigonométrique

## 1. Problèmes

## 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

## 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

- 3.1. Les complexes de module 1
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

### 2. EULER

Manipulateur des

- 1 Racine de polynômes
- . Hacine de polynome
- Poprágostation graphique
- 4. Inánolitáe

### GALISS

2. Formules d'Euler et de e

Moivre

3.3. Argument, forme

3.3. Argument, forn trigonométrique

## Problème - Multiplication de nombres

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

### 2 FILLER

Manipulateur des nombres du diable

- 1 Racina da nolvoômas
- i. nacine de polynomi
- 2.4. Inánalitás

### . GAUSS

- . .
- i.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow \mathsf{Corps} \; (\mathbb{C},+,\times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

- 2 FILLER
- Manipulateur des
  - Bacine de polynômes
  - i. nacine de polynomi

  - 4 Inámalitáe
- . GAUSS
- . GAUSS
- 2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow \mathsf{Corps}\; (\mathbb{C},+,\times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

2 FILLER

Manipulateur des

1 Racine de nolvoômes

. nacine de polynome

Poprágontation graphique

.4. Inégalités

CALLOS

. Gauss

1. U

Formules d'Euler et de de oivre

3.3. Argument, formi rigonométrique

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

Problème - Application en physique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow \mathsf{Corps} \; (\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

2 FILLER

Manipulateur des

Racine de polynôme

i. nacine de polynom

Poprágontation graphique

4. Inégalités

GALLOO

### GAUSS

1. U

 Formules d'Euler et de de loivre

 Argument, forme gonométrique ⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

## 1. Problèmes

- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### Problèmes

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

### 2.1. Racine de polynômes

Racine de polynômes

3. Représentation graphique

4. Inégalités

### 3. Gauss

.1. U .2. Formules d'Euler et de

foivre

3.3. Argument, forn trigonométrique

## Historique

Analyse Problème de Cardan (1545)

### Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 2.1. Racine de polynômes

## Historique

## Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra (1572).

Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### 1. Problèmes

### 2. EULER :

Manipulateur des

### 2.1. Racine de polynômes

- .1. Racine de polynôme
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

### . GAUSS

- U
- 2. Formules d'Euler et de de loivre
- 3.3. Argument, form trigonométrique

⇒ Interprétation centré

### . Problèmes

### EULER:

Manipulateur des

### 2.1. Racine de polynômes

- 2.2 Calaul alaábriana
- 2.3. Représentation graphiqu
- 2.4. Inégalités

### 3. GAUS

### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de

3.3. Argument, forme

### 4 D > 4 A > 4 B > 4 B > B 9 Q Q

## Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphël Bombelli dans son algebra (1572).

Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

## Exercice

On reprend un exercice historique de Bombelli.

En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer  $(2 + \sqrt{-1})^3$ . En employant les formules de Cardan, trouver les racines de  $x^3 = 15x + 4$ 

## 1. Problèmes

## 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

## 2.2. Calcul algébrique

- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

## 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

- 3.1. Les complexes de module 1
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### . Problèmes

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

Représentation graphique

.... illegalites

### 3. GAUSS

.1. U I.2. Formules d'Euler et de

i.2. Formules d'Euler et de d Moivre

3.3. Argument, form trigonométrique

## **Notation**

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : «  $e^{i\pi}=-1$  donc Dieu existe ».

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- 1. Problème
- 2. EULER
- Manipulateur des nombres du diable
  - Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Hepresentation graphique
- . GAUSS
- GAUSS
- 2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

## **Notation**

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : «  $e^{i\pi}=-1$  donc Dieu existe ».

## Remarque Unicité

Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit z=a+ib où  $i^2=-1$ 

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER :
- Manipulateur des
  - Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Hepresentation graphiqu
- GALLOS
- GAUSS
- 3.2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : «  $e^{i\pi} = -1$  donc Dieu existe ».

## Remarque Unicité

Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit z = a + ib où  $i^2 = -1$ 

## Définition - Notation de nombre complexe

Soit z = a + ib un complexe (a et b sont des réels).

 $a = \operatorname{Re} z$  s'appelle la partie réelle de z.

 $b = \operatorname{Im} z$  s'appelle la partie imaginaire de z;

z est dit imaginaire pur  $(z \in i\mathbb{R})$  si sa partie réelle est nulle.

 $\overline{z} = a - ib$  s'appelle le **conjugué** de z = a + ib.

 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  s'appelle le **module** de z.

## Proposition - C est un corps

Pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ,

- ▶  $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$  (la partie réelle est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- ►  $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$  (la partie imaginaire est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- ► si z = a + ib et z' = a' + ib', alors  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ En particuliar  $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 - |z|^2 - |\overline{z}|^2$ 
  - En particulier  $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ , donc  $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

- $\Rightarrow \mathsf{Corps} \; (\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problème
- 2. EULER:
- Manipulateur des nombres du diable
  - Hacine de polynome
- 2.2. Calcul algébrique
  - 4. Inégalités
- 3. Gaus
- 3.1 IJ
- 3.2. Formules d'Euler et de d Moivre
- 3.3. Argument, form trigonométrique

## définitions ici...).

Proposition - C est un corps Pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ,

- ►  $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$  (la partie réelle est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- ►  $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$  (la partie imaginaire est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- ightharpoonup si z = a + ib et z' = a' + ib', alors  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$ En particulier  $z \times \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ , donc  $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

## Remarque Importance du conjugué

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

2.2. Calcul algébrique

## Proposition - C est un corps

Pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ,

- ▶  $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$  (la partie réelle est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- ►  $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$  (la partie imaginaire est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )
- si z=a+ib et z'=a'+ib', alors  $z\times z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$ En particulier  $z\times \overline{z}=a^2+b^2=|z|^2=|\overline{z}|^2$ , donc  $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### . Problème:

## 2. EULER :

nombres du diable

Hacine de polynome

## 2.2. Calcul algébrique 2.3. Représentation grant

4. Inégalités

### 3. GAUSS

### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de d Moivre

3.3. Argument, forme

3.3. Argument, forr trigonométrique

Remarque Importance du conjugué

Démonstration

⇒ Interprétation centré

### Problèmes

## 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynôm

## 2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

### 9 1 11

3.2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, forme

## Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

⇒ Interprétation centré

Problèmes

2. EULER

Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Representation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

2. Formules d'Euler et de de

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\mathbf{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathbf{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

## Démonstration

2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynôme:

2.2. Calcul algébrique
2.3. Représentation graphique

2.3. Hepresentation grapnique 2.4. Inégalités

3. GAL

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de di Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\left\{ \begin{array}{l} z^0=1 \\ \forall n\in \mathbb{N}, z^{n+1}=z^nz \end{array} \right.$$

On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

Pour  $z \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$ , on a alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

## ⇒ Interprétation centré

### Problème

### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynôme

## 2.2. Calcul algébrique

2.3. Representation graphique

### 2.4. Inégalités

### 9 1 11

3.2. Formules d'Euler et de d Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

Pour  $z \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$ , on a alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

## Exercice Faire la démonstration

### ⇒ Interprétation centré

### Problèmes

### . EULER :

Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynôr

## 2.2. Calcul algébrique

2.4. Inégalités

### CALLOC

GAUSS

2. Formules d'Euler et de de

3.3. Argument, form

## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall \ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

$$|zz'| = |z| |z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0\text{)}$$

## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall \ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

$$|zz'| = |z| |z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$

$$|z| = |\overline{z}| = |-z|$$
  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} (\operatorname{si} z' \neq 0)$ 

## Démonstration

## Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall \ a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |zz'| = |z| |z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$
$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} (\operatorname{si} z' \neq 0)$$

## Démonstration

Remarque Valeur absolue et module

## 1. Problèmes

- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### Problèmes

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

1. Racine de polynômes

. ridding de polynom

2.3. Représentation graphique

4. Inégalités

### CALLOC

. GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de

3.3. Argument, formi



## **Affixe**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . Le point M de coordonnées (a,b) caractérisé par  $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ , peut alors être représenté par le complexe z = a + ib.

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow \mathsf{Corps}\; (\mathbb{C},+,\times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### 1. Problème

### 2. EULER

Manipulateur des nombres du diable

- Racine de polynômes
- . Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

### . Gauss

- U
   Formules d'Euler et de c
- 3.3. Argument, forme

⇒ Interprétation centré

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

### 1. Problème

## 2. EULER

Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algebrique

2.3. Représentation graphique

.4. Inégalités

### \_

### 3.1 IJ

3.2. Formules d'Euler et de e

3.3. Argument, forme

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . Le point M de coordonnées (a,b) caractérisé par  $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ , peut alors être représenté par le complexe z = a + ib.

## Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

z = a + ib est alors appelé **affixe** du point M(a,b), on peut noter  $z = \mathrm{Aff}(M)$ .

Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z. De même, si  $\vec{w}$  est un vecteur de coordonnées (a,b), a+ib est appelé affixe de  $\vec{w}$  (noté  $\mathrm{Aff}(\vec{w})$ ), lui-même appelé (vecteur) image du complexe a+ib.

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### 1. Problème

## 2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.3. Représentation graphique

4. Inégalités

### ....

### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de « Moivre

3.3. Argument, forme

## domarque Avec

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . Le point M de coordonnées (a,b) caractérisé par  $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ , peut alors être représenté par le complexe z = a + ib.

## Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

z = a + ib est alors appelé **affixe** du point M(a,b), on peut noter  $z = \mathrm{Aff}(M)$ .

Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z. De même, si  $\vec{w}$  est un vecteur de coordonnées (a,b), a+ib est appelé affixe de  $\vec{w}$  (noté  $\mathrm{Aff}(\vec{w})$ ), lui-même appelé (vecteur) image du complexe a+ib.

## Remarque Axes

### ⇒ Interprétation centré

### Problèmes

### 2. EULER : Manipulateur des

nombres du diable

2.1. Racine de polynomes
2.2 Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inémolitée

2.4. Inégalités

### 3 GAUSS

### 3.1. U

2. Formules d'Euler et de de

3.3. Argument, form

# Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique

Si z est l'affixe de M alors  $\overline{z}$  est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Si z = Aff(M) alors |z| est égal à la distance OM.

Si z = Aff(M) et  $z_0 = \text{Aff}(M_0)$ , alors  $\text{Aff}(\vec{M_0 M}) = z - z_0$  et

 $|z-z_0|=M_0M$ 

## 1. Problèmes

- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : Gauss et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### . Problème:

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynômes

Calcul algábrigue

Représentation graphi

2.4. Inégalités

### 3. Gauss

0 4 51

.2. Formules d'Euler et de d foivre

3.3. Argument, form trigonométrique

## Théorème - Inégalités

Pour  $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ , on a les inégalités suivantes :

 $\operatorname{Re} z (\leq |\operatorname{Re} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in \mathbb{R}^+$ 

 $\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in i\mathbb{R}^+$ 

$$|z| - |z'|$$
  $\leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$  (Inégalité triangulaire)

Avec égalité dans l'inégalité de droite si et seulement si

z'=0 ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z=\lambda z'$  (z,z' positivement liés).

Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 2.4. Inégalités

Pour  $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ , on a les inégalités suivantes :

 $\operatorname{\mathbf{Re}} z (\leq |\operatorname{\mathbf{Re}} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in \mathbb{R}^+$ 

 $\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in i\mathbb{R}^+$ 

$$|z| - |z'|$$
  $\leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$  (Inégalité triangulaire)

Avec égalité dans l'inégalité de droite si et seulement si

z'=0 ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z=\lambda z'$  (z,z' positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici!

- $\Rightarrow \mathsf{Corps} \; (\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER:
- Manipulateur des nombres du diable
  - Racine de polynômes
  - .2. Calcul algébrique
  - Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- Causon
- .1. U
- .2. Formules d'Euler et de de foivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

## Théorème - Inégalités

Pour  $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ , on a les inégalités suivantes :

 $\operatorname{Re} z (\leq |\operatorname{Re} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in \mathbb{R}^+$ 

 $\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in i\mathbb{R}^+$ 

$$|z| - |z'|$$
  $\leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$  (Inégalité triangulaire)

Avec égalité dans l'inégalité de droite si et seulement si

z'=0 ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z=\lambda z'$  (z,z' positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici!

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire

Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 2.4. Inégalités

Pour  $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ , on a les inégalités suivantes :

 $\operatorname{\mathbf{Re}} z (\leq |\operatorname{\mathbf{Re}} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in \mathbb{R}^+$ 

 $\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z|$  avec égalité si et seulement si  $z \in i\mathbb{R}^+$ 

$$|z| - |z'|$$
  $\leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$  (Inégalité triangulaire)

Avec égalité dans l'inégalité de droite si et seulement si

z'=0 ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z=\lambda z'$  (z,z' positivement liés).

## Attention. Module ou valeur absolue?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici!

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire Démonstration

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
  - . Problèmes
- . Euler :
- nanipulateur des nombres du diable
  - Racine de polynômes
- 2. Calcul algébrique
- Représentation graphiq
- 2.4. Inégalités
- Causon
- 1. U
- Formules d'Euler et de de pivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

## Inégalités

### Par récurrence :

## Proposition - Inégalités

Pour n complexes  $z_1, \ldots, z_n$  on a

$$|z_1+\cdots+z_n| \leq |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER :
- Manipulateur des
  - · Davis de colonia
  - Hacine de polynomi
  - Renrésentation granhique
- 2.4. Inégalités
- . GAUSS
- 1 11
- 2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

### Proposition - Inégalités

Pour n complexes  $z_1, \ldots, z_n$  on a

$$|z_1+\cdots+z_n| \leq |z_1|+\cdots+|z_n|.$$

# Proposition - Caractérisation des complexes remarquables

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Re} z = \mathbf{Im} z = 0$$
$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Im} z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Re} z)^2$$
$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Re} z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Im} z)^2$$

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER :
- Manipulateur des nombres du diable
  - Racine de polynômes
  - 2. Calcul algébrique
  - nepresentation grapm
- 2.4. Inégalités
- 0 041100
- 9 1 11
- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, for trigonométrique

⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication

### 1. Problèmes

- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynômes

Colcul alnáhrinua

I. Représentation graphiqu

Inégalités

#### 3. GAUS

31 II

2. Formules d'Euler et de de loivre

3.3. Argument, forr trigonométrique

### Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur  $\mathbb{R}^2$  (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### 1. Problèmes

#### . EULER :

Manipulateur des combres du diable

Racine de polynômes

Colcul alnáhrinua

Représentation graphique

Inégalités

#### . . . . . . . .

#### 3.1. U

i.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, form trigonométrique

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur  $\mathbb{R}^2$  (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

### Définition - Groupe unitaire

On note  $\mathbb U$  l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de  $\mathbb C$ , ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1 \}.$$

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
  - . Problème
  - EULER:

Manipulateur des nombres du diable

- .1. Racine de polynôme
- 2. Calcul algébrique
- Représentation graphique
- .4. Inégalités
- 3. Gauss
- 3.1. U
  - 2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ ) ⇒ Interprétation dans le plan

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur  $\mathbb{R}^2$  (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

⇒ Interprétation

### Définition - Groupe unitaire

centré

On note U l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de C, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

 $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1 \}.$ 

31 IJ

### Proposition - Conjugaison sur U

 $\forall (z,z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$ 

On dit que l'ensemble U muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

⇒ Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ ⇒ Interprétation dans le plan

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur  $\mathbb{R}^2$  (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

⇒ Interprétation centré

### Définition - Groupe unitaire

On note  $\mathbb U$  l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de  $\mathbb C$ , ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid , |z| = 1 \}.$$

### Proposition - Conjugaison sur $\ensuremath{\mathbb{U}}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U}, \overline{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble  $\mathbb U$  muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

#### . Problème

EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- Racine de polynômes
- 2. Calcul algébrique
- I. Inégalités

#### 31 U

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

### Démonstration

# Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

### Analyse Géométrique

Soit  $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Considérons les 4 points du plan A(1),  $B(u) \neq A$ , C(z) et  $D(u \times z)$ .

Alors AC = |z - 1| et  $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$ .

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow \mathsf{Corps}\; (\mathbb{C},+,\times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

### . EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynôme:
- n. raune de polynom
- 3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### 3. GAUSS

- 3.1. U
  3.2. Formules d'Euler et de
- Moivre

# Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

### Analyse Géométrique

Soit  $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Considérons les 4 points du plan A(1),  $B(u) \neq A$ , C(z) et  $D(u \times z)$ .

Alors AC = |z - 1| et  $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$ .

### Définition - Argument de $u \in \mathbb{U}$ , de $z \in \mathbb{C}$

Soit  $u \in \mathbb{U}$ . On note I, le point du plan d'affixe 1 et M celui d'affixe u.

On appelle argument de  $u \in \mathbb{U}$  noté  $\arg(u)$ , l'angle (principal)  $(\vec{OI}, \vec{OM})$ .

Dans un premier temps, on note  $\measuredangle\theta$  ce nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ .

On a alors  $u = \cos \theta + i \sin \theta$ , pour  $\theta \equiv \text{Arg}(u)$ .

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### 1. Problème

### . EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynôme:
- 2. Calcul algébrique
- .3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### 3. Gaus

#### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

### Remarque

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
  - Problème:
- 2 FILLER

Manipulateur des nombres du diable

- Bacine de polynômes
- 2.1. Hacine de polynon
- 2.3 Renrésentation granhique
- 2.4. Inégalités
- GALISS
- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, form trigonométrique

# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

### Remarque Démonstration

## Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow \mathsf{Corps}\; (\mathbb{C},+,\times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### . Problème

#### 2 FILLER

Manipulateur des

- Bacine de polynômer
- 2.1. Hacine de polynon
- 3 Ronrásantation granhique
- 2.4. Inénalités

#### GALISS

- 3.1. U
  3.2. Formules d'Euler et de
- .2. Formules d'Euler et de de foivre
- 3.3. Argument, forn trigonométrique

# Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

### Remarque Démonstration

### Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ .

Notons  $\theta = \arg(u)$ .

Alors  $u \times z$  est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ , à partir du point d'affixe z

La démonstration dans l'analyse

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- I. Problèmes
- . EULER :

Manipulateur des

- I. Racine de polynômes
- 2. Calcul algébrique
- Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- . . . . .
- 3.1. U
- i.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, form trigonométrique

# Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ .

Notons  $\theta = \arg(u)$ .

Alors  $u \times z$  est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ , à partir du point d'affixe z

La démonstration dans l'analyse

### Attention. Mauvaise définition de l'argument

La définition donnée ici est peu satisfaisante; avec un argument principal, on n'a pas nécessairement  ${\rm Arg}zz'={\rm Arg}z+{\rm Arg}z',$  mais seulement des congruences.

⇒ Interprétation centré

#### . Problèmes

### EULER:

Manipulateur des nombres du diable

- .1. Racine de polynôme
- .2. Calcul algébrique
- 4. Inágalitás
- 2.4. Inegalites

#### . . . .

### 3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme rigonométrique

### Notation exponentielle

### Corollaire - Propriété de $e^i$

Pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle (\theta + \theta')$ .

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### . Problème

#### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

Calcul alaábriana

2.3. Représentation graphiqu

2.4. Inégalités

#### . GAUSS

3.1. U

Moivre

3.3. Argument, forr trigonométrique

### Notation exponentielle

### Corollaire - Propriété de $e^i$

Pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle (\theta + \theta')$ .

### Démonstration

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### I. Problèmes

#### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynômes
- z. r. riacine de polynom
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### 3. Gauss

- 3.1. U
  3.2. Formules d'Euler et de de
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

### Notation exponentielle

### Corollaire - Propriété de $e^i$

Pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle (\theta + \theta')$ .

### Démonstration

Analyse - Non injectivité

Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### . Problèmes

#### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynômes
- . . . . . . . . . .
- .3. Représentation graphiqu
- 2.4. Inégalités

#### . Gauss

- 3.1. U
  3.2. Formules d'Euler et de
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Interprétation centré

#### . Problèmes

### . EULER :

nombres du diable

- i. Hacine de polynomes
- 3. Représentation gra
- 2.4. Inégalités
- 2.4. Inegalites

#### 3. GAUS

#### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de d Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

### Corollaire - Propriété de $e^i$

Pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle (\theta + \theta')$ .

### **Démonstration**

Analyse - Non injectivité

### Définition - Notation d'Euler

Nous verrons/avons vu que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient  $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ . Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme  $x\mapsto A^x$  où A=f(1).

Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant  $e^{i\theta} = \angle \theta = \cos \theta + i \sin \theta$ 

### Propriétés

On a alors, plus globalement:

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

#### 2 FILLER

Manipulateur des nombres du diable

- Racine de polynômes
- ... nacine de polynom
- 2 Poprácontation graphicus
- 2.4 Inámolitás
- \_

#### 3. GAUSS

- 3.1. U
  3.2. Formules d'Euler et de d
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Interprétation centré

#### 31 IJ

### On a alors, plus globalement:

### Théorème - Propriétés

Soient  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$
 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ 

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

#### 31 IJ

On a alors, plus globalement:

### Théorème - Propriétés

Soient  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\begin{split} e^{i(\theta+\theta')} &= e^{i\theta} e^{i\theta'} \\ e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\ e^{i\theta} &= 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{split}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

### Démonstration

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

# Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ 

et  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ 

#### 1. Problème

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynôme:

Calant alaébaiana

3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

#### . Gauss

3.1. U
3.2. Formules d'Euler et de d

Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

#### ⇒ Interprétation centré

### Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$cos(a+b) = cos a cos b - sin a sin b$$
et 
$$sin(a+b) = sin a cos b + cos a sin$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

### Démonstration

#### 31 IJ

⇒ Interprétation dans le plan

#### ⇒ Interprétation centré

### Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

# et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

### Démonstration

### Exercice

En déduire les formules donnant cos(a - b) et sin(a - b).

#### Problème

### . EULER:

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynôme
- 2. Calcul algébriqu
- 3. Représentation graph
- .4. Inégalités

#### 3. Gauss

#### 3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication
- 1. Problèmes
- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable

  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

Lecon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

#### ⇒ Interprétation centré

#### 1. Problèmes

### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme

### Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

#### ⇒ Interprétation centré

#### . Problème

### . EULER :

Manipulateur des nombres du diable

- . Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algebrio
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### GAUSS

#### . . . .

#### 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

### Proposition - Formules d'Euler

$$\cos \theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
,  $\sin \theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ .

### Exercice

Calculer  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ , en déduire une expression de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

### Formule de (de) Moivre

### Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
  
$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow \mathsf{Corps}\; (\mathbb{C},+,\times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### 1. Problèmes

### 2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

2 Colcul alnábrique

2.3. Représentation graphique

L.-v. mogamos

### GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

#### ⇒ Interprétation centré

### Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$
  
 $\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ 

### Démonstration

#### . Problèmes

. EULER : lanipulateur des

Racine de polynômes

Calant alaébaiana

3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

### GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

### **Factorisation**

### Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme  $e^{i}a \pm e^{i}b$  (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$
 ,  $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ 

 $\text{Cela donne}: \qquad e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$ Et on applique les formules d'Euler

Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme  $e^{i}a \pm e^{i}b$  (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$
 ,  $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ 

Cela donne :  $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$ Et on applique les formules d'Euler

### Exercice

Factoriser  $1 + e^{i\theta}$  et  $1 - e^{i\theta}$ . Retrouver les formules donnant  $1 + \cos\theta$ 

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 3.2 Formules d'Euler et de de Moivre

Lorsqu'on rencontre un expression de la forme  $e^ia \pm e^ib$  (a,b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$
 ,  $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ 

Cela donne :  $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$ Et on applique les formules d'Euler

### Exercice

Factoriser  $1+e^{i\theta}$  et  $1-e^{i\theta}$ . Retrouver les formules donnant  $1\pm\cos\theta$ 

### Exercice

Nouveau calcul de  $\sum_{k=0}^{n} \cos kt$  et  $\sum_{k=0}^{n} \sin kt$ 

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### . Problème

### EULER:

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

2. Calcul algébrique

l. Representation graphic

2.4. Inégalités

#### GAUSS

3.2. Formules d'Euler et de de

3.3. Argument, forme trigonométrique

Il s'agit d'exprimer  $\cos^n \theta$  ou  $\sin^n \theta$  sous forme d'une somme de  $\cos k\theta$  ou  $\sin k\theta$ 

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- Ecrire  $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ .
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : donc simplification des  $i \dots$ 

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- Ecrire  $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ .
- Développer avec la formule du binôme.
- Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : donc simplification des  $i \dots$ 

### Exercice

Linéariser  $\cos^3 \theta$ .  $\sin^4 \theta$ .

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- 3.2. Formules d'Euler et de de
- Moivre

- Ecrire  $cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$  ou  $sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$ .
- Utiliser la formule du binôme pour calculer  $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$ .
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- . EULER:
- Manipulateur des nombres du diable
  - Racine de polynômes
- .2. Calcul algébrique
- Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- . Gaus

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de

Moivre
3.3. Argument, forme

- Ecrire  $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$  ou  $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n].$
- Utiliser la formule du binôme pour calculer  $(e^{it})^n = (\cos t + i\sin t)^n$ .
- Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

### Exercice

Ecrire  $\cos 3t$  en fonction des puissances de  $\cos t$ ,  $\sin 3t$  comme le produit de  $\sin t$  et d'une expression contenant des puissances de  $\cos t$ . Faire de même avec  $\cos 5t$  et  $\sin 5t$ .

Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

### 1. Problèmes

- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
  - 2.1. Racine de polynômes
  - 2.2. Calcul algébrique
  - 2.3. Représentation graphique
  - 2.4. Inégalités
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
  - 3.1. Les complexes de module 1
  - 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
  - 3.3. Argument, forme trigonométrique

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

Colcul alnáhrinua

Représentation graph

. Inégalités

#### . Gauss

1. U

i.2. Formules d'Euler et de d Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

.1. Racine de polynôme

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphiqu

2.4. Inégalités

#### 4.11

2. Formules d'Euler et de

Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

### Définition - Argument

Soit  $z\in\mathbb{C},\,z\neq0$ , on a  $\frac{z}{|z|}\in\mathbb{U}$  donc il existe  $\theta\in\mathbb{R}$  tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

On dit que  $\theta$  est un argument de z. On note  $\theta = \arg z$ .

L'écriture  $z=re^{i\theta}$  où r=|z| est appelée forme trigonométrique de z.

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Définition - Argument

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , on a  $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$  donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

On dit que  $\theta$  est un argument de z. On note  $\theta = \arg z$ .

L'écriture  $z = re^{i\theta}$  où r = |z| est appelée forme trigonométrique de z.

L'argument est une fonction logarithmique (qui vérifie  $f(a \times b) = f(a) + f(b)$  mais multivariée (à plusieurs valeurs).

Si 
$$(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$$
, on a

$$arg\overline{z} \equiv -argz[2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$arg(zz') \equiv (argz + argz')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER :
- Manipulateur des nombres du diable
  - . Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- 3. Gaus
- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Si 
$$(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$$
, on a

$$\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

Attention Pas d'unicité.

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER:
- Manipulateur des nombres du diable
  - . Racine de polynômes
- .2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- 3. Gaus
- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Si 
$$(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$$
, on a

$$\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z')[2\pi]$$

Attention Pas d'unicité.

Remarque Géométriquement

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
- Problèmes
- 2. EULER :
- Manipulateur des nombres du diable
  - . Racine de polynômes
  - .2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités
- 3. Gaus
- 3.1. U
  - .2. Formules d'Euler et de d
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

### ⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

### 2. EULER

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

#### 3.1 IJ

8.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Proposition - Relation arg et arctan

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $\arg(1+ix) \equiv \arctan x[2\pi]/$ Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $\arg z = \arctan \frac{\mathbf{Im}z}{\mathbf{Re}z}[\pi]$ . Précisément :  $\begin{cases} & \operatorname{arctan} \frac{\mathbf{Im}z}{\mathbf{Re}z} & \operatorname{si} \mathbf{Re}z > 0 \end{cases}$ 

 $\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{\mathbf{Im}z}{\mathbf{Re}z} & \text{si } \mathbf{Re}z > 0\\ \frac{\mathbf{Im}z}{\mathbf{Re}z} + \pi & \text{si } \mathbf{Re}z < 0 \end{cases}$ 

### ⇒ Interprétation centré

#### 1. Problèmes

### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

Représentation graphi

2.4. Inégalités

### \_

#### 3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de

3.3. Argument, forme trigonométrique

## Proposition - Relation arg et arctan

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $\arg(1+ix) \equiv \arctan x[2\pi]/$ Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $\arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}[\pi]$ . Précisément :  $\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctan} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} & \operatorname{si} \operatorname{Re} z > 0\\ \operatorname{arctan} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \pi & \operatorname{si} \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$ 

### **Démonstration**

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### . Problème

#### EULER:

Manipulateur des

- Racine de polynôme
- . . . . . . . . . . .
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### . Gauss

- .1. 0 .2. Formules d'Euler et de d
- Moivre

  3.3 Argument forme
- 3.3. Argument, form trigonométrique

### **Objectifs**

- ⇒ Calculs simples dans le corps ℂ
  - Définition algébrique :  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}\$  et  $i^2 = -1$

Lecon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$ 
  - ▶ Définition algébrique :  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $i^2 = -1$
  - L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow \mathsf{Corps} \; (\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### . Problème:

### 2. EULER

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

. naune de polynome

Représentation graphique

2.4. Inégalités

### 3. Gauss

.2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, forme trigonométrique

### **Objectifs**

- ⇒ Calculs simples dans le corps ℂ
  - Définition algébrique :  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}\$  et  $i^2 = -1$
  - L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
  - Intéressant : le module de  $z=\sqrt{a^2+b^2}$ . z inversible ssi  $|z|\neq 0$ . Et  $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ , d'où la conjugaison

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

# Objectifs

# $\Rightarrow$ Calculs simples dans le corps $\mathbb C$

- ▶ Définition algébrique :  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $i^2 = -1$
- L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- Intéressant : le module de  $z=\sqrt{a^2+b^2}$ . z inversible ssi  $|z|\neq 0$ . Et  $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ , d'où la conjugaison
- Inégalité triangulaire et série d'inégalités.

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré
  - Problèmes
- 2. EULER : Manipulateur des
- Racine de polynôme
- .2. Calcul algébrique
- Représentation graphique
- GALISS
- i.1. IU i.2. Formules d'Euler et de d
- 3.3. Argument, forme

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### . Problème

#### EULER:

Manipulateur des

- Racine de polynôme
- . . . . . . . . . . .
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### . Gauss

- .1. 0 .2. Formules d'Euler et de d
- Moivre

  3.3 Argument forme
- 3.3. Argument, form trigonométrique

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
  - Somme : translation de vecteur

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

#### 2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

1. Racine de polynômes

- . . . . . . .

.3. Représentation graphiqu

.4. Inégalités

### . Gauss

3.2. Formules d'Euler et de

3.3. Argument, forme trigonométrique

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
  - Somme : translation de vecteur
  - Le module : norme du vecteur.

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

 $\Rightarrow$  Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

#### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

. ridding de polynom

.3. Représentation graphiqu

.4. Inégalités

#### . Gauss

.1. U .2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, forme trigonométrique

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
  - Somme : translation de vecteur
  - Le module : norme du vecteur.
  - Comment interpréter le produit ?

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

. Problème

2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

I. Racine de polynômes

n. raune de polynom

.3. Représentation graphiqu

.4. Inégalités

B. GAUSS

.2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, forn trigonométrique

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

# Leçon 19 - Nombres complexes

- $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

#### . Problème

#### EULER:

Manipulateur des

- Racine de polynôme
- . . . . . . . . . . .
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

#### . Gauss

- .1. 0 .2. Formules d'Euler et de d
- Moivre

  3.3 Argument forme
- 3.3. Argument, form trigonométrique

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
  - $\blacktriangleright \ \ \, {\rm D\'efinir} \ {\rm le} \ {\rm groupe} \ \mathbb{U}, \ {\rm de} \ {\rm nombres} \ {\rm complexes} \ {\rm de} \ {\rm module} \ 1.$

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

#### 2. EULER :

Manipulateur des nombres du diable

Racine de polynômes

O L L L CL

.3. Représentation graphiqu

2.4. Inégalités

#### . Gauss

i.2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, form

### **Objectifs**

- ⇒ Calculs simples dans le corps ℂ
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
  - Définir le groupe  $\mathbb{U}$ , de nombres complexes de module 1.
  - Notation complexe trigonométrique :  $z = \rho e^{i\theta}$ .

Lecon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
  - lacktriangle Définir le groupe  $\mathbb U$ , de nombres complexes de module 1.
  - Notation complexe trigonométrique :  $z = \rho e^{i\theta}$ .
  - Généralisation à la notion d'arguments.

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

### 2. EULER:

Manipulateur des nombres du diable

. Racine de polynôme:

Colcul algébrique

3. Représentation graphique

.4. Inégalités

### B. GAUSS

.2. Formules d'Euler et de d

3.3. Argument, form trigonométrique

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Calculs simples dans le corps  $\mathbb C$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
  - lacktriangle Définir le groupe  $\mathbb{U}$ , de nombres complexes de module 1.
  - Notation complexe trigonométrique :  $z = \rho e^{i\theta}$ .
  - Généralisation à la notion d'arguments.
  - Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation

Leçon 19 - Nombres complexes

 $\Rightarrow$  Corps  $(\mathbb{C}, +, \times)$ 

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

#### Problèmes

### . EULER :

lanipulateur des

. Racine de polynômes

2. Calcul algébrique

3. Représentation graphique

.4. Inégalités

#### . Gauss

.1. U .2. Formules d'Euler et de

oivre

3.3. Argument, form trigonométrique

- ⇒ Calculs simples dans le corps C
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
  - Définir le groupe  $\mathbb{U}$ , de nombres complexes de module 1.
  - Notation complexe trigonométrique :  $z = \rho e^{i\theta}$ .
  - Généralisation à la notion d'arguments.
  - Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation
  - Nombreux savoir-faire qui donnent les formules trigonométriques.

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

- $\Rightarrow$  Corps ( $\mathbb{C}, +, \times$ )
- ⇒ Interprétation dans le plan
- ⇒ Interprétation centré

### **Objectifs**

- ⇒ Calculs simples dans le corps C
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

### Pour la prochaine fois

- Lecture 4. Racines & 5. Plan complexe
- Exercice n° 87, 90 & 95
- TD de jeudi : 8h-10h:??, 85, 88, 98 (cos)
  - 10h-12h:??, 86, 89, 98 (sin)