

Leçon 20 - Nombres complexes

Leçon 20 - Nombres complexes

⇒ Racines (complexes)

Problème:

Manipulateur des nombres du diable

. Gauss

4.1. √z

4.2. 1^{1/n}

4.3. $z^{1/n}$

(complexes)

⇒ Racines

- 2. EULER :
 Manipulateur des
 - CIAUSS
 - Racines
- 4.1. √z
- 4.2. 117
- 4.3. z^{1/z}

4. Racines d'un nombre complexe

1. Problèmes

- 4.1. Recherche de racines carrées
- 4.2. Racines n-ièmes de l'unité
- 4.3. Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

2. EULER: Manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

- 1. Problèmes
- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
- 4. Racines d'un nombre complexe
 - 4.1. Recherche de racines carrées
 - 4.2. Racines n-ièmes de l'unité
 - 4.3. Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

⇒ Racines (complexes)

. Problèmes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

. GAUSS

Racines

4.1. √*z*

4.2. 1***

4.3 21/11

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.

⇒ Racines (complexes)

Problème:

2. EULER:
Manipulateur des
nombres du diable

3. Gauss

Racines

4.1. √z

l.3. z^{1/n}

4 □ ト 4 圖 ト 4 圖 ト 4 圖 ・ 9 Q (~)

⇒ Racines (complexes)

. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

.

acines

4.1. \sqrt{z} 4.2. $1^{1/n}$

l.3. z^{1/n}

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$.

On dispose de deux méthodes pour chercher les racines carrées de z.

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z=|z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z=\rho e^{i\theta}$ où $\rho>0$.

On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

⇒ Racines (complexes)

- 1. Problèmes
- 2. EULER:
 Manipulateur des
 nombres du diable
 - . Gauss
 - Racine
- 4.1. √z 4.2. 1^{1/n}
 - .3. z^{1/n}

Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z=|z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z=\rho e^{i\theta}$ où $\rho>0$.

On a alors $Z^2=\rho^2e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

On rappelle que
$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$
 et $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

. Gauss

Racine

4.1. √z

4.3 z^{1/n}

Savoir-faire. Exploitation de la forme trigonométrique

On considère un complexe z écrit sous forme trigonométrique $z=|z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z=\rho e^{i\theta}$ où $\rho>0$.

On a alors $Z^2=\rho^2e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice

Trouver les racines carrées de $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

La méthode-algorithmique précédente nous permet d'affirmer :

Proposition - Deux racines complexes

Tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées complexes (opposées).

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

. GAUSS

4.1. √*z*

4.2. $1^{1/n}$

4.3. $z^{1/n}$

Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

On considère un complexe $z=x+iy\neq 0$, et on cherche Z sous forme algébrique Z=X+iY.

Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de z et Z^2 pour se ramener à une résolution simple de système donnant X^2,Y^2 et le signe de XY.

$$Z^{2} = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^{2} + Y^{2} = \sqrt{x^{2} + y^{2}} \\ X^{2} - Y^{2} = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de XY.

⇒ Racines (complexes)

I. Problemes

2. EULER : Manipulateur des nombres du diable

o. GAUSS

. Racines

4.1. \sqrt{z} 4.2. $1^{1/n}$

 $4.3.\ z^{1/n}$

Savoir-faire. Exploitation de la forme algébrique

On considère un complexe $z=x+iy\neq 0$, et on cherche Z sous forme algébrique Z=X+iY.

Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de z et Z^2 pour se ramener à une résolution simple de système donnant X^2,Y^2 et le signe de XY.

$$Z^{2} = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^{2} + Y^{2} = \sqrt{x^{2} + y^{2}} \\ X^{2} - Y^{2} = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de XY.

Exercice

Déterminer les racines carrées de 2-3i.

⇒ Racines (complexes)

. Problèmes

2. EULER:
Manipulateur des
nombres du diable

B. GAUSS

4.1. √z

4.2. $1^{1/n}$

 $4.3.\ z^{1/n}$

4.1. \sqrt{z}

(complexes)

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

4.1. \sqrt{z}

Remarque Bien connu...

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

Proposition - Nombre de racines et degré

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, admet deux solutions complexes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée complexe de $b^2 - 4ac$.

Manipulateur des nombres du diable

. GA000

Racines

4.1. \sqrt{z} 4.2. $1^{1/n}$

4.3. z^{1/n}

Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{array} \right.$ sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

Proposition - Théorème de Viète

Manipulateur des nombres du diable

3. GAUSS

4.1. √z

4.2. 1^{1/n}

4.3. z^{1/n}

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$ sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb C$ le système d'équation $\left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2=3\\ z_1\times z_2=1-3i \end{array} \right..$

- 1. Problèmes
- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
- 4. Racines d'un nombre complexe
 - 4.1. Recherche de racines carrées
 - 4.2. Racines n-ièmes de l'unité
 - 4.3. Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

⇒ Racines (complexes)

Problèmes

EULER:
 Manipulateur des
 nombres du diable

3. Gauss

Racines

4.1. √z

4.2. $1^{1/n}$

.3. z^{1/n}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n=1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

On note
$$\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}};k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}$$

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

3. Gauss

Racines

4.2. 1^{1/n}

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n=1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

On note
$$\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}};k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}$$

On obtient donc pour

$$n=2:1$$
 et -1 ; $n=3:1, j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\exp{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2=\overline{j}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\exp{\frac{4i\pi}{3}}$; $n=4:1,i,-1$ et $-i$.

Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.

Racines primitives n^{e} de l'unité.

⇒ Racines (complexes)

- 1. Problèmes
- Manipulateur des nombres du diable
- 3. Gauss
- 4.1. \sqrt{z} 4.2 $1^{1/n}$

4.2. 1^{1/n}
4.3. z^{1/n}

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n=1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.

On note
$$\mathbb{U}_n=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}};k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}$$

On obtient donc pour

$$n=2:1$$
 et -1 ; $n=3:1, j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\exp{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2=\overline{j}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\exp{\frac{4i\pi}{3}}$; $n=4:1,i,-1$ et $-i$.

Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.

Racines primitives n^{e} de l'unité.

Démonstration

⇒ Racines (complexes)

1. Problémes

Manipulateur des nombres du diable

3. Gauss

4.1. \sqrt{z} 4.2 $1^{1/n}$

4.2. 1^{1/n}
4.3. z^{1/n}

4.2. $1^{1/n}$

Proposition - Somme des racines *n*-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

4.2. $1^{1/n}$

Proposition - Somme des racines *n*-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration

- Problèmes
- 2. EULER: Manipulateur des nombres du diable
- 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe
- 4. Racines d'un nombre complexe
 - 4.1. Recherche de racines carrées
 - 4.2. Racines n-ièmes de l'unité
 - 4.3. Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

⇒ Racines (complexes)

43 21/11

Théorème - Racines n-ièmes de z_0

Soient $z_0\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors z_0 a exactement n racines n-ièmes (solutions de $z^n=z_0$).

Si
$$z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$$
, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$
 où $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

⇒ Racines (complexes)

- . Problèmes
- Manipulateur des nombres du diable
- 3. Gauss
 - Racines
- 4.2. 1^{1/n}
- 4.3 21/n

Théorème - Racines n-ièmes de z_0

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors z_0 a exactement n racines n-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).

Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$
 où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Démonstration

Il suffit de les écrire

⇒ Racines (complexes)

. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

B. GAUSS

1. √z

4.2. 1^{1/n}

4.3. z^{1/n}

2. EULER:
Manipulateur des
nombres du diable

3. Gauss

Racines

4.1. \sqrt{z} 4.2. $1^{1/n}$

4.3. $z^{1/n}$

Exercice

Déterminer les racines n-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4.3. $z^{1/n}$

Exercice

Déterminer les racines n-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

On rappelle que $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Exercice

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

. Problèmes

2. EULER:
Manipulateur des
nombres du diable

3. Gauss

Racines

4.1. √z

l.3. z^{1/n}

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

 Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
 Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

. Gauss

r. Hacii

4.2 11/2

4.3. z^{1/n}

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
 Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k=e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k=0\ldots$ On coupe le gâteau en n parts égales.

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

EULER:
 Manipulateur des
 nombres du diable

. Gauss

1.1. √z

4.2. 1^{1/n}

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Racines (complexes) d'un nombre
 - Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
 Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
 - Les n racines de 1 sont $e_k=e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k=0\ldots$ On coupe le gâteau en n parts égales.
 - Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

Manipulateur des nombres du diable

. Gauss

4.1. √z

4.2. 1¹

4.3. z^{1/n}

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
 Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k=e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k=0\ldots$ On coupe le gâteau en n parts égales.
- Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$
- ▶ Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique...

⇒ Racines (complexes)

1. Problemes

EULER:
 Manipulateur des
 nombres du diable

. Gauss

4.1. √*z*

4.2. 1 4.3. z 1/n

Conclusion

Objectifs

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

- Deux méthodes pour calculer la racine carrée : trigonométrique et algébrique
 Applications à la recherche des racines des équations polynomiales de degré 2
- Les n racines de 1 sont $e_k=e^{2ik\pi/n}$, ils vérifient $\sum e_k=0\ldots$ On coupe le gâteau en n parts égales.
- Les n racines de Z sont $e_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{2ik\pi/n + i\arg(Z)/n}$
- ▶ Il est souvent préférable d'exploiter la forme trigonométrique...
- ▶ Il y a une importante structure de groupe cachée derrière!

⇒ Racines (complexes)

1. Problèmes

EULER:
 Manipulateur des
 nombres du diable

. Gauss

4.1. √z

4.2. $1^{1/n}$ 4.3. $z^{1/n}$

4日ト4月ト4日ト4日ト ヨ めので

2. EULER:
Manipulateur des
nombres du diable

. GAUSS

. Racines

4.1. √z

4.2. 1^{1/n}

⇒ Racines (complexes) d'un nombre

Objectifs

Pour la prochaine fois

Lecture : 5. Le plan complexe

Exercice n°101 & 102