

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

4. Racines d'un nombre complexe

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

5.2. Ligne de niveau

5.3 Transformations du plan (point de vue complexe)

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

2. EULER

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

4. Racines d'un nombre complexe

4. Racines

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.2. Ligne de niveau

5.3 Transformations du plan (point de vue complexe)

5.3. Transformations du plan

Identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

Proposition - Identification

On munit le plan \mathcal{P} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi]$$

$$\text{et } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$

\Rightarrow Alignement et l'orthogonalité

\Rightarrow Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Proposition - Identification

On munit le plan \mathcal{P} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \vec{OA})[2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \vec{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi]$$

Le dernier résultat, essentiel, mérite une démonstration.

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

LE nombre $z' \times \bar{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \bar{z}$

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

LE nombre $z' \times \bar{z}$

Analyse Le nombre $Z = z' \times \bar{z}$

Définition - Le complexe Z

Soient A, B, A', B' quatre points du plan d'affixe $z_A, z_B, z_{A'}$ et $z_{B'}$ respectivement.

On note $Z = (z_{B'} - z_{A'}) \times \overline{(z_B - z_A)}$.

Alors

$$\arg Z \equiv (\vec{AB}, \vec{A'B'})[2\pi] \quad \text{et} \quad |Z| = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{A'B'}\|$$

où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est par définition la norme (longueur) du vecteur $\vec{u}(x, y)$.

Et donc

$$Z = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \left[\cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) + i \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \right]$$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

LE nombre $z' \times \bar{z}$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u}' = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$.
On rappelle que $Z = z' \times \bar{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

LE nombre $z' \times \bar{z}$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z

Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \vec{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u}' = \vec{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$.
On rappelle que $Z = z' \times \bar{z}$. On a alors :

$$\mathbf{Re}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \cos(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathbf{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

2. EULER

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

4. Racines d'un nombre complexe

4. Racines

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

5.2. Ligne de niveau

5.2. Ligne de niveau

5.3 Transformations du plan (point de vue complexe)

5.3. Transformations du plan

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi]$.

2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \iff (z-b)(\overline{z-a}) = \overline{(z-b)}(z-a).$$

les points A et B vérifient également la seconde équation...

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi]$.

2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \iff (z-b)(\overline{z-a}) = \overline{(z-b)}(z-a).$$

les points A et B vérifient également la seconde équation...

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Démonstration

Droites

Une droite est un ensemble de points alignés. Pour définir une (équation de) droite, on exploite donc les deux points de vue sur l'alignement.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Théorème - Utilisation des complexes

1. La droite (AB) privée des points A et B (d'affixes respectives a et b) est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv 0[\pi]$.
2. La droite (AB) privée du point A est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant
$$\frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \iff (z-b)(\overline{z-a}) = \overline{(z-b)}(z-a).$$
 les points A et B vérifient également la seconde équation...

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Démonstration

Exercice

Donner l'équation de la droite (complexe) qui passe par les points $A(1+i)$ et $B(2-i)$.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Théorème - Ligne de niveau - Cercle

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c .

1. $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B .

3. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$\frac{z-b}{z-a} = -\overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A .

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Théorème - Ligne de niveau - Cercle

Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c .

1. $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

2. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B .

3. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant

$\frac{z-b}{z-a} = -\overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A .

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

1. Problèmes

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

2. EULER

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3. GAUSS

4. Racines d'un nombre complexe

4. Racines

5. Rappels : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.2. Ligne de niveau

5.3 Transformations du plan (point de vue complexe)

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Définition - Transformation du plan

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

Attention - Projection

Une projection sur une droite n'est pas une transformation du plan.

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Définition - Translation

On appelle translation de vecteur \vec{u} l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}: \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{aligned}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur \vec{u} .

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Définition - Translation

On appelle translation de vecteur \vec{u} l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}: \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u} \end{aligned}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où z_0 est l'affixe du vecteur \vec{u} .

Fichier geogebra : translation.ggb

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Définition - Homothétie

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,k}: \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \Omega\vec{M}' = k\Omega\vec{M} \end{aligned}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'afixe du point Ω .

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Définition - Homothétie

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,k}: \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \Omega\vec{M}' = k\Omega\vec{M} \end{aligned}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'afixe du point Ω .

Fichier geogebra : homothetie.ggb

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Rotation

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$R_{\Omega,\theta}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}') \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \quad \text{si } M \neq \Omega$$

$$\Omega \mapsto \Omega$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'afixe du point Ω .

\Rightarrow Alignement et l'orthogonalité

\Rightarrow Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Rotation

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$R_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\Omega \vec{M}, \Omega \vec{M}') \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \quad \text{si } M \neq \Omega$$

$$\Omega \mapsto \Omega$$

En complexes, $R_{\Omega, \theta}$ est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'afixe du point Ω .

Fichier geogebra : rotation.ggb

\Rightarrow Alignement et l'orthogonalité

\Rightarrow Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Similitudes (directes)

Similitudes (directes)

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie. . .

Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \mapsto az + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Remarque Les transformations élémentaires

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Analyse Résultats caractéristiques

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par cette similitude

Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Analyse Résultats caractéristiques

Fichier geogebra : similitude.ggb

Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives

A', B', C' par cette similitude

Alors

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{A'B'}, \vec{A'C'})[2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Démonstration

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- ▶ Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b .
- ▶ Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
 f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
 - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
 - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- ▶ Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b .
- ▶ Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
 f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
 - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
 - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration

\Rightarrow Alignement et l'orthogonalité

\Rightarrow Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Théorème - Caractérisation

Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- ▶ Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b .
- ▶ Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
 f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
 - r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
 - h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration

Remarque Cas particuliers avec $a \neq 1$

\Rightarrow Alignement et l'orthogonalité

\Rightarrow Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Corollaire - Caractérisation de la similitude

La similitude de centre d'affixe z_0 , de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \mapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Corollaire - Caractérisation de la similitude

La similitude de centre d'affixe z_0 , de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \mapsto z_0 + k e^{i\theta} (z - z_0).$$

Savoir-faire. Reconnaître une similitude

Etant donnée une transformation, pour reconnaître une similitude il faut :

1. chercher le point fixe : la solution de $f(z) = z$.
On le note z_0 , c'est le centre de la similitude.
2. chercher le complexe α tel que $f(z) - z_0 = \alpha(z - z_0)$.
Ce complexe α donne le rapport et l'angle de la similitude

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- ▶ la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs,
- ▶ la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation,
- ▶ la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan)

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- ▶ la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
 - une rotation si $\theta + \theta' \neq 0[2\pi]$
 - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Proposition - Composée de similitudes

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- ▶ la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
 - une rotation si $\theta + \theta' \neq 0[2\pi]$
 - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega, k}^{-1} = h_{\Omega, \frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega, \theta}^{-1} = R_{\Omega, -\theta}.$$

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega, k}^{-1} = h_{\Omega, \frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega, \theta}^{-1} = R_{\Omega, -\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N' .

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega, k}^{-1} = h_{\Omega, \frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega, \theta}^{-1} = R_{\Omega, -\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N' .

Démonstration

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Définition - Symétries

On appelle :

- Symétrie centrale de centre Ω l'application

$$s_{\Omega} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = -\vec{\Omega M}$$

En complexes, s_{Ω} est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $z \mapsto 2z_0 - z$ où z_0 est l'affixe du point Ω .

- Symétrie orthogonale d'axe la droite \mathcal{D} (ou réflexion d'axe \mathcal{D}) l'application

$$s_{\mathcal{D}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \mathcal{D} \\ \mathcal{D} \text{ est la médiatrice de } [MM'] \text{ sinon} \end{cases}$$

La symétrie orthogonale par rapport à Ox est représentée par l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $z \mapsto \bar{z}$.

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

Remarque Symétrie centrale

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

Remarque Symétrie centrale

Attention. Réflexion

Une réflexion n'est pas une similitude directe

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Proposition - Involution

Une symétrie est une transformation du plan qui vérifie $s^{-1} = s$.

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Proposition - Involution

Une symétrie est une transformation du plan qui vérifie $s^{-1} = s$.

Démonstration

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Objectifs

- ⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan
- ⇒ Transformations géométriques du plan

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et
l'orthogonalité

⇒ Transformations
géométriques

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- ▶ Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

- ▶ Ligne de niveau : la droite $\arg(\vec{AB}, \vec{A'B'}) \equiv 0[\pi]$
- ▶ Ligne de niveau : le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tel que $(MA) \perp (MB)$

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- ▶ Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- ▶ Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- ▶ Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- ▶ Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- ▶ Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- ▶ Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - z_0)$

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- ▶ Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- ▶ Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- ▶ Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- ▶ Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - z_0)$
- ▶ Composition de similitude et similitude réciproque

Conclusion

Objectifs

⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan

⇒ Transformations géométriques du plan

- ▶ Transformations simples : translation : $+a$, homothétie : $\times k$, rotation : $\times e^{i\theta}$,
- ▶ Similitude (direct) : mélange : $z \mapsto a + bz$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$)
- ▶ Elle conserve le rapport des distances et des angles.
- ▶ Trouver le centre (point fixe), puis l'angle ($\arg k$) et le rapport ($|k|$) si $f(z) - z_0 = k(z - z_0)$
- ▶ Composition de similitude et similitude réciproque
- ▶ Unicité de similitude étant donné deux couples de points.
- ▶ Symétrie centrale : $z \mapsto 2z_0 - z$?

⇒ Alignement et l'orthogonalité

⇒ Transformations géométriques

Objectifs

- ⇒ Etude de l'alignement et l'orthogonalité dans le plan
- ⇒ Transformations géométriques du plan

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture : chap 11 : Applications.
- ▶ Exercice n° 105 & 113

1. Problèmes

2. EULER

3. GAUSS

4. Racines

5 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

5.1. Regard géométrique

5.2. Ligne de niveau

5.3. Transformations du plan