

A close-up photograph of a bronze bust of a man. The sculpture features long, wavy hair that falls over the forehead and sides of the face. The man has a serious expression, with deep-set eyes, a straight nose, and thin lips. The bronze has a dark, patinated surface with some lighter areas, suggesting age and wear. The background is a plain, light color.

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

1 octobre 2025

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3.1. Les complexes de module 1

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3.1. Les complexes de module 1

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Problème - Multiplication de nombres

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Problème - Multiplication de nombres

Problème - Théorème de Napoléon

Problème - Transformation du plan

Problème - Application en physique

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

Analyse Problème de Cardan (1545)

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphaël Bombelli dans son algebra(1572).

Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Analyse Problème de Cardan (1545)

Les règles de calcul sont données par Raphaël Bombelli dans son algebra(1572).

Pendant deux siècles, les mathématiciens se querellent quant à leur existence et leurs emplois.

Exercice

On reprend un exercice historique de Bombelli.

En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer $(2 + \sqrt{-1})^3$.

En employant les formules de Cardan, trouver les racines de $x^3 = 15x + 4$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

Remarque Unicité

Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a + ib$ où $i^2 = -1$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

Remarque Unicité

Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a + ib$ où $i^2 = -1$

Définition - Notation de nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un complexe (a et b sont des réels).

$a = \operatorname{Re} z$ s'appelle la **partie réelle** de z .

$b = \operatorname{Im} z$ s'appelle la **partie imaginaire** de z ;

z est dit **imaginaire pur** ($z \in i\mathbb{R}$) si sa partie réelle est nulle.

$\bar{z} = a - ib$ s'appelle le **conjugué** de $z = a + ib$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ s'appelle le **module** de z .

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici...).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- ▶ $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (la partie réelle est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (la partie imaginaire est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors
 $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

En particulier $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$, donc $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici...).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- ▶ $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (la partie réelle est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (la partie imaginaire est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors
 $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

$$\text{En particulier } z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2, \text{ donc } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Remarque Importance du conjugué

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Calcul dans $\mathbb{C}$

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles : addition et multiplication dans $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définitions ici. . .).

Proposition - $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,

- ▶ $\mathbf{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Re}(z) + \lambda' \mathbf{Re}(z')$ (la partie réelle est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ $\mathbf{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathbf{Im}(z) + \lambda' \mathbf{Im}(z')$ (la partie imaginaire est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$)
- ▶ si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors
 $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

En particulier $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$, donc $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Remarque Importance du conjugué

Démonstration

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Conjugaison

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'} \Rightarrow \overline{az} = a\overline{z}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme
trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors

$\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme
trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Puissance et conjugaison

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors

$\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Exercice Faire la démonstration

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad |zz'| = |z||z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$
$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0 \text{)}$$

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad |zz'| = |z||z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$
$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Propriété - Propriétés du module

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad |zz'| = |z||z'| \Rightarrow |az| = a|z|$$
$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ (si } z' \neq 0)$$

Démonstration

Remarque Valeur absolue et module

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a, b)$, on peut noter $z = \text{Aff}(M)$.

Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z .

De même, si $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées (a, b) , $a + ib$ est appelé affixe de $\vec{w}$ (noté $\text{Aff}(\vec{w})$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M de coordonnées (a, b) caractérisé par $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur

$z = a + ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a, b)$, on peut noter $z = \text{Aff}(M)$.

Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z .

De même, si $\vec{w}$ est un vecteur de coordonnées (a, b) , $a + ib$ est appelé affixe de $\vec{w}$ (noté $\text{Aff}(\vec{w})$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a + ib$.

Remarque Axes

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique

Si z est l'affixe de M alors $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Si $z = \text{Aff}(M)$ alors $|z|$ est égal à la distance OM .

Si $z = \text{Aff}(M)$ et $z_0 = \text{Aff}(M_0)$, alors $\text{Aff}(\vec{M_0M}) = z - z_0$ et $|z - z_0| = M_0M$

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$\mathbf{Re}z (\leq |\mathbf{Re}z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{Im}z (\leq |\mathbf{Im}z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si

$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$\mathbf{Re} z (\leq |\mathbf{Re} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si

$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$\mathbf{Re} z (\leq |\mathbf{Re} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si

$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Théorème - Inégalités

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :

$$\mathbf{Re} z (\leq |\mathbf{Re} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{Im} z (\leq |\mathbf{Im} z|) \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$

$$\left| |z| - |z'| \right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (Inégalité triangulaire)}$$

Avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si

$z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ (z, z' positivement liés).

Attention. Module ou valeur absolue ?

Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici !

Analyse Interprétation de l'inégalité triangulaire

Démonstration

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Par récurrence :

Proposition - Inégalités

Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$ on a

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Par récurrence :

Proposition - Inégalités

Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$ on a

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

Proposition - Caractérisation des complexes remarquables

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{Re} z = \mathbf{Im} z = 0$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Im} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Re} z)^2$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Re} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow |z|^2 = (\mathbf{Im} z)^2$$

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \quad \forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Groupe unitaire

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Définition - Groupe unitaire

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \quad \forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Démonstration

Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

Analyse Géométrique

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.

Alors $AC = |z - 1|$ et $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$.

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

Analyse Géométrique

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.

Alors $AC = |z - 1|$ et $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$.

Définition - Argument de $u \in \mathbb{U}$, de $z \in \mathbb{C}$

Soit $u \in \mathbb{U}$. On note I , le point du plan d'affixe 1 et M celui d'affixe u .

On appelle argument de $u \in \mathbb{U}$ noté $\arg(u)$, l'angle (principal) $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

Dans un premier temps, on note $\angle\theta$ ce nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

On a alors $u = \cos\theta + i \sin\theta$, pour $\theta \equiv \text{Arg}(u)$.

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

Démonstration

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

Démonstration

Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Notons $\theta = \arg(u)$.

Alors $u \times z$ est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle θ , à partir du point d'affixe z

La démonstration dans l'analyse

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Extension pour $\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

Remarque

Démonstration

Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

Notons $\theta = \arg(u)$.

Alors $u \times z$ est l'afixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle θ , à partir du point d'afixe z

La démonstration dans l'analyse

Attention. Mauvaise définition de l'argument

La définition donnée ici est peu satisfaisante ; avec un argument principal, on n'a pas nécessairement $\text{Arg}zz' = \text{Arg}z + \text{Arg}z'$, mais seulement des congruences.

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle(\theta + \theta')$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle(\theta + \theta')$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle(\theta + \theta')$.

Démonstration

Analyse - Non injectivité

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Corollaire - Propriété de e^i

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\angle \theta \times \angle \theta' = \angle(\theta + \theta')$.

Démonstration

Analyse - Non injectivité

Définition - Notation d'Euler

Nous verrons/avons vu que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a + b) = f(a) \times f(b)$.

Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x \mapsto A^x$ où $A = f(1)$.

Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant $e^{i\theta} = \angle \theta = \cos \theta + i \sin \theta$

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

On a alors, plus globalement :

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

On a alors, plus globalement :

Théorème - Propriétés

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

On a alors, plus globalement :

Théorème - Propriétés

Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \quad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Démonstration

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de Regiomontanus

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et
$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de Regionmontanus

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de Regiomontanus

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

Exercice

En déduire les formules donnant $\cos(a - b)$ et $\sin(a - b)$.

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule d'Euler

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Formules d'Euler

$$\cos \theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule d'Euler

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Formules d'Euler

$$\cos \theta = \mathbf{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \mathbf{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice

Calculer $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, en déduire une expression de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de (de) Moivre

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Formule de (de) Moivre

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Formule de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$ (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

Et on applique les formules d'Euler

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$ (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos \theta$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Trucs et astuces pour le calcul. Factorisation de l'angle moitié

Lorsqu'on rencontre une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$ (a, b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne : $e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$. Retrouver les formules donnant $1 \pm \cos \theta$

Exercice

Nouveau calcul de $\sum_{k=0}^n \cos kt$ et $\sum_{k=0}^n \sin kt$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- ▶ Ecrire $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$.
- ▶ Développer avec la formule du binôme.
- ▶ Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des i ...**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Savoir-faire. Linéarisation

Il s'agit d'exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

- ▶ Ecrire $\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$.
- ▶ Développer avec la formule du binôme.
- ▶ Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des i ...**

Exercice

Linéariser $\cos^3 \theta$, $\sin^4 \theta$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

$\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- ▶ Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- ▶ Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- ▶ Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

$\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en polynôme de $\cos t$ et $\sin t$

Savoir-faire. Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$

- ▶ Ecrire $\cos(nt) = \mathbf{Re}(e^{int}) = \mathbf{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt) = \mathbf{Im}[(e^{it})^n]$.
- ▶ Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$.
- ▶ Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

Exercice

Ecrire $\cos 3t$ en fonction des puissances de $\cos t$, $\sin 3t$ comme le produit de $\sin t$ et d'une expression contenant des puissances de $\cos t$. Faire de même avec $\cos 5t$ et $\sin 5t$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ **Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$**

⇒ **Interprétation dans le plan & addition**

⇒ **Points de vue géométrique (distance, angle) & multiplication**

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

2.4. Inégalités

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

3.1. Les complexes de module 1

3.1. U

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Définition - Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

On dit que θ est un argument de z . On note $\theta = \arg z$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est appelée forme trigonométrique de z .

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Définition - Argument

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

On dit que θ est un argument de z . On note $\theta = \arg z$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ est appelée forme trigonométrique de z .

L'argument est une fonction logarithmique (qui vérifie

$f(a \times b) = f(a) + f(b)$ mais multivariée (à plusieurs valeurs).

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(z z') \equiv (\arg z + \arg z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z') [2\pi]$$

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(z z') \equiv (\arg z + \arg z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z') [2\pi]$$

Attention Pas d'unicité.

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Proposition - Arithmétique de la congruence

Si $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(z z') \equiv (\arg z + \arg z') [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z') [2\pi]$$

Attention Pas d'unicité.

Remarque Géométriquement

$\Rightarrow$ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

$\Rightarrow$ Interprétation dans le plan

$\Rightarrow$ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Relation arg et arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) \equiv \arctan x[2\pi]/$

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\arg z = \arctan \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z}[\pi]$. Précisément :

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z} & \text{si } \text{Re}z > 0 \\ \arctan \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z} + \pi & \text{si } \text{Re}z < 0 \end{cases}$$

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

Proposition - Relation arg et arctan

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1 + ix) \equiv \arctan x[2\pi]/$

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\arg z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}[\pi]$. Précisément :

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} & \text{si } \operatorname{Re} z > 0 \\ \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} + \pi & \text{si } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER :
Manipulateur des
nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- ▶ Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- ▶ L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- ▶ Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- ▶ L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- ▶ Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 z inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$

- ▶ Définition algébrique : $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ et $i^2 = -1$
- ▶ L'addition est naturelle. La multiplication est commutative, distributive.
- ▶ Intéressant : le module de $z = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 z inversible ssi $|z| \neq 0$. Et $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, d'où la conjugaison
- ▶ Inégalité triangulaire et série d'inégalités.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
 - ▶ Somme : translation de vecteur

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
 - ▶ Somme : translation de vecteur
 - ▶ Le module : norme du vecteur.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. i
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition

- ▶ Somme : translation de vecteur
- ▶ Le module : norme du vecteur.
- ▶ Comment interpréter le produit ?

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
 - Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

2.2. Calcul algébrique

2.3. Représentation graphique

2.4. Inégalités

3. GAUSS

3.1. $\mathbb{U}$

3.2. Formules d'Euler et de de Moivre

3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
 - ▶ Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
 - ▶ Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
 - ▶ Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
 - ▶ Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
 - ▶ Généralisation à la notion d'arguments.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
 - ▶ Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
 - ▶ Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
 - ▶ Généralisation à la notion d'arguments.
 - ▶ Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication
 - ▶ Définir le groupe $\mathbb{U}$, de nombres complexes de module 1.
 - ▶ Notation complexe trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$.
 - ▶ Généralisation à la notion d'arguments.
 - ▶ Représentation graphique : multiplication comme homothétie et rotation
 - ▶ Nombreux savoir-faire qui donnent les formules trigonométriques.

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centré

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. $\mathbb{U}$
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique

Objectifs

- ⇒ Calculs simples dans le corps $\mathbb{C}$
- ⇒ Interprétation dans le plan & addition
- ⇒ Interprétation centrée & multiplication

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture 4. Racines & 5. Plan complexe
- ▶ Exercice n° 87, 90 & 95
- ▶ TD de jeudi :
 - 8h-10h : ??, 85, 88, 98 (cos)
 - 10h-12h : ??, 86, 89, 98 (sin)

⇒ Corps $(\mathbb{C}, +, \times)$

⇒ Interprétation dans le plan

⇒ Interprétation centrée

1. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

- 2.1. Racine de polynômes
- 2.2. Calcul algébrique
- 2.3. Représentation graphique
- 2.4. Inégalités

3. GAUSS

- 3.1. U
- 3.2. Formules d'Euler et de de Moivre
- 3.3. Argument, forme trigonométrique