

Devoir Surveillé n°11 CORRECTION

Marche aléatoire dans un labyrinthe (d'après Mines-Pont PSI 2017)

I. Premiers pas

1. S_k est une variable aléatoire à valeurs dans $S_k(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Donc $((S_k = i), i = 1 \dots 5)$ est un système complet d'événements. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{P}(S_k = i) \mathbf{P}_{S_k=i}(S_{k+1} = 1)$$

Or d'après l'énoncé : $\mathbf{P}_{S_k=1}(S_{k+1} = 1) = 0$ et pour tout $i > 1$, $\mathbf{P}_{S_k=i}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}$.

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}(\mathbf{P}(S_k = 2) + \mathbf{P}(S_k = 3) + \mathbf{P}(S_k = 4) + \mathbf{P}(S_k = 5))$$

2. Avec un raisonnement équivalent, on trouve que :

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbf{P}(S_k = 3) + \mathbf{P}(S_k = 5))$$

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 3) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4}\mathbf{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}(\mathbf{P}(S_k = 2) + \mathbf{P}(S_k = 4))$$

En prenant $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = BX_k$

3. On remarque qu'en sommant les lignes de B , on trouve la ligne $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$.
Or faire la somme des lignes de B c'est exactement multiplier B à gauche par $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$.

Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors ${}^tX \times B = {}^tX$.

En transposant cette relation :

$${}^tB \times X = X$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$$

4. Commençons par remarquer, grâce au calcul que $BX_0 = X_0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $Y_k = X_k - X_0$.

$$Y_{k+1} = X_{k+1} - X_0 = BX_k - BX_0 = BY_k$$

Par récurrence quasi immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_k = B^k Y_0$.

Or $Y_0 = X_0 - X_0 = 0$, donc $Y_k = 0$ et donc $X_k = X_0$, pour tout entier k .

Pour tout entier k , $\mathbf{P}(S_k = 1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(S_k = 2) = \mathbf{P}(S_k = 3) = \mathbf{P}(S_k = 4) = \mathbf{P}(S_k = 5) = \frac{3}{16}$

Ainsi

toutes les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5. $\mathbf{P}_{S_0=1}(S_1 = 1) = 0$ alors que $\mathbf{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{4}$.

Donc $[S_0 = 1]$ et $[S_1 = 1]$ ne sont pas des événements indépendants.

les variables aléatoires S_0 et S_1 ne sont nécessairement pas indépendantes

6. (a) Il s'agit de calculer $\mathbf{P}(S_9 = 5 | S_{10} = 1)$.
On applique la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(S_9 = 5 | S_{10} = 1) = \frac{\mathbf{P}_{S_9=5}(S_{10} = 1)\mathbf{P}(S_9 = 5)}{\mathbf{P}(S_{10} = 1)}$$

Or S_9 suivant la même loi que S_0 donnée par le vecteur X_0 , $\mathbf{P}(S_9 = 5) = \frac{3}{16}$,
 $\mathbf{P}(S_{10} = 1) = \frac{1}{4}$ et, de plus $\mathbf{P}_{S_9=5}(S_{10} = 1) = \frac{1}{3}$ (la loi conditionnelle de S_{10} sachant $(S_9 = 5)$ est une loi uniforme répartie sur les valeurs $\{1, 2, 4\}$ sien que

$$\mathbf{P}(S_9 = 5 | S_{10} = 1) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

- (b) Il s'agit de calculer $\mathbf{P}(S_8 = 5 | S_{10} = 1)$.
On applique la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(S_8 = 5 | S_{10} = 1) = \frac{\mathbf{P}_{S_8=5}(S_{10} = 1)\mathbf{P}(S_8 = 5)}{\mathbf{P}(S_{10} = 1)}$$

Or $\mathbf{P}(S_8 = 5) = \frac{3}{16}$, $\mathbf{P}(S_{10} = 1) = \frac{1}{4}$.

Enfin, on applique la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(S_9 = i)$

$$\mathbf{P}_{S_8=5}(S_{10} = 1) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{P}_{S_8=5}(S_9 = i) \mathbf{P}_{S_8=5, S_9=i}(S_{10} = 1) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

On a donc

$$\mathbf{P}(S_8 = 5 | S_{10} = 1) = \frac{\frac{2}{9} \times \frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

II. Temps de retour en salle 1

- 1.

$$T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Remarque : On peut accepter $T_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $\mathbf{P}(T_n = 0) = 0$, d'autres réponses auraient moins de sens...

L'événement $(T_n = 1)$ signifie (puisque $n \geq 2$) que la souris est revenue en 1 à l'instant 1, or $P(S_0 = 1) = 1$ donc la souris partant de la salle 1, elle l'a forcément quittée à l'instant 1 donc $(T_n = 1)$ est un événement négligeable.

Une preuve plus formelle : on exploite la formule des probabilités totales avec le système complet des événements $((S_0 = 1), (S_0 \neq 1))$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_n = 1) &= \underbrace{\mathbf{P}((T_n = 1) \cap (S_0 \neq 1))}_{\leq \mathbf{P}(S_0 \neq 1)} + \underbrace{\mathbf{P}((T_n = 1) \cap (S_0 = 1))}_{\substack{= (S_1 = 1) \cap (S_0 = 1) \\ = \emptyset \\ = 0}} \end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}(S_0 \neq 1) = \mathbf{P}(S_0 = 2) + \mathbf{P}(S_0 = 3) + \mathbf{P}(S_0 = 4) + \mathbf{P}(S_0 = 5) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
donc $0 \leq \mathbf{P}(T_n = 1) \leq 0$ si bien que $\mathbf{P}(T_n = 1) = 0$.

2. On exploite la formule des probabilités totales avec le système complet des événements $(S_{k-1} = j)$ pour la probabilité conditionnelle : $\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}$. Pour tout $k < n$, pour tout $i \in \{2, 3, 4, 5\}$

$$\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k = 1) = \sum_{j=1}^5 \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_{k-1} = j) \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1, S_{k-1}=j}(S_k = 1)$$

$$= \sum_{j=2}^5 \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_{k-1} = j) \mathbf{P}_{S_{k-1}=j}(S_k = 1)$$

car $\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_{k-1} = 1) = 0$ et $[S_{k-1} \neq 1] \cap [S_{k-1} = j] = [S_{k-1} = j]$, si $j \neq 1$.

Par ailleurs, pour tout $j \in \{2, \dots, 5\}$, $\mathbf{P}_{S_{k-1}=j}(S_k = 1) = \frac{1}{3}$, donc

$$\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k = 1) = \frac{1}{3} \sum_{j=2}^5 \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_{k-1} = j) = \frac{1}{3} \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(\cup_{j=2}^5 [S_{k-1} = j]) = \frac{1}{3} \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_{k-1} \neq 1) = \frac{1}{3} \times 1$$

Donc pour tout $k < n$, $\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k = 1) = \frac{1}{3}$

3. L'événement contraire de $S_k = 1$ et $S_k \neq 1$, donc

pour tout $k < n$, $\mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k \neq 1) = 1 - \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k = 1) = \frac{2}{3}$

4. Soit $k < n$, $T_n > k = \bigcap_{i=1}^k [S_i \neq 1]$.

Donc en appliquant la formule des probabilités composées

(attention les événements ne sont pas indépendants !)

$$\mathbf{P}(T_n > k) = \mathbf{P}(S_1 \neq 1) \times \mathbf{P}_{S_1 \neq 1}(S_2 \neq 1) \times \mathbf{P}_{S_1 \neq 1, S_2 \neq 1}(S_3 \neq 1) \times \dots \times \mathbf{P}_{S_1 \neq 1, S_2 \neq 1, \dots, S_{k-1} \neq 1}(S_k \neq 1)$$

Mais comme cela est formulé dans l'énoncé, la position de la souris à l'instant k ne dépend historiquement que de sa position à l'instant $k - 1$. (On appelle cela une **chaîne de Markov**).

Donc pour tout $h \geq k$: $\mathbf{P}_{S_1 \neq 1, S_2 \neq 1, \dots, S_{h-1} \neq 1}(S_h \neq 1) = \mathbf{P}_{S_{h-1} \neq 1}(S_h \neq 1)$.

$$\mathbf{P}(T_n > k) = \mathbf{P}(S_1 \neq 1) \times \mathbf{P}_{S_1 \neq 1}(S_2 \neq 1) \times \mathbf{P}_{S_2 \neq 1}(S_3 \neq 1) \times \dots \times \mathbf{P}_{S_{k-1} \neq 1}(S_k \neq 1) = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

5. Compte-tenu de la valeur de X_0 , $\mathbf{P}(S_1 \neq 1) = 1$ et donc $\mathbf{P}(T_1 = 1) = 0$.

Puis pour $k > 2$: $[T_n > k - 1] = [T_n = k] \cup [T_n > k]$; ces événements étant incompatibles :

$$\mathbf{P}(T_n > k - 1) = \mathbf{P}(T_n = k) + \mathbf{P}(T_n > k)$$

Donc

$$\mathbf{P}(T_n = k) = \mathbf{P}(T_n > k - 1) - \mathbf{P}(T_n > k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

Et alors que

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \mathbf{P}(T_n > n - 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Bilan : $\mathbf{P}(T_n = 1) = 0$, $\forall k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, $\mathbf{P}(T_n = k) = \frac{2^{k-2}}{3^{k-1}}$ et $\mathbf{P}(T_n = n) = \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}$

6. On note $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$.

On peut dériver ces fonction sur $] - 1, 1[$, l'égalité est conservée :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(-nx^{n-1})(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

On aurait également pu faire une récurrence.

On a donc en reprenant ce résultat pour $x = \frac{2}{3}$:

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbf{P}(T_n = k) + n \mathbf{P}(T_n = n) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + n \frac{2^{n-2}}{3^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - n(\frac{2}{3})^{n-1} + (n-1)(\frac{2}{3})^n}{(1 - \frac{2}{3})^2} - 1 \left(\frac{2}{3} \right)^0 \right) + n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$$

Et donc en faisant tendre n vers l'infini, comme $n = o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$:

$$\lim_n \mathbf{E}(T_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\frac{1}{3})^2} - 1 \right) = \frac{8}{2} = 4$$

$$\boxed{\lim_n \mathbf{E}(T_n) = 4}$$

7. T_n est une variable aléatoire à valeurs entières (qui admet une espérance, puisqu'elle est finie).

On peut appliquer l'inégalité de Markov : $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$.

On considère $X = T_{100}$, $a = 50$ d'où $\mathbf{P}(T_{100} \geq 50) \leq \frac{\mathbf{E}(T_{100})}{50}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_n) - \lim_{k \rightarrow +\infty} E(T_k) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - n(\frac{2}{3})^{n-1} + (n-1)(\frac{2}{3})^n}{(\frac{1}{3})^2} - 1 \right) + n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} - 4 \\ &= \frac{1}{2} \left[9 \left(1 - n \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + (n-1) \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) - 9 + 2n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[9 \left(-n \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{2}{3} (n-1) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right) + 2n \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} [-9n + 6(n-1) + 2n] \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} [n + 6] \\ &< 0 \end{aligned}$$

donc $E(T_n) \leq 4$ si bien que

$$\boxed{\mathbf{P}(T_{100} \geq 50) \leq \frac{4}{50} = \frac{2}{25} = 0,08}$$

III. Du sens probabiliste au calcul $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} B^k$

Dans cette partie, on ne connaît pas a priori la valeur de X_0 .

1. A_k^i est une indicatrice, elle suit donc une loi de Bernoulli.

Son paramètre est $p = \mathbf{P}(A_k^i = 1) = \mathbf{P}(\text{la souris se trouve en } i \text{ à l'instant } k) = \mathbf{P}(S_k = i)$

$$\boxed{A_k^i \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}(S_k = i))}$$

2. Exprimer $\mathbf{E}(A_k^i)$ en fonction de $\mathbf{P}(S_k = i)$. Pour une loi de Bernoulli, on a l'espérance qui est égale au paramètre p .

$$\boxed{\mathbf{E}(A_k^i) = \mathbf{P}(A_k^i = 1) = \mathbf{P}(S_k = i)}$$

3. Comment exprimer S_n^i en fonction des A_k^i ?

Comme S_n^i compte le nombre de succès, mesuré par A_k^i , entre $k = 1$ et $k = n$:

$$\boxed{S_n^i = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^i}$$

Mais ce n'est pas une loi familière. Les variables aléatoires $(A_k^i)_k$ ne sont pas indépendantes (comme en dernière question de la partie I), donc

$$\boxed{S_n^i \text{ n'est pas trivialement une loi binomiale.}}$$

4. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(S_n^i) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k^i\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}(A_k^i) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(S_k = i) = \sum_{k=0}^{n-1} [X_k]_i$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = BX_k$, donc par récurrence : $X_k = B^k X_0$. Ainsi :

$$\mathbf{E}(S_n^i) = \sum_{k=0}^{n-1} [B^k X_0]_i = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} B^k \right) X_0 \right]_i = \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} B^k \right) X_0 \right]_i = n[V_n \times X_0]_i$$

$$\boxed{\mathbf{E}(S_n^i) = n[V_n \times X_0]_i}$$

IV. Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x_\infty \neq x'_\infty$.

Posons $\varepsilon_0 = \|x_\infty - x'_\infty\| > 0$.

Appliquons la définition de la convergence vers 0 de $(\|x_k - x_\infty\|)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\|x_k - x'_\infty\|)_{k \in \mathbb{N}}$ pour $\frac{\varepsilon_0}{3}$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k \geq N_1 \Rightarrow \|x_k - x_\infty\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$$

$$\exists N'_1 \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N} : k \geq N'_1 \Rightarrow \|x_k - x'_\infty\| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$$

Posons $N = \max(N_1, N'_1)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \|x_\infty - x'_\infty\| \\ &= \|x_\infty - x_N + x_N - x'_\infty\| \\ &\leq \underbrace{\|x_\infty - x_N\|}_{\leq \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ car } N \geq N_1} + \underbrace{\|x_N - x'_\infty\|}_{\leq \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ car } N \geq N'_1} \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} \\ &\leq \frac{2\varepsilon_0}{3} \end{aligned}$$

d'où $\varepsilon_0 < 0$ ce qui est une contradiction.

Ainsi, $x_\infty = x'_\infty$ ce qui prouve l'unicité (sous réserve d'existence) de la limite d'une suite de vecteurs dans un espace vectoriel normé. On peut donc dire que x_∞ est la limite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

2. Soit $x \in \ker(u - Id_E)$.

Alors $(u - Id_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = x$.

Une récurrence immédiate donne $\forall l \in \mathbb{N}$, $u^l(x) = x$ si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l(x) = x$$

donc la suite $(\|r_k(x) - x\|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à 0 donc elle converge vers 0.

Ainsi, $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x .

3. Soit $x \in \text{Im}(u - Id_E)$.

Alors $\exists t \in E : x = (u - Id_E)(t)$ si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , r_k(x) = \frac{1}{k} \left(\sum_{l=0}^{k-1} u^l \right) (u - Id_E)(t) = \underbrace{(u^k - Id_E)(t)}_{= u^k - Id_E^k} = \frac{1}{k} (u^k(t) - t)$$

En appliquant l'inégalité vérifiée par u :

$$\|u^k(t)\| = \|u(u^{k-1}(t))\| \leq \|u^{k-1}(t)\|$$

donc une récurrence immédiate permet de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , \|u^k(t)\| \leq \|t\|$$

si bien que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \|r_k(x) - 0_E\| = \frac{\|u^k(t) - t\|}{k} \underbrace{\leq}_{\text{ineg. triang.}} \frac{\|u^k(t)\| + \|t\|}{k} \leq \underbrace{\frac{\|t\| + \|t\|}{k}}_{\text{conv. vers 0 lorsque } k \rightarrow +\infty}$$

donc (th. d'existence de limite par encadrement) la suite $(\|r_k(x) - 0_E\|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Ainsi, $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E .

4. ★ Le théorème du rang s'applique à l'endomorphisme $u - Id_E$ de E car E est de dimension finie et donne

$$\dim E = \dim \ker(u - Id_E) + \dim \text{Im}(u - Id_E)$$

★ Soit $x \in \ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E)$ fixé.

D'après les deux questions précédentes, $x \in \ker(u - Id_E)$ donc $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x et $x \in \text{Im}(u - Id_E)$ donc $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E .

Par unicité de la limite d'une suite de vecteurs qui converge (question IV-1), $x = 0_E$.

Par conséquent, $\ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque est immédiate car le vecteur nul appartient à tout sous-espace vectoriel,

donc $\ker(u - Id_E) \cap \text{Im}(u - Id_E) = \{0_E\}$.

Ainsi, $E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E)$.

5. Soit $x \in E$.

D'après la question précédente,

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E) \Rightarrow \exists! (x_1, x_2) \in \ker(u - Id_E) \times \text{Im}(u - Id_E) : x = x_1 + x_2$$

Par linéarité de l'endomorphisme r_k ,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, r_k(x) &= \underbrace{r_k(x_1)}_{= x_1 \text{ car } x_1 \in \ker(u - Id_E)} + r_k(x_2) \\ &= x_1 + r_k(x_2) \end{aligned}$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \|r_k(x) - x_1\| = \underbrace{\|r_k(x_2)\|}_{\text{conv. vers 0 lorsque } k \rightarrow +\infty \text{ car } x_2 \in \text{Im}(u - Id_E)}$$

donc la suite $(\|r_k(x) - x_1\|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Ainsi, $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x_1 .

Or l'application $\begin{array}{lcl} E & = & \ker(u - Id_E) \oplus \text{Im}(u - Id_E) \rightarrow E \\ x & = & x_1 + x_2 \mapsto x_1 \end{array}$ est connue, il s'agit

du projecteur vectoriel sur $\ker(u - Id_E)$ parallèlement à $\text{Im}(u - Id_E)$ et nous savons que c'est un endomorphisme de E .

6. Notons $r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a^l \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et observons que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), r_k(X) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} a^l(X) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (A^l X) = \left(\frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l \right) X = R_k X$$

Appliquons le résultat de la question précédente pour

★ $E \leftarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ce qui est autorisé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ dont l'existence est supposée admise par l'énoncé,

★ $u \leftarrow a$ ce qui est autorisé d'une part car $a \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et d'autre part car, pour la norme $\|\cdot\|$ considérée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'énoncé suppose que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|a(X)\| = \|AX\| \leq \|X\|$$

pour conclure que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(X) = p(X) \quad (1)$$

où p est la projection vectorielle sur $\ker(a - Id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\text{Im}(a - Id_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})})$.
Posons P la matrice de p dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a alors d'une part

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad p(X) = PX$$

de sorte que l'égalité (1) devient

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k X = PX$$

et d'autre part

$$P^2 = P$$

car le projecteur vectoriel p est idempotent (donc sa matrice dans toute base l'est aussi).

Ainsi, il existe une matrice P vérifiant $P^2 = P$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(R_k X)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers PX .

V. Matrices stochastiques

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AU = U &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, [AU]_{i,1} = U_{i,1} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n A_{i,j} \underbrace{U_{j,1}}_{=1} = \underbrace{U_{i,1}}_{=1} \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n A_{i,j} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

2. Soient $(A, B) \in \mathcal{E}_n^2$.

Par stabilité du produit dans la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus,

★ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{A_{i,k}}_{\geq 0} \underbrace{B_{k,j}}_{\geq 0} \geq 0$$

car $B \in \mathcal{E}_n$ car $B \in \mathcal{E}_n$

★ Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [AB]_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \quad \text{car les indices de sommation } k \text{ et } j \text{ sont indépendants} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(A_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^n B_{k,j}}_{=1 \text{ car } B \in \mathcal{E}_n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} \\ &= 1 \quad \text{car } A \in \mathcal{E}_n \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

Remarque : pour le second point, il aurait été plus rapide d'observer, par associativité du produit matriciel, que

$$(AB)U = A \left(\underbrace{BU}_{=U \text{ car } B \in \mathcal{E}_n} \right) = \underbrace{AU}_{=U \text{ car } A \in \mathcal{E}_n} = U$$

et de conclure en utilisant la question V-1 précédente.

3. Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{E}_n)^{\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $M_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

★ Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ fixés.

Par définition de la convergence d'une suite de matrices,

$$[M_\infty]_{i,j} = \lim_{k \rightarrow +\infty} [M_k]_{i,j}$$

Or la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constituée de matrices stochastiques donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, [M_k]_{i,j} \geq 0$$

si bien qu'en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus (autorisé car les deux membres ont une limite) lorsque $k \rightarrow +\infty$

$$[M_\infty]_{i,j} \geq 0$$

★ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

La suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est constituée de matrices stochastiques donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^n [M_k]_{i,j} = 1$$

si bien qu'en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus (par unicité de la limite en fait) lorsque $k \rightarrow +\infty$,

$$\sum_{j=1}^n [M_\infty]_{i,j} = 1$$

Par conséquent, M_∞ est stochastique.

4. Soient $A \in \mathcal{E}_n$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} |[AX]_{i,1}| &= \left| \sum_{j=1}^n A_{i,j} X_{j,1} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|A_{i,j}|}_{= A_{i,j} \text{ car } A \in \mathcal{E}_n} \underbrace{|X_{j,1}|}_{\leq \|X\|_\infty} \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \|X\|_\infty \underbrace{\sum_{j=1}^n A_{i,j}}_{= 1 \text{ car } A \in \mathcal{E}_n} \\ &\leq \|X\|_\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|X\|_\infty$ majore les valeurs absolues des n composantes de AX .

Ainsi, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

5. ★ Puisque $A \in \mathcal{E}_n$, la question V-1 donne $AU = U$ donc $A^p U = U$ si bien que $U \in \ker(A^p - I_n)$ donc (structure vectorielle d'un noyau) $\text{Vect}\{U\} \subset \ker(A^p - I_n)$.

De plus, $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\text{Vect}\{U\}$ est de dimension 1 si bien que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension au moins 1.

★ Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \ker(A^p - I_n)$ non nul. Par définition de $\|X\|_\infty$, il existe $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$|x_s| = \|X\|_\infty$$

— Supposons que $x_s \geq 0$.

Puisque $X \in \ker(A^p - I_n)$, $A^p X = X$ donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \sum_{j=1}^n [A^p]_{i,j} x_j$$

En considérant en particulier la ligne d'indice s

$$\begin{aligned} x_s &= \sum_{j=1}^n [A^p]_{s,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{[A^p]_{s,j}}_{\geq 0 \text{ car } A^p \in \mathcal{E}^p} \times \underbrace{x_j}_{\leq x_s} \leq x_s \quad \sum_{j=1}^n [A^p]_{s,j} = 1 \text{ car } A^p \in \mathcal{E}^p \\ &\quad \leq [A^p]_{s,j} x_s \end{aligned}$$

donc toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités, en particulier toutes les majorations

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A^p]_{s,j} x_j \leq [A^p]_{s,j} x_s$$

sont des égalités :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A^p]_{s,j} x_j = [A^p]_{s,j} x_s,$$

or tous les coefficients de A^p sont non nuls donc

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = x_s$$

On en déduit que $X = x_s.U \in \text{Vect}\{U\}$.

— Sinon, $x_s < 0$.

On peut alors appliquer le raisonnement précédent à $-X$ et obtenir que $-X = |x_s|.U$ donc $X = -|x_s|.U \in \text{Vect}\{U\}$.

Par conséquent, $\ker(A^p - I_n) \subset \text{Vect}\{U\}$.

Ainsi, $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1, c'est $\text{Vect}\{U\}$.

6. Puisque $A \in \mathcal{E}_n$, la question V-1 donne $AU = U$ donc $U \in \ker(A - I_n)$ donc $\text{Vect}\{U\} \subset \ker(A - I_n)$.

Par ailleurs l'inclusion $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n)$ est immédiate ($X \in \ker(A - I_n) \Rightarrow AX = X \Rightarrow A^p X = X \Rightarrow X \in \ker(A^p - I_n)$) donc, compte tenu de la conclusion de la question précédente,

$$\text{Vect}\{U\} \subset \ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) = \text{Vect}\{U\}$$

si bien que les trois sous-espaces vectoriels sont égaux.

Ainsi, $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $A \in \mathcal{E}_n$, la stabilité de $\mathcal{E}_n$ par produit (question V-2) permet d'obtenir que

$$\forall l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, A^l \in \mathcal{E}_n$$

★ Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$[R_k]_{i,j} = \frac{1}{k} \left(\underbrace{\delta_{i,j}}_{\geq 0} + \sum_{l=1}^{k-1} \underbrace{[A^l]_{i,j}}_{\geq 0 \text{ car } A^l \in \mathcal{E}_n} \right) \geq 0$$

★ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [R_k]_{i,j} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{k} \left(\delta_{i,j} + \sum_{l=1}^{k-1} [A^l]_{i,j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \left[\underbrace{\sum_{j=1}^n \delta_{i,j}}_{=1} + \sum_{l=1}^{k-1} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n [A^l]_{i,j}}_{=1 \text{ car } A^l \in \mathcal{E}_n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{k} (1 + (k-1)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

8. • Appliquons le résultat de la question IV-6 : pour la matrice A et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ ce qui est autorisé puisque nous avons prouvé dans la question V-4 que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$$

Ainsi, il existe une matrice P vérifiant $P^2 = P$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la suite $(R_k X)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers PX .

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

En appliquant la convergence de $(R_k X)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers PX pour le vecteur $E^{j,1}$ (j -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), en observant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, R_k E^{j,1} = \begin{pmatrix} [R_k]_{1,j} \\ [R_k]_{2,j} \\ \vdots \\ [R_k]_{n,j} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P E^{j,1} = \begin{pmatrix} P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \vdots \\ P_{n,j} \end{pmatrix}$$

la définition de la convergence dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|R_k E^{j,1} - P E^{j,1}\|_\infty = 0$$

soit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} [R_k]_{1,j} \\ [R_k]_{2,j} \\ \vdots \\ [R_k]_{n,j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \vdots \\ P_{n,j} \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0$$

donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |[R_k]_{i,j} - P_{i,j}| \leq \underbrace{\|R_k E^{i,1} - P E^{i,1}\|_\infty}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0}$$

donc le théorème d'existence de limite par encadrement permet d'affirmer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite $([R_k]_{i,j})_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $P_{i,j}$.

Ceci prouve que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers la matrice P introduite plus haut qui vérifie $P^2 = P$.

- D'après l'étude menée dans la partie IV et plus particulièrement dans la question IV-5, la matrice P est le projecteur sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$ donc $\text{rg}(P) = \dim \ker(A - I_n) = 1$ d'après la question V-6.
- D'après la question V-3, une suite convergente de matrices stochastiques converge vers une matrice stochastique, or la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices stochastiques (question V-7) qui converge vers P (point précédent) donc P est stochastique.

Ainsi la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P , stochastique de rang 1.

9. La matrice P est de rang 1 donc les n colonnes de P engendrent une droite vectorielle donc elles sont toutes multiples de l'une d'entre elles que l'on note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (on a $C \neq 0$ sinon le rang serait nul!). En notant $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ les coefficients de proportionnalité,

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mu_1.C & \mu_2.C & \cdots & \mu_n.C \end{array} \right]$$

Sachant que P est stochastique,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n \mu_j C_{i,1} = 1$$

donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) C_{i,1} = 1$$

Posons $m = \sum_{j=1}^n \mu_j$. Nous venons d'obtenir que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m C_{i,1} = 1$$

Ces égalités prouvent que $m \neq 0$ (sinon les produits seraient nuls au lieu de valoir 1) et donc que tous les coefficients de C sont égaux à $\frac{1}{m}$ donc $C = \frac{1}{m} U$.

Posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \frac{\mu_i}{m}$ et $L = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

- ★ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé quelconque. $P \in \mathcal{E}_n$ (question précédente) donc $P_{1,i} \geq 0$ donc $\mu_i C_{1,1} \geq 0$ donc μ_i est du signe de $C_{1,1}$, or $m C_{1,1} = 1 > 0$ donc $C_{1,1}$ est du signe de m si bien que

$$\lambda_i = \frac{\mu_i}{m} \geq 0$$

$$\star \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i}{m} = 1.$$

Par conséquent, L est une matrice ligne stochastique.

Ainsi, il existe $L = [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne stochastique telle que $P = UL$.

10. • Observons que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , R_k A = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^{l+1} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^k A^l - \frac{I_n}{k} = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{I_n}{k}$$

En considérant cette égalité matricielle coefficients par coefficients et en passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 , \forall k \in \mathbb{N}^* , \underbrace{\sum_{s=1}^n [R_k]_{is} A_{s,j}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sum_{s=1}^n P_{is} A_{s,j}} &= \underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1} \cdot \underbrace{[R_{k+1}]_{i,j}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P_{i,j}} - \underbrace{\frac{\delta_{i,j}}{k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \\ &\rightarrow \sum_{s=1}^n P_{is} A_{s,j} \end{aligned}$$

d'où, par unicité de la limite,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 , \sum_{s=1}^n P_{is} A_{s,j} = P_{i,j}$$

si bien que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 , [PA]_{i,j} = P_{i,j}$$

si bien que $\boxed{PA = P}$.

- $\star$ En remplaçant P par UL dans l'identité du point ci-dessus,

$$ULA = UL$$

donc

$$U \underbrace{(LA - L)}_{\in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Or, compte tenu de la valeur de U , $U(LA - L)$ est une matrice carrée dont les n lignes sont toutes égales à la ligne $LA - L$ donc $U(LA - L) = 0$ implique la nullité de $LA - L$.

Par conséquent, $\boxed{LA = L}$.

- $\star$ Soit $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ stochastique quelconque telle que $L'A = L'$.

Alors, en transposant, ${}^t A {}^t L' = {}^t L'$ donc $({}^t A - I_n) {}^t L' = 0$ d'où, puisque I_n est symétrique, ${}^t (A - I_n) {}^t L' = 0$ si bien que

$${}^t L' \in \ker({}^t (A - I_n))$$

D'après le théorème du rang, la dimension de $\ker({}^t (A - I_n))$ est $n - \text{rg}({}^t (A - I_n))$ et sachant qu'une matrice et sa transposée ont le même rang,

$$\dim \ker({}^t (A - I_n)) = n - \text{rg}(A - I_n) \underbrace{=}_{\text{th. du rang}} \dim \ker(A - I_n) \underbrace{=}_{\text{quest. V 6}} 1$$

Ainsi, ${}^t L'$ et ${}^t L$ (construite dans la question V-9 qui vérifie $LA = L$ d'après le point précédent) appartiennent à la même droite vectorielle donc ces matrices sont proportionnelles et, puisque $L \neq 0$ (sinon $P = UL$ serait la matrice nulle ce qui contredit le fait que $\text{rg} P = 1$)

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : {}^t L' = \lambda {}^t L$$

d'où $L' = \lambda L$.

Utilisons maintenant que L' et L sont stochastiques :

$$\underbrace{1}_{L' \text{ stoch.}} = \sum_{j=1}^n L'_{1,j} = \sum_{j=1}^n \lambda L_{1,j} = \lambda \underbrace{\sum_{j=1}^n L_{1,j}}_{= 1 \text{ car } L \text{ stoch.}} = \lambda$$

Ainsi, L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

11. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* , LA^k = L$$

donc, en particulier, $LA^p = L$.

Or $L \neq 0$ (sinon $P = UL$ serait la matrice nulle ce qui contredit le fait que $\text{rg} P = 1$) et ses coefficients sont positifs ou nuls (car elle est stochastique) donc $\exists j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_{j_0} > 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé. La relation $L = LA^p = L$ donne

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_{k,i} \geq \underbrace{\lambda_{j_0}}_{\text{positivité de tous les coeff.}} \underbrace{[A^p]_{j_0,i}}_{>0 \text{ hyp. sur } A^p} > 0$$

Ainsi, les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

VI. Application au labyrinthe

1. Puisque la matrice $A = {}^t B$ est stochastique (elle vérifie $AU = U$ d'après la question I-3 ce qui permet de conclure avec la question V-1) et puisque les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs nous pouvons appliquer les conclusions de la partie V : $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice P de rang 1 qui s'écrit UL où L est l'unique matrice ligne stochastique telle que $LA = L$.

Le vecteur X_0 de la partie I satisfait $BX_0 = X_0$ donc, en transposant,

$${}^t X_0 A = {}^t X_0$$

or ${}^t X_0$ est une matrice ligne stochastique donc, par unicité (question V-10) $L = {}^t X_0$ si bien que

$$P = UL = U {}^t X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \end{pmatrix}$$

2.
 - Il existe au moins une loi de probabilité sur l'ensemble $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi, elle est donnée par le vecteur X_0 de la partie I (question I-4).
 - Réciproquement, s'il existe une loi de probabilité sur l'ensemble $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi, en notant $Y_0 \in \mathcal{M}_{5,1}$ le vecteur colonne correspondant selon le formalisme de la partie I, comme S_1 suit la même loi que S_0 ,

$$BY_0 = Y_0$$

donc

$${}^t Y_0 A = {}^t Y_0$$

Or Y_0 est une matrice ligne stochastique (la positivité des coefficients vient du fait qu'il s'agit de probabilités d'événements, le fait que leur somme vaut 1 découle de la formule des probabilités totales) donc, d'après l'unicité établie dans la question V-10,

$${}^t Y_0 = {}^t X_0 \quad \text{d'où} \quad X_0 = Y_0.$$

Ainsi, il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi.