Leçon 20 - Nombres complexes

2 octobre 2025

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

Deux méthodes

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.

Deux méthodes

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.

On dispose de deux méthodes pour chercher les racines carrées de z.

Résolution trigonométrique (la meilleure !)

Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Résolution trigonométrique (la meilleure !)

Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention. . .).

Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Résolution trigonométrique (la meilleure !)

Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

La méthode-algorithmique précédente nous permet d'affirmer :

Proposition - Deux racines complexes

Tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées complexes (opposées).

Résolution algébrique

Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

On considère un complexe $z = x + iy \neq 0$, et on cherche Z sous forme algébrique $Z = X + iY$.
Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de z et Z^2 pour se ramener à une résolution simple de système donnant X^2, Y^2 et le signe de XY.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de XY.

Résolution algébrique

Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

On considère un complexe $z = x + iy \neq 0$, et on cherche Z sous forme algébrique $Z = X + iY$.
Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de z et Z^2 pour se ramener à une résolution simple de système donnant X^2, Y^2 et le signe de XY.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de XY.

Exercice

Déterminer les racines carrées de $2 - 3i$.

Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

Remarque Bien connu…

Formule de Viète

Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$ sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

Formule de Viète

Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S, P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$ sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

<u>Exercice</u>

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équation $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 1 - 3i \end{cases}$.

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

Théorème !

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$

Théorème !

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$

On obtient donc pour
$n = 2$: 1 et -1 ;
$n = 3$: 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp\frac{2i\pi}{3}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp\frac{4i\pi}{3}$;
$n = 4$: $1, i, -1$ et $-i$.
Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.
Racines primitives n^{e}de l'unité.

Théorème !

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}$

On obtient donc pour
$n = 2$: 1 et -1 ;
$n = 3$: 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp\frac{2i\pi}{3}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp\frac{4i\pi}{3}$;
$n = 4$: $1, i, -1$ et $-i$.
Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.
Racines primitives n^{e}de l'unité.
Démonstration

Somme des racines

Proposition - Somme des racines n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

Somme des racines

Proposition - Somme des racines n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

De $z^n = 1$ à $z^n = Z$

Théorème - Racines n-ièmes de z_0

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors z_0 a exactement n racines n-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).
Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

De $z^n = 1$ à $z^n = Z$

Théorème - Racines n-ièmes de z_0

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors z_0 a exactement n racines n-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).
Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Démonstration

Il suffit de les écrire

Exercices

Exercice

Déterminer les racines n-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercices

Exercice

Déterminer les racines n-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6+(z+1)^6=0$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0\dots$
  On coupe le gâteau en n parts égales.

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0\dots$
  On coupe le gâteau en n parts égales.
- Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0\ldots$
  On coupe le gâteau en n parts égales.
- Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n+i\arg(Z)/n}$
- Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique…

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
  Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k = e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k = 0\ldots$
  On coupe le gâteau en n parts égales.
- Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$
- Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique...
- Il y a une importante structure de groupe cachée derrière !

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

Pour la prochaine fois

- Lecture : 5. Le plan complexe
- Exercice n°101 & 102