

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre



1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Leçon 22 - Relations (binaires) sur E^2

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Problème Graphe

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?

Problème Plus grand élément

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème Relation d'ordre ?

Problème Plus grand élément

Problème Codage de graphe (ou relation) à partir d'application.
Et réciproquement...

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.

On appelle graphe non orienté le couple (S, A) .

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.

On appelle graphe non orienté le couple (S, A) .

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes. On appelle graphe orienté le couple (S, A) .

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Image mentale

Heuristique - Images mentales de graphes !

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.

On appelle graphe non orienté le couple (S, A) .

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes. On appelle graphe orienté le couple (S, A) .

Exercice

Donner la définition formalisée d'un graphe complet.

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = \{\alpha \in A \mid s \in \alpha\}$. Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré entrant $d_+(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré sortant $d_-(s) = \text{card}(A'_s)$ où $A'_s = A \cap (S \times \{s\})$.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$. Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré entrant $d_+(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré sortant $d_-(s) = \text{card}(A'_s)$ où $A'_s = A \cap (S \times \{s\})$.

Exercice

Comment définir chemin d'un sommet à un autre ?

Et graphe connexe ?

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

On retrouvera très vite les graphes dans le cours sur les relations binaires, plus loin en probabilité et algèbre linéaire (chaîne de Markov), ou en informatique. . . A l'occasion, nous verrons en informatique, un façon supplémentaire et pratique de coder/définir un graphe à l'aide de matrice. . .

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Définition - Relation

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Exemple Stade Toulousain

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Première approche (par un graphe)

Définition - Relation

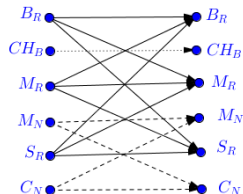
Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Exemple Stade Toulousain

Voir



⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Exercice

On peut définir dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les relations $\mathcal{R}_1$ “est un multiple de” ou $\mathcal{R}_2$ “est le double de”.

Expliciter G_1, G_2 et les diagrammes sagittaux de ces deux relations.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Propriétés des relations

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E . On dit que $\mathcal{R}$ est :

- réflexive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
- transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Exemple

Exemple Stade Toulousain

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Exemple Stade Toulousain

Exercice

Comment se représentent les propriétés précédentes des relations sur un diagramme sagittal ?

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition - Plus petit

Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments.
Lorsque $x\mathcal{R}y$ on dit que x est “plus petit” que y et on note $x \leq y$.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Définition - Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition - Plus petit

Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments.
Lorsque $x\mathcal{R}y$ on dit que x est "plus petit" que y et on note $x \leq y$.

Savoir-faire. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Définition - Ordre total

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre total si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y$ ou $y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Définition - Ordre total

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre total si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y$ ou $y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque Concernant le treillis (ou graphe)

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Définition - Ordre total

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre total si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y$ ou $y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque Concernant le treillis (ou graphe)

Exemple Sur $\mathbb{R}$

Définition - Ordre total

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre total si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y$ ou $y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque Concernant le treillis (ou graphe)

Exemple Sur $\mathbb{R}$

Exercice

Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit les deux relations suivantes :

- ▶ $(x, y) \leq_1 (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$.
- ▶ $(x, y) \leq_2 (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$.

Vérifier qu'il s'agit de relation d'ordre. S'agit-il d'ordre total ou partiel ?

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Définition - Ordre partiel

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x$$

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Définition - Ordre partiel

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x$$

Exercice

Soit Ω un ensemble et $E = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A, B) \in E^2, A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Définition - Ordre partiel

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x$$

Exercice

Soit Ω un ensemble et $E = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A, B) \in E^2, A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Exemple Divisibilité sur $\mathbb{N}$

Définition - Ordre partiel

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x$$

Exercice

Soit Ω un ensemble et $E = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A, B) \in E^2, A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Exemple Divisibilité sur $\mathbb{N}$

Exercice Montrer ce résultat

Définition - Ordre partiel

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur un ensemble E . On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x$$

Exercice

Soit Ω un ensemble et $E = \mathcal{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A, B) \in E^2, A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Exemple Divisibilité sur $\mathbb{N}$

Exercice Montrer ce résultat

Remarque Treillis

Conclusion

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- ▶ Garder des images mentales sur les graphes (fini) !

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- ▶ Garder des images mentales sur les graphes (fini) !
- ▶ Sous-ensemble G de E^2 ou application (caractéristique de G) de $E^2 \rightarrow \{0,1\}$

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

- ▶ Garder des images mentales sur les graphes (fini) !
- ▶ Sous-ensemble G de E^2 ou application (caractéristique de G) de $E^2 \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ Vocabulaire. Relation : réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- ▶ Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).
- ▶ Propriétés particulières : réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- ▶ Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).
- ▶ Propriétés particulières : réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- ▶ Relation d'ordre : réflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- ▶ Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).
- ▶ Propriétés particulières : réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- ▶ Relation d'ordre : réflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- ▶ Nombreux exemples...

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- ▶ Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).
- ▶ Propriétés particulières : réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- ▶ Relation d'ordre : réflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- ▶ Nombreux exemples. . .
- ▶ Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

Conclusion

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

- ▶ Définition d'une relation $\mathcal{R}$ entre deux objets (graphes).
- ▶ Propriétés particulières : réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
- ▶ Relation d'ordre : réflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
- ▶ Nombreux exemples. . .
- ▶ Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure
- ▶ Relation d'ordre strict

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel

⇒ Graphe & Relations

⇒ Relations d'ordre

Objectifs

⇒ Graphe et relations sur E

⇒ Relation d'ordre

Pour la prochaine fois

- ▶ Lecture du cours : Chap 12 - Relations binaires

4. Relations d'équivalence

- ▶ Exercice n°260 & 265

- ▶ TD de jeudi :

8h-10h : N° 93, 103, 106, 107, 259, 263, 267, 269

10h-12h : N° 94, 104, 111, 108, 261, 264, 267, 270

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisation

2.2. Vocabulaire

2.3. Applications

3. Relations binaires

3.1. Construction et
représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre
partiel