

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${m E}^2$ 

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${\it E}^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- i. Flublellies
- 2. Graphe
- 2.1. Formalisation
- Z.Z. VOCADUIAI
  - ...
  - Relations binaires
  - 3.1. Construction e
  - representation
    3.2 Caractérisation
  - 4 Relation d'ordre
  - 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre t
- 4.3. Ensemble avec ordre

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

.. Grapne

2.1. Formalisati

Relations binai

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre

## 1. Problèmes

## 2. Graphe

- 2.1. Formalisation
- 2.2. Vocabulaire

⇒ Relations d'ordre

2.3. Applications

### 3. Relations binaires

- 3.1. Construction et représentation
- 3.2. Caractérisations

### 4. Relation d'ordre

- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

# ⇒ Graphe& Relations

⇒ Relations d'ordre

### 1. Problèmes

2. Graphe

Problèmes

## 3. Relations binaires

### 4. Relation d'ordre

- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

Problème Graphe

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

### 1. Problèmes

- 2. Graphe
  - 2.1. Formalisatio
  - 0.0 \/---------
- 2.3. Applications
- . Relations binaires
- Construction et
- epresentation
- . Relation d'ordre
- 1.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.2. Ensemble avec ordre tota
  4.3. Ensemble avec ordre

**Problème** Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité?

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- 1. Problèmes

Problème Graphe

Problème Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité?

Problème Relation d'ordre?

- $\Rightarrow$  Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- 1. Problèmes
- 2. Graphe
- 2.1 Formalisation
- 2.2. Vocabulain
- 2.3. Application
  - Relations binaires
  - Construction et présentation
  - epresentation 3.2 Caractérisations
  - Dolotion d'ordro
  - . Relation d'ordre
  - 1.2. Ensemble avec ordre total
  - i.3. Ensemble avec ordre total

**Problème** Graphe

**Problème** Relation d'ordre?

Problème Plus grand élément

**Problème** Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité?

1. Problèmes

2. Graphe

2.1. Formalisa

2.2. Vocabulair

Relations binaire

.1. Construction et eprésentation

4. Relation d'ordre

4.1 Définitions

I.2. Ensemble avec ordre total

3. Ensemble avec ordre

1. Problèmes

**Problème** Graphe

**Problème** Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité?

Problème Relation d'ordre?

Problème Plus grand élément

**Problème** Codage de graphe (ou relation) à partir d'application. Et réciproquement...

⇒ Relations d'ordre

2.1. Formalisation

### Problèmes

## 2. Graphe

### 2.1. Formalisation

## 3. Relations binaires

### 4. Relation d'ordre

- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

# Image mentale

# Heuristique - Images mentales de graphes!

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${\it E}^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- $\Rightarrow$  Relations d'ordre
  - . Problemes
- . Grapne
- 2.1. Formalisation
- 2.3. Application
- Deletion II
- . Helations binaires
- eprésentation
- 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

# Image mentale

# Heuristique - Images mentales de graphes!

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

# Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble  $A \subset \binom{S}{2}$  de paires d'arêtes. On appelle graphe non orienté le couple (S,A).

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${\it E}^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - Grapne
- 2.1. Formalisation
- 2.2. Vocabulaire
- 2.3. Application
- Relations binaires
- eprésentation
- J.E. Caracterisations
- 4. Relation d'ordre
  - . Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

Pour l'historique et les images mentales (à bien garder en tête), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

# Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble  $A \subset \binom{S}{2}$  de paires d'arêtes.

On appelle graphe non orienté le couple (S,A).

# Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble  $A \subset S \times S$  de couples d'arêtes. On appelle graphe orienté le couple (S,A).

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- 2.1. Formalisation

⇒ Relations d'ordre

2.1. Formalisation

# Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble  $A \subset \binom{S}{2}$  de paires d'arêtes. On appelle graphe non orienté le couple (S,A).

# Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble  $A \subset S \times S$  de couples d'arêtes. On appelle graphe orienté le couple (S,A).

### Exercice

Donner la définition formalisée d'un graphe complet.

- ⇒ Relations d'ordre
- 1. Problèmes
- 2. Graphe
  - 2.1. Formalisation
  - 2.2. Vocabulaire
  - 2.3. Applications
- 3. Relations binaires
  - 3.1. Construction et représentation
  - 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
  - 4.1. Définitions
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.3. Ensemble avec ordre partiel

# ⇒ Graphe& Relations

⇒ Relations d'ordre

- Problèmes
- 2. Graphe
- 2.1. Formalisation
- \_\_\_\_
- 2.3. Application
  - . Relations binaires
  - n. Construction et eprésentation
- J.Z. Odrauterisations
- 4. Relation d'ordre
  - 4.1. Définitions
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.3. Ensemble avec ordre

## Sommets

### Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets  $s_1,s_2\in S$  sont reliés si  $(s_1,s_2)\in A$  (cas orienté) ou  $\{s_1,s_2\}\in A$  (cas non orienté)

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${\it E}^2$ 

- $\Rightarrow$  Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- 2. Graphe
- 2.1. Formalisation
  2.2. Vocabulaire
- 2.3 Application
- 2.0. Applications
  - . Helations binaires
  - eprésentation
  - 3.2. Caracterisations
- Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

On dit que deux sommets  $s_1,s_2\in S$  sont reliés si  $(s_1,s_2)\in A$  (cas orienté) ou  $\{s_1,s_2\}\in A$  (cas non orienté)

# Définition - Degré d'un sommet

Soit  $s \in S$  un sommet d'un graphe non orienté (S,A) a pour degré  $d(s) = \operatorname{card}(A_s)$  où  $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$ . Soit  $s \in S$  un sommet d'un graphe orienté (S,A) a pour degré entrant  $d_+(s) = \operatorname{card}(A_s)$  où  $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$  et pour degré sortant  $d_-(s) = \operatorname{card}(A_s')$  où  $A_s = A \cap (S \times \{s\})$ .

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - roblèmes
- Granhe
- 2.1. Formalisation
- 2.2 Vocabulaire
- 2.3. Applications
- . Relations binair
- représentation
- 1 Relation d'ordre
  - Helation d ordre
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.2. Ensemble avec ordre total
  4.3. Ensemble avec ordre

2.2. Vocabulaire

3. Relations bina

3.1. Construction et représentation

4 Polotion d'ordre

. Helation d'ordre

4.2. Ensemble avec ordre tota

4.3. Ensemble avec ordre

### Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets  $s_1, s_2 \in S$  sont reliés si  $(s_1, s_2) \in A$  (cas orienté) ou  $\{s_1, s_2\} \in A$  (cas non orienté)

# Définition - Degré d'un sommet

Soit  $s \in S$  un sommet d'un graphe non orienté (S,A) a pour degré  $d(s) = \operatorname{card}(A_s)$  où  $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$ . Soit  $s \in S$  un sommet d'un graphe orienté (S,A) a pour degré entrant  $d_+(s) = \operatorname{card}(A_s)$  où  $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$  et pour degré sortant  $d_-(s) = \operatorname{card}(A_s')$  où  $A_s = A \cap (S \times \{s\})$ .

## Exercice

Comment définir chemin d'un sommet à un autre? Et graphe connexe?

## ⇒ Graphe& Relations

### ⇒ Relations d'ordre

### 2.3. Applications

## Problèmes

## 2. Graphe

- 2.3. Applications

### 3. Relations binaires

### 4. Relation d'ordre

- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- Problémes
- .. Grapiic

2.3. Applications

3. Relations bina

- representation
  3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
  - I.2. Ensemble avec ordre total
- Ensemble avec ordre total
   Sensemble avec ordre

On retrouvera très vite les graphes dans le cours sur les relations binaires, plus loin en probabilité et algèbre linéaire (chaine de Markov), ou en informatique...A l'occasion, nous verrons en informatique, un façon supplémentaire et pratique de coder/définir un graphe à l'aide de matrice...

⇒ Relations d'ordre

- ⇒ Graphe& Relations
  ⇒ Relations d'ordre
- , molationio a ora
  - . Problèmes
- 2. Grapne
- 2.1. Formalisati
- 2.2 Vocabulaira
- 2.3 Application
- Rolatione binairee
- nerations binaires
- Construction et représentation
- 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
  - 4. neialion a orar
  - 4.1. Delitipons
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.3. Ensemble avec ord

## 1. Problèmes

- 2. Graphe
  - 2.1. Formalisation
  - 2.2. Vocabulaire
  - 2.3. Applications
- 3. Relations binaires
  - 3.1. Construction et représentation
  - 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
  - 4.1. Définitions
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.3. Ensemble avec ordre partiel

# Première approche (par un graphe)

### Définition - Relation

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de  $E \times E$ . Si  $(x,y) \in E^2$  on écrit  $x \mathcal{R} y$  lorsque  $(x,y) \in G$ .

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- z. Grapne
- 2.1. Formalisation
- 2.2. Vocabulaire
- Deletiene bineire
- 3. Relations binaire:
- 3.1. Construction et représentation
- 4. Relation d'ordre
- 4.1 Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de  $E \times E$ . Si  $(x,y) \in E^2$  on écrit  $x \mathcal{R} y$  lorsque  $(x,y) \in G$ .

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de  $E \times E$  et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- z. Grapne
- .1. Formalisation
- 2.2. Vocabulair
- 3. Relations binaires
- 3.1. Construction et représentation
- 4. Relation d'ordre
  - 4.1. Delinipons
- 4.2. Ensemble avec ordre total
  4.3. Ensemble avec ordre

Soit *E* un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de  $E \times E$ . Si  $(x,y) \in E^2$  on écrit  $x \mathcal{R} y$  lorsque  $(x,y) \in G$ .

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de  $E \times E$  et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E). **Exemple** Stade Toulousain

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

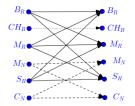
- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- 2. Graphe
- .1. Formalisation
- 2.2. Vocabulair
- 2.0. Applications
- 3. Relations binaire:
- Construction et représentation
- 3.2. Caracterisations
- 4. Relation d'ordre
- 4. Helation d ordre
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

Soit E un ensemble.

Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de  $E \times E$ . Si  $(x, y) \in E^2$  on écrit  $x \mathcal{R} y$  lorsque  $(x, y) \in G$ .

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de  $E \times E$  et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E). **Exemple** Stade Toulousain

## Voir



- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 3.1. Construction et représentation

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 3.1. Construction et
- représentation

Exercice

On peut définir dans l'ensemble  $\{0,1,2,3,4,5,6\}$  les relations  $\mathcal{R}_1$ "est un multiple de" ou  $\mathcal{R}_2$  "est le double de".

Expliciter  $G_1, G_2$  et les diagrammes sagittaux de ces deux relations.

2. Graphe

2.1 Formalisat

2.2. Vocabula

2.3. Application

Relations binair

3.1. Construction et représentation

3.2. Caractérisations

4 Relation d'ordre

4. Relation d ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec o

# 1. Problèmes

## 2. Graphe

- 2.1. Formalisation
- 2.2. Vocabulaire

⇒ Relations d'ordre

2.3. Applications

## 3. Relations binaires

- 3.1. Construction et représentation
- 3.2. Caractérisations

### 4. Relation d'ordre

- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

3.2 Caractérisations

# Définition - Propriétés des relations

symétrique

Soit  $\mathcal R$  une relation sur un ensemble E. On dit que  $\mathcal R$  est :

réflexive si  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$ :

si  $\forall (x, y) \in E^2, x \Re y \Rightarrow y \Re x$ ;

antisymétrique si  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$ ;

si  $\forall (x, y, z) \in E^3$ ,  $x \mathcal{R} y$  et  $v \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ . transitive

# Exemple

**Exemple** Stade Toulousain

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 3.2. Caractérisations

# Exemple

Leçon 22 - Relations (binaires) sur  ${\it E}^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
- i. Problemes
- .. Grapric
- .1. Formalisatio
- 2.2. Vocabulaire
- B. Relations binaire
- représentation

  3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

**Exemple** Stade Toulousain

### Exercice

Comment se représentent les propriétés précédentes des relations sur un diagramme sagittal?

### ⇒ Graphe& Relations ⇒ Relations d'ordre

### 4.1. Définitions

### Problèmes

## 2. Graphe

### 3. Relations binaires

### 4. Relation d'ordre

### 4.1. Définitions

- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

Formalisation

2.3. Application

Relations binaire

présentation

Deletion d'endre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

.3. Ensemble avec ordre

### Définition - Relation d'ordre

Soit  ${\mathscr R}$  une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

4.1. Définitions

## Définition - Relation d'ordre

Soit  $\mathcal{R}$  une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

# Définition - Plus petit

Une relation d'ordre permet de comparer deux éléments. Lorsque  $x\mathcal{R}y$  on dit que x est "plus petit" que y et on note  $x \leq y$ .

0. 1/---------

2.3. Applications

Relations binai

1.1. Construction et eprésentation

2. Caractérisations

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

4.2. Ensemble avec ordre total

4.3. Ensemble avec ordre

## Définition - Relation d'ordre

Soit  $\mathcal R$  une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

# Définition - Plus petit

Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments. Lorsque  $x \mathcal{R} y$  on dit que x est "plus petit" que y et on note  $x \leq y$ .

# Savoir-faire. Montrer que ${\mathscr R}$ est une relation d'ordre

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 4.2. Ensemble avec ordre total

- 2. Graphe

⇒ Relations d'ordre

- 3. Relations binaires
- 4. Relation d'ordre
  - 4.1. Définitions
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.3. Ensemble avec ordre partiel

## Ensemble avec ordre total

### Définition - Ordre total

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si :  $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 4.2. Ensemble avec ordre total

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si :  $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque Concernant le treillis (ou graphe)

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 4.2. Ensemble avec ordre total

## Ensemble avec ordre total

### Définition - Ordre total

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si :  $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

**Remarque** Concernant le treillis (ou graphe) **Exemple** Sur  $\mathbb{R}$ 

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- 4.2. Ensemble avec ordre total

#### Définition - Ordre total

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si :  $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

**Remarque** Concernant le treillis (ou graphe)

**Exemple** Sur  $\mathbb{R}$ 

### Exercice

Sur  $E = R^2$ , on définit les deux relations suivantes :

- $(x, y) \leq_1 (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$
- $(x, y) \leq_2 (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y').$

Vérifier qu'il s'agit de relation d'ordre. S'agit-il d'ordre total ou partiel?

Problèmes

2. Graphe

## ⇒ Graphe& Relations

⇒ Relations d'ordre

- 4.3 Ensemble avec ordre partiel

#### 4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

3. Relations binaires

- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

# Ensemble avec ordre partiel

## Définition - Ordre partiel

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not \leq y \text{ et } y \not \leq x$$

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- z. Grapne
- 2.1. Formalisation
- 2.3. Applicatio
  - 8. Relations binaire
  - .1. Construction et
  - représentation
  - Dolotion d'audro
  - Branch
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
  - 4.2. Ensemble avec ordre total
     4.3. Ensemble avec ordre

# Définition - Ordre partiel

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x, y) \in E^2, x \not \leq y \text{ et } y \not \leq x$$

### Exercice

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $E=\mathscr{P}(\Omega)$ . On définit sur E la relation  $\mathscr{R}$  par

$$\forall (A,B) \in E^2, A \mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total?

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- . Grapne
- Formalisation
- 0.0 4------
- z.s. Application
- 3. Relations binaires
- Construction et présentation
- 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre partiel

4.3 Ensemble avec ordre partiel

## Définition - Ordre partiel

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x,y) \in E^2, x \not\preceq y \text{ et } y \not\preceq x$$

### Exercice

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $E = \mathcal{P}(\Omega)$ . On définit sur E la relation  $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A,B) \in E^2, A \mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total?

**Exemple** Divisibilité sur N

4.3 Ensemble avec ordre partiel

## Définition - Ordre partiel

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x,y) \in E^2, x \not \leq y \text{ et } y \not \leq x$$

## Exercice

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $E = \mathcal{P}(\Omega)$ . On définit sur E la relation  $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A,B) \in E^2, A \mathscr{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total?

**Exemple** Divisibilité sur N

Exercice Montrer ce résultat

4.3 Ensemble avec ordre partiel

## Définition - Ordre partiel

Soit  $\leq$  une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel si il n'est pas total :

$$\exists (x,y) \in E^2, x \not\preceq y \text{ et } y \not\preceq x$$

### Exercice

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $E = \mathcal{P}(\Omega)$ . On définit sur E la relation  $\mathcal{R}$ par

$$\forall (A,B) \in E^2, A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total?

**Exemple** Divisibilité sur N

Exercice Montrer ce résultat

Remarque Treillis

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre

- $\Rightarrow$  Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - I. Problèmes
- 2. Graphe
- 2.1. Formalisation
- 2.2 Vocabulaira
- 2.3. Applications
- . Relations binaires
- 1 Construction at
- eprésentation
- 3.2. Caractérisations
- Relation d'ordre
- Helation d ordi
- 4.2 Encomble avec order total
- Ensemble avec ordre
   Total

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
  - Garder des images mentales sur les graphes (fini)!

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
- 2. Graphe
  - 2.1. Formalisation
- 2.2. Vocabulaire
- 2.3. Applications
- . Relations binaires
- .1. Construction et
- 3.2 Caractáricatio
- Polotion d'ordre
- 44 DATE OF
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
  - Garder des images mentales sur les graphes (fini)!
  - Sous-ensemble G de  $E^2$  ou application (caractéristique de G) de  $E^2 \to \{0,1\}$

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - . Grapne
  - Formalisation
- 0.0 4-----
- Polotiona binaire
- . Relations binaires
- présentation
- 4. Relation d'ordre
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
  - Garder des images mentales sur les graphes (fini)!
  - Sous-ensemble G de  $E^2$  ou application (caractéristique de G) de  $E^2 \to \{0,1\}$
  - Vocabulaire. Relation : réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - Graphe
  - Formalisation
- 2.3 Application
  - . Relations binaires
  - .1. Construction et
  - .2. Caractérisations
  - L Polation d'ordro
  - . Relation d'ordre
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre

Lecon 22 - Relations (binaires) sur  $E^2$ 

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre
  - ightharpoonup Définition d'une relation  $\mathscr{R}$  entre deux objets (graphes).

- $\Rightarrow$  Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - . Problèmes
- .. Grapne
- .1. Formalisation
- 2.2 Application
- Relations hinaires
- Relations binaires
- Construction et eprésentation
- 3.2. Caractérisations
- 4. Relation d'ordre
- 4.1 Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

### **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre
  - ightharpoonup Définition d'une relation  $\mathscr{R}$  entre deux objets (graphes).
  - Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie

- $\Rightarrow$  Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - . Problemes
  - Citapilo
  - 1. Formalisatio
- 2.2 Application
  - . Relations binaires
  - 1 Construction of
  - eprésentation
- Deletion disease
- I. Relation d'ordre
- 4.2 Ensemble avec ordre total
- 4.2. Ensemble avec ordre total
  4.3. Ensemble avec ordre

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre
  - ightharpoonup Définition d'une relation  $\mathscr{R}$  entre deux objets (graphes).
  - Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
  - Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - Grapne
  - Formalisatio
- 2.2 Application
  - B. Relations binaire
  - 3.1. Construction et représentation
  - J.Z. Garacierisations
- 4. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec or partiel

## **Objectifs**

- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre
  - Définition d'une relation  $\mathcal{R}$  entre deux objets (graphes).
  - Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
  - Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
  - Nombreux exemples...

- Lecon 22 Relations (binaires) sur  $E^2$
- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

# $\Rightarrow$ Graphe et relations sur E

- ⇒ Relation d'ordre
  - ightharpoonup Définition d'une relation  $\mathscr{R}$  entre deux objets (graphes).
  - Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
  - Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
  - Nombreux exemples...
  - Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - Grapne
  - . Formalisation
- 2.3 Application
- . Relations binaire
- représentation
- s.2. Caracterisations
- I. Relation d'ordre
- 4.1. Définitions
- 4.2. Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre

- ⇒ Relation d'ordre
  - ightharpoonup Définition d'une relation  $\mathscr{R}$  entre deux objets (graphes).
  - Propriétés particulières : reflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie
  - Relation d'ordre : reflexivité, transitivité, antisymétrie. Totale ou non.
  - ► Nombreux exemples...
  - Vocabulaire : majorant, plus grand élément, borne supérieure
  - Relation d'ordre strict

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre
  - Problèmes
  - Grapne
  - . Formalisation
- \_\_\_\_
- Relations binai
- 3.1. Construction et
- 2 Caractérisations
- .L. Ouracionourono
- Relation d'ordre
- 4.2 Ensemble avec ordre total
- 4.3. Ensemble avec ordre total

- ⇒ Graphe& Relations
- ⇒ Relations d'ordre

- **Objectifs**
- $\Rightarrow$  Graphe et relations sur E
- ⇒ Relation d'ordre

## Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 12 Relations binaires 4. Relations d'équivalence
- Exercice n°260 & 265
- TD de jeudi :

8h-10h: N° 93, 103, 106, 107, 259, 263, 267, 269 10h-12h: N° 94, 104, 111, 108, 261, 264, 267, 270